23. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кипар – Агрос, 29.04.2006.

1. Доказати да за произвољне позитивне бројеве a, b, c важи неједнакост

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}\,.$$

2. Права m сече странице AB и AC и продужетак странице BC иза C троугла ABC у тачкама D, F, E, редом. Праве кроз A, B, C паралелне правој m поново секу описани круг троугла ABC редом у тачкама A_1, B_1, C_1. Доказати да праве A_1E, B_1F, C_1D имају заједничку тачку.

3. Наћи све тројке (m, n, p) позитивних рационалних бројева таквих да су бројеви

$$m + \frac{1}{np}, \;\; n + \frac{1}{pm}, \;\; p + \frac{1}{mn}$$

цели.

4. За дати природан број m, посматрајмо низ (a_n) природних бројева одређен почетним чланом $a_0 = a$ и релацијом

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{ако је } a_n \text{ парно,} \\ a_n + m & \text{ако је } a_n \text{ непарно.} \end{cases}$$

Наћи све вредности a за које је овај низ периодичан (тј. постоји $d > 0$ такво да је $a_{n+d} = a_n$ за све n).

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.