

20. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Албанија – Тирана, 04.05.2003.

1. Да ли постоји скуп B , који се састоји од 4004 природна броја, такав да за сваки његов подскуп A , који има 2003 елемента, важи да збир елемената скупа A није дељив са 2003?

БЈР Македонија

2. Нека је ABC троугао, такав да важи $|AB| \neq |AC|$. Нека је D тачка пресека тангенте на описану кружницу троугла ABC у тачки A и праве BC . Нека су E и F тачке на симетралама дужи AB и AC редом, такве да су BE и CF нормалне на BC . Доказати да су тачке D , E и F колинеарне.

Румунија

3. Наћи све функције $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ које задовољавају следеће услове:
(1) $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy$, за свако $x, y \in \mathbb{Q}$;
(2) $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x$, за свако $x \in \mathbb{Q}$;
(3) $f(1) + 1 > 0$.

Кипар

4. Нека су m и n узајамно прости непарни природни бројеви. Правоугаоник $ABCD$, такав да је $|AB| = m$ и $|AD| = n$, подељен је на mn јединичних квадрата. Означимо са A_1, A_2, \dots, A_k уза-
стопне пресечне тачке дијагонале AC са страницама јединичних квадрата ($A_1 = A, A_k = C$). Доказати да важи:

$$\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} |A_j A_{j+1}| = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{mn}.$$

Бугарска

Време за рад 270 минута.

Сваки задатак вреди 10 поена.