ДРЖАВНИ СЕМИНАР ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ 2017.

др Милан Живановић

Историјски садржаји у настави математике

Београд,

фебруар 2017.

УВОД

У програмима математичког образовања у основним и средњим школама у Србији не постоје плански предвиђене теме из историје математике. Та област је и у пракси прилично запостављена. Поједини наставници самоиницијативно са циљем повећавања мотивације за учење у своја предавања укључују неке елементе из историје математике. Мора се рећи да квалитет знања која ученици треба да усвоје у доброј мери зависи и од начина презентовања историјских података из развоја математике. Ту се не мисли само на мотивацијску улогу, која се најчешће истиче, а коју историјске теме свакако имају. Поред тога, може се рећи, да елементи историје математике у настави математике имају и следеће функције:

- методолошка функција (развојност метода решавања проблема у зависности од усложњавња практичних потреба; ограничења и могућности њихове примене)
- интегративна функција (могућност решавања истих проблема кроз различите приступе и повезаност различитих математичких дисциплина)
- развојна функција (историјско-генетски приступ математичким теоријама обезбеђује свеобухватност и логичку утемељеност)
- васпитна функција (глорификовање позитивних особина кроз примере из биографија великих математичара)
- општеобразовна функција (стварање потпуније слике о разним друштвеним епохама и њиховим противречностима кроз познавање могућности решавања за њих карактеристичних природно-математичких проблема)

У коауторском раду „Улога и значај историје математике у настави“ Мирко Дејић и Александра Михајловић дају афирмативан став о потреби увођења историје математике у наставу математике. Опис позитивних могућности који историјски елементи имају на процес учења поткрепљен је и ставом неколико значајних математичких стваралаца. На крају тог рада дат је и преглед неколико националних курикулума у којима су различитом обимом и приступом уврштене теме из историје математике. Посебно су истакнути образовни системи Данске, Бразила и Италије, а такође и Кине поготово у садржајима који су битни за развијање патриотизма.

У математичко-методичкој литератури Руске федерације постоји и обиман материјал из примена историје математике у настави. Почетком осамдесетих година прошлог века Глејзер објављује тротомно издање „Историја математике у школи“ у којој је садржај разврстан према узрасту ученика. Прва књига намењена је за садржаје од 4. до 6. разреда, друга за 7. и 8. и трећа за 9. и 10. разред. Баврин и Фрибус у књизи „Стари проблеми“ презентују задатке старих цивилизација и великих математичара користећи хронолошки приступ. Код нас је са сличним садржајем објављена књига „Занимљиви математички проблеми великих математичара“ Миодрага Петковића.

У погледу садржаја математичко-историјски садржај се може разврстати у неколико тема:

- биографије математичара и анегдоте из њиховог животе
- историја решавања значајних проблема
- историја симбола који се користе у математици
- задаци претходних епоха у разним цивилизацијама
- задаци истакнутих математичара и љубитеља математике
- историја наставе математике итд.

Тај садржај кроз разне облике излагања може бити реализован у редовној а нарочито додатној настави. О овоме Дејић у поменутом чланку каже: „Методичка препорука је да се не претерује са историјским чињеницама и не замагљује суштина теме која се обрађује. Довољно је, када се спомене име неког математичара, дати неку анегдоту из његовог живота, осветлити његово дело или појам везан за његово име. Да би деца лакше усвојила појам који се обрађује, треба дати кратак историјски развој тог појма. Довољно је на сваком часу издвојити до 5 минута за историјске чињенице, што ће знатно повећати интересовање за математику и побољшати дисциплину на часу. Поред саопштавања неопходних историјских чињеница, везаних за појмове који се обрађују на редовним часовима, елементе историје математике можемо обрађивати на часовима додатне наставе. Историјске теме ученици треба да разрађују неколико дана, а затим на кружоцима дискутују о разрађеним темама. Многа, иста, историјска питања могу се обрађивати у оквиру различитих разреда и у различитим контекстима.“

Може се истаћи да се историјски садржаји кроз задатке старих епоха и задатке великих математичара могу значајније уврстити и у редовну наставу. Аутор је мишљења да би ученицима били интересантни и изабрани задаци из првих српских уџбеника, па и оних каснијих које су решавали њихови не превише давни преци. То би могла бити тема посебног семинара.

На овом семинару ће углавном бити представљени задаци из горе поменутих руских наслова. У прва три часа биће представљени конкретни примери могућности примене историје математике у редовној и додатној настави у основној и средњој школи. Два завршна часа су замишљена као радионица у којој би учесници семинара представили своја искуства и примере из праксе. Крајњи циљ је да учесници семинара осмисле моделе часова или блокова часова у којима ће бити уврштени елементи историје математике.

У ваннаставним активностима математика се може популаризовати и разним такмичењима и квизовима. Тема тих такмичења могу бити везана и за садржаје из историје математике. Један такав квиз „Биографије великих математичара“ проводи се у децембру гимназији „Јосиф Панчић“ у Бајиној Башти уз учешће скоро 13% ученика. Игре у квизу су креиране у Геогебри. На семинару ће бити презентована и искуства са тог такмичења.

ЗАДАЦИ

1. Задаци Старог Египта и Вавилона

Математичари се слажу да су најстарији чисто математички списи Московски и Ахмесов папирус писани у едукативне сврхе као збирке задатака. За први се сматра да је настао у 19. веку пре Нове ере. Открио га је родоначелник руске египтологије Голенишћев 1892. или 1893. године у Теби. Папирус је дуг 5,4 метара и ширине од 4 до 7 центиметара, а дешифровао га је 1927. године Струве. У папирусу је потпуно урађено 25 задатака.

Ту се у **14. задатку** први пут израчунава запремина зарубљене пирамиде. Тако за запремину зарубљене пирамиде са основицама 4 и 2 јединице мере и висину 6 писац дословце каже: Квадрираш 4 добијеш 16, квадрираш 2 добијаш 4. Помножиш 4 са 2 добијеш 8. Сабереш 16, 4 и 8 добијеш 28. Израчунаш трећину од 6 добијеш 2. Помножиш 28 са 2 и добијеш запремину пирамиде 56.

Поред овог наведимо још неке задатке Московског папируса.

Задатак 6. Одредити странице правоугаоника површине 12 јединица, ако ширина изниси $\frac{3}{4}$ дужине.

Задатак 10. Израчунати површину корпе са отвором 9 јединица.

Није извесно да ли је корпа била облика полусфере или полуцилиндра. У оба случаја решење је приближно тачно. Ипак, проблем је значајан јер се први пут израчунава површина једне криволинијске фигуре. Сматра се да је овде број π израчунат са грешком око 1%.

Задатак 19. Израчунај цело које са половином и са још 4 даје 10.

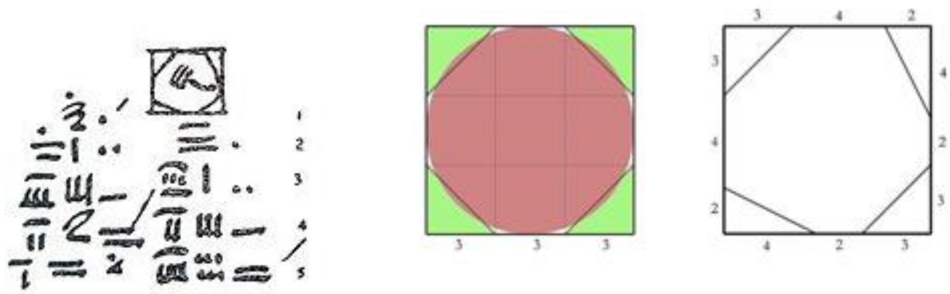
Ахмесов папирус потиче из око 1650. године пре Нове ере, а добио је име по свом писцу Ахмесу. Сам писац истиче да је његов рукопис препис задатака из једног документа старијег око 200 година и да је посвећен *за савршено и темељно проучавање свих ствари, разумевање њихове суштине и знања њихових тајни*. Папирус је 1858. године пронашао шкотски археолог Хенри Рајнд, па се по њему артефакт назива и Рајндов папирус. Фрагменте текста најпре је дешифровао немачки египтолог Ајзенлор, а дешифровање је 1929. завршила група америчких аутора. Дужина папируса је 5,25 метара а ширина 33 центиметра, са садржајем од 84 задатка са препорукама за њихово решавање.

У 64. задатку се тражи да се 10 мера пшенице распореди на 10 људи тако да сваки следећи добије 1/8 мере мање од претходног. Писац нуди решење. Ако би пшеницу поделили на једнаке делова сваки човек би добио по једну јединицу мере. Од 10 одузми 1 добићеш 9. Разлику 1/8 подели са два добићеш 1/16. Помножи 9 и 1/16 добићеш 1/2+1/16. Први човек ће добити 1+1/2+1/16 мере пшенице, а сваки следећи по 1/8 јединице мање. Задивљујуће је да се у решењу користи тачна формула за последњи члан аритметичког низа $a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1)\cdot\frac{d}{2}$. Наведимо још неколико задатака из овог списа.

Задатак 26. Величина и њен четврти део укупно дају 15 јединица.

Древни математичар овде први пут користи методу лажне претпоставке, полазећи од хипотетичког решења 4. У то случају је, по услову задатка, збир величине и њеног дела 5. Писац закључује да је решење проблема три пута веће од претпостављеног 4, тј 12. У овом примеру он даје и проверу резултата

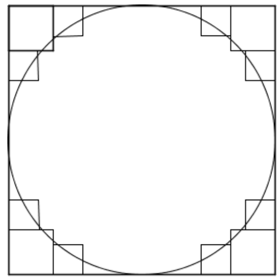
Вероватно да је један од најзначајнијих проблема онај под **редним бројем 48**. (Слика 6.).



Слика 1.

Сматра се да је у задатку описан поступак израчунавања површине круга уписаног у квадрат странице 9. Превод иде у два правца: да је та површина приближно једнака површини првог: $81 - 4\cdot\frac{3\cdot 3}{2} = 63$ јединице односно, другог: $81 - 2\cdot\frac{3\cdot 3}{2} - 2\cdot\frac{4\cdot 2}{2} = 64$ јединица, осмоугла на тој слици.

У **50. задатку** Рајндовог папируса се за површину круга користи приближна формула $P \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, где је d пречник круга. Није забележено како се до те формуле дошло. Ипак, врло је вероватна хипотеза, да је најпре око круга пречника d описан квадрат, те да су од тог квадрата прво исечена четири квадрата странице $d/6$, а затим од остатка још осам квадрата странице $d/9$, као на слици7.



Слика 2.

Тако добијена фигура има површину која се такође рачуна по формули коју су Египћани користили за површину круга. Нашом симболиком задатак се може моделовати следећим изразима:

$$P = d^2 - 4\cdot\left(\frac{d}{6}\right)^2 - 8\cdot\left(\frac{d}{9}\right)^2 = \left(1-\frac{1}{9}\right)d^2 - \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)d^2 = \left[\left(1-\frac{1}{9}\right)d\right]\cdot\left[\left(1-\frac{1}{9}\right)d\right]$$

Задатак 51. Ако вам неко каже троугао има „ширину“ 10 кхета[1] и дужину 4 кхета, колика је његова површина?

Задатак 52. Одредити област зарубљеног троугла коме је висина 20 кхета, доња основа 6, а горња основа 4 кхета.

Задатак 79. У свакој од седам кућа живи седам мачака, свака мачка улови седам мишева, сваки миш поједе седам класова јечма, а сваки клас јечма даје седам мера јечма. Који бројеви чине овај ред и колики је њихов збир?

Непостојаност папируса је главни разлог што, још изузев записа на гробницама фараона, немамо других писаних докумената ове културе. Ситуација је нешто повољнија са артефактима цивилизације Вавилона. Коришћењем глинених плоча, на чијим су површинама, док је мекана, писали клинастим писмом и њиховим каснијим печењем на сунцу, добијени су трајнији и бројнији сведоци њихове учености па и математичких достигнућа. Сачуваних и дешифрованих глинених плоча има око 500000, од тога су око 150 са чисто математичким текстом и око 200 разних бројевних таблица. Оне нам сведоче о развијенијем математичком умећу у односу на Египћане. Вавилонци су у својим прорачунима користили шездесетични бројевни систем. Тако је 2,21;12,27 запис за број $2\cdot 60^2 + 21 + \frac{12}{60} + \frac{27}{60^2}$.

На глиненим плочама су дешифровани записи који дају тачну формулу за сабирање чланова аритметичког низа $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$. Такође се за суму чланова геометријског реда

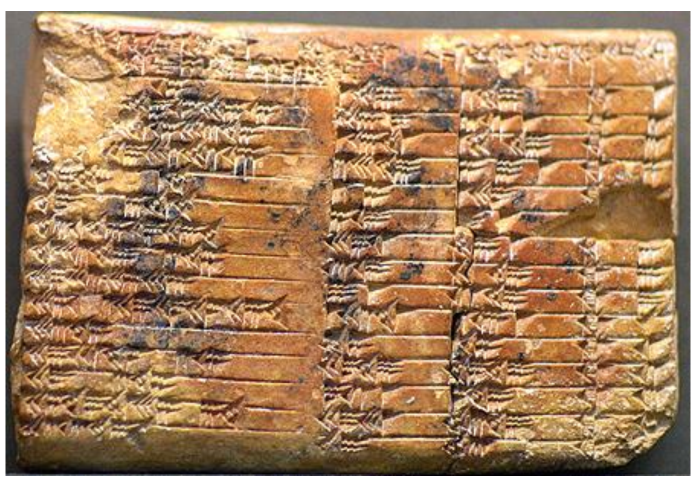
[1] Кхет је староегипатска мера за дужину

1, 2, 2^2, 2^3,... користи тачна рекурентну формула $S_n = (S_{n-1}+1)+S_{n-1}$, а код конкретног сабирања првих десет квадрата образац $\sum_1^n m^2 = \left(1\cdot\frac{1}{3}+n\cdot\frac{2}{3}\right)N$, где је $N=\sum_1^n m$. Појављују се и задаци који се решавају помоћу квадратних једначина. Тако на једној плочи писац поставља проблем:

Ја сам од површине квадрата одузео његову страницу и добио 14,30. Одредити страницу квадрата.

Задатак се може моделовати једначином $x^2 - x = 14{,}30$. На плочи се даље даје поступак: „Узми 1 и подели на пола добијаш 0;30. Помножи 0;30 са 0;30 то је 0;15. Сабери то са 14,30 добићеш 14,30;15 што је квадрат од 29;30. Сабери 0;30 које си множио са 29;30 добићеш 30 страницу квадрата.“ Видно је да се тражи само позитивно решење.

Нојгебауер[2] и Сакс[3] сматрају да су Вавилонци знали опште решење Питагориних тројки $a=p^2-q^2$, $b=2pq$ и $c=p^2+q^2$, за задате целе бројеве p и q, које касније срећемо код Еуклида. То поткрепљују анализом најинтригантнијег артефакта вавилонске цивилизације; плоче Плимптон 322. То је глинена плоча на којој је таблица бројева за које се сматра да представљају елементе правоуглог троугла. Плочу је пронашао Едгар Бенкс амерички кријумчар источњачких реликвија по коме је направљен фиктивни јунак Индијана Џонс. Бенкс је плочу продао новинару Џорџу Плимптону, а овај је исту поклонио Колумбијском универзитету. Отуд и од серијког броја под којим је заведена потиче и њен назив. На слици 3. је приказана та плоча, а на слици 4. дешифровани текст са плоче приказан у шездесетичном бројевном систему.



Слика 3. Плоча Плимптон 322

[2] Ото Нојгебауер (1899-1990) аустријско-амерички историчар математике
[3] Абрахам Сакс (1915-1983) амерички историчар

Row	$\frac{b^2}{h^2}$	b	d	No.	h
3	[59,0,]15	1,59	2,49	1	2,0
4	[56,56,]58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2	57,36
5	[55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3	1,20,0
6	53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4	3,45,0
7	48,54,1,40	1,5	1,37	5	1,12
8	47,6,41,40	5,19	8,1	6	6,0
9	43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7	45,0
10	41,33,45,14,3,45	13,19	20,49	8	16,0
11	38,33,36,36	8,1	12,49	9	10,0
12	35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10	1,48,0
13	33,45	45	1,15	11	1,0
14	29,21,54,2,15	27,59	48,49	12	40,0
15	27,0,3,45	2,41	4,49	13	4,0
16	25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14	45,0
17	23,13,46,4[0]	28	53	15	45

Слика 4. Дешифровани текст глинене плоче Плимптон 322

Ипак тај резултат је више алгебарски те о геометријској интерпретацији Питагорине теореме више сазнајемо из других задатака. Тако се она користи за израчунавање дијагонале квадрата, висине једнакокраког троугла са задатом основицом и краком, те израчунавање полупречника круга око таквог троугла.

Занимљив је пример њене примене у следећем практичном задатку:

Наћи дужину мердевина које су најпре наслоњене на зид, а затим горњим крајем спуштене наниже за 3 лакта, тако што је доњи крај одмакнут од зида за 9 лаката.

У решењу задатка се поставља једначина $x^2 = (x-3)^2 + 9^2$, а као решење добија дужина $x = 15$. Постоје и варијанте овог задатка са задатом дужином мердевина и одтупањем горњег краја, а непознатим размаком доњег краја од зида.

За прављење разних задатака дешифровања аритметичких операција могу се искористити и староегипатске цифре. Кроз тај поступак ученици се могу упознати са бројевним системом и цифрама Старог Египта. Превођење из шездесетичног у децимални систем може се обрадити кроз разне проблеме из Вавилона.

За обе културе је карактеристично излагање проблема за практичну примену математике. Сматра се да је настава извођена само за полазнике из високих класа ради доказивања и очувања њихове доминације. Готово искључиво је била намењена мушкој популацији и имала је врло висок степен индивидуалности.

.

2. Задаци старе Грчке и Рима

Преко Талеса и Питагоре математичка достигнућа Египћана и Вавилонаца су проширена у Грчку. Тим чином је започо процват математике као науке. Питагора оснива своју чувену школу која ће дати значајне математичке резултате. Новост је што Питагорејци у свој систем учења прихватају и жене, тако да и оне почињу да се баве математиком. Чувен је Питагорин задатак о броју ученика у његовој школи:

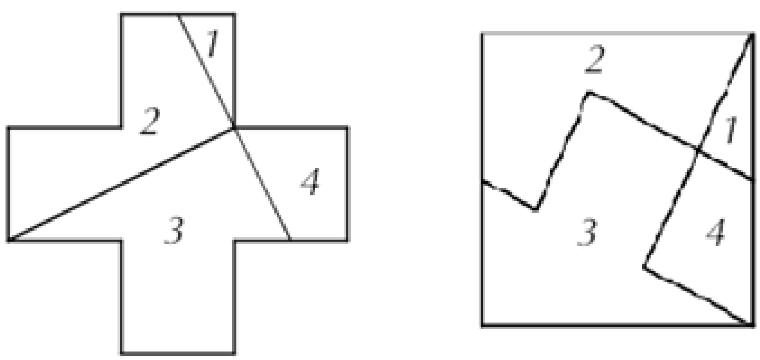
На Поликратово[4] питање колико има ученика Питагора је одговорио: Половина мојих ученика изучава математику, четвртина тајне вечне природе, седмина проводи време у ћутању вежбајући моћ духа. Ако томе додамо још три жене сви ученици су на броју. Толико ја имам ученика.

Када се саберу половина, четвртина и седмина и одузму од целог добије се $3/28$ од целог броја ученика. Пошто је то тачно 3 ученика, онда је број свих ученика 28.

Вредан помена је и Питагорин задатак о деоби правилног крста.

Разрезати крст на четири дела и од тих делова саставити квадрат.

Решење је дато на слици 5.



Слика 5.

На семинару ћемо анализирати и следеће задатке.

Парисов задатак. На једну свадбу грчка богиња раздора Ерида као поклон је донела јабуку са посветом „Најлепшој“. Око тога коме је јабука намењена избио је спор између богиња Афродите, Хере и Атине. Спор је требао да разреши Тројански принц Парис. Од бигиња он је добио следеће ставове:

1 Афродита: Ја сам најлепша.

2 Атина: Афродита није најлепша.

[4] Поликрат је тиранин са сострва Самоса. Живео је у шестом веку пре нове ере.

3 Хера: Ја сам најлепша.

4 Афродита: Хера није најлепша.

5 Атина: Ја сам најлепша.

Парис је претоставио да најлепша увек говори истину, а остале увек лажу. Да ли је Парис на основу претпоставке могао утврдити која богиња је најлепша.

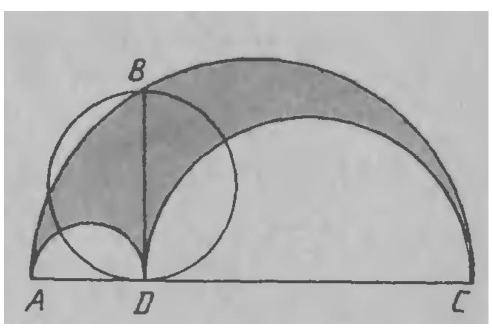
Задатак Дидоне[5]. Нумибијски краљ Јареб је обећао феничанској принцези Дидони да ће јој поклонити максимални део земљишта до обале мора који може ограничити кожом вола.

Задатак о грацијама. Три грације које су имале исти број јабука среле су девет муза. Свака грација је дала свакој од муза исти број јабука. После тога су све грације и све музе имале исти број јабука. Колико је јабука имала свака грација пре сусрета са музама.

Задатак Хипокрита Хиоског[6]. Над хипотенузом правоуглог троугла конструисан је полукруг са исте стране хипотенузе са које је и теме правог угла. Такође су над катетама троугла конструисани са спољашње стране полукругови. Доказати да је збир површина између полукружница над катетама и полукружнице над хипотенузом једнак површини троугла.

Еуклидов задатак о мазги и магарцу. Путем су ишли магарац и мазга носећи џакове. Магарац се јако жалио на свој терет. На то му је мула одговорила. „Зашто плачеш ко девојчица. Када би ја теби дала џак имали бисмо подједнако, а када би ти мени дао џак ја би имала дупло више.“ Колико џакова је носила мазга, а колико магарац?

Архимедов задатак. Доказати да је површина арабелоса (слика 4) једнака површини круга над пречником BD.



Слика 6.

[5] Феничанска принцеза која је основала Картагину.
[6] Хипокрит Хиоски (470-410 пне) старогрчки математичар

Задатак Херона Крај базена постоје 4 извора. Први напуни базен за дан, други за 2 дана, трећи за 3 дана и четврти за 4 дана. За које време базен напуне сва 4 извора истовремено?

Задатак Никомаха[7]. Проверити да ли је тачна формула за сабирање следећих низова непарних бројева: $1=1^3$, $3+5=2^3$, $7+9+11=3^3$, ...

Задатак Диофанта. Производ два броја који су сума два квадрата и сам се може на два начина представити као сума квадрата.

Римски задатак о наслеђу. Један римски аристократа је на самрти издиктирао следећи тестамент. Ако моја жена роди сина, $2/3$ имовине остављам њему, а $1/3$ жени. Ако жена роди кћерку, $2/3$ имања остављам жени, а $1/3$ кћерки. Жена је родила близанце сина и кћерку. Како треба поделити имовину?

3. Задаци Средњег и Далеког истока

Задатак из Математике у 9 књига. Из 3 снопа добре пшенице, 2 средње и једног лоше добије се 39 мера жита. Из 2 снопа доброг, 3 снопа средњег и једног лошег добија се 34 мера жита. Из јеног снопа доброг, 2 средњег и 3 лошег добије се 26 мера жита. Колико се мера жита добије из сваког снопа пшенице?

Задатак Сун-цзи (III-IV век). На гомили је непознат број предмета. Ако их бројимо по тројкама остану 2, ако их бројимо по 5 остане 3, а ако их бројимо по 7 остану 2. Колико предмета је на гомили?

Задатак Чан Цјузана (V век). Петао кошта 5 цјана, кокошка 3, а 3 пилета 1 цјан. За 100 цјана купљено је 100 птица. Колико је међу њима било петлова, кокошака и пилића?

Задатак Апастамбе (IV пре нове ере). Израчунати збир првих n кубова.

Задатак Ариабхате (470-550). Две особе имају једнаке капитале који се састоје из одређеног броја једнаковредних предмета и новца. Количина предмета и новца код сваког појединца се разликују. Израчунати вредност предмета.

Задатак Баскаре I (600-680). Наћи природан број дељив са 7 који при дељењу са 2,3,4,5,6 даје остатак 1.

Задатак Брахмагупте (598-660). Наћи висину свеће ако је дата дужина сенки које она прави на два предмета исте дужине на различитим удаљеностима од свеће.

[7] Никомах (60-120) старогрчки математичар и филозоф

Задатак Магавире (IX век). Наћи број паунова у врту ако шеснаестина њих седи на манговом дрвету а квадрат деветине остатка и још 14 на дрву тамала.

Задатак Магавире 2. Наћи број огрлица које је могуће направити од брилијаната, сафира, смарагда, корала и бисера.

Задатак Баскаре II (1114-1185). Прекрасна лепотице са сјајним очима која знаш метод решавања инверзијом, реци ми број који је прво помножен са 3, затим увећан за 3 четвртине тог производа, подељен са 7 и умањен за трећину количника, затим поможен са самим собом и умањен за 52, а после извлачења квадратног корена и додавања 8 подељен са 10 даје број 2.

Задатак из легенде Историја Морадбалса[8]. Жена је отишла у врт да набере јабуке. У повратку је морала да прође кроз четвора врата на којима је стајао по један стражар. Првом је дала половину јабука. Другоме половину остатка и тако редом. Колико је јабука набрала жена ако је кући донела 10 јабука.

Задатак из 1001 ноћи. Јато голубова долетело је до једног дрвета. Део је слетео на гране, а неколико под дрво. Голуб са гране је рекао голубовима на земљи. Ако би један од вас долетео нама на грану остало би вас три пута мање, а ако би један од нас слетао вама било би нас подједнако. Колико је голубова било на гранама а колико под дрветом?

Задатак Сабита ибн Коре (836-901). Израчунати збир квадрата првих n непарних бројева.

Задатак Абу Камила (850-930). Поделити број 10 на два дела тако да је збир њихових количника једнак $\sqrt{5}$.

Задатак Ал Караџија (X-XI век). Доказати да је сума кубова првих n природних бројева једнака квадрату суме тих бројева.

Задатак Абу Вафе (940-998). Два од три подударна квадрата исећи на 8 делова те од њих и трећег квадрата направити нови квадрат.

Задатак Ибна ал Хасајма (965-1039). Наћи збир биквадрата првих n природних бројева.

Задатак Ибн Сине - Авицене (980-1037). Ако број при дељењу са 9 даје остатак 1 или 8 тада његов квадрат при дељењу са 9 даје остатак 1.

Задатак ал Кашија (XV век). Плата једном раднику за месе дана је 10 динара и одело. Он је радио три дана и зарадио одело. Колика је цена одела?

Задатак ал Кашија 2. Неколико људи је ушло у врт. Први је убрао један нар. Други два нара и сваки следећи нар више од претходног. На крају су све поделили на једнаке делове. Колико је људи било ако је сваки добио 6 нарова?

[8] Персијска легенда

4. Задаци европских математичара

Задатак чешке принцезе Либуше[9]. Либуша је обећала руку једном од тројице просилаца који први реши следећи задатак. У корпи имам извесан број шљива. Ако првом просцу дам половину шљива и још једну, другом половину остатка и још једну, а трећем половину остатка и још три шљиве у корпи неће остати ниједна шљива. Колико је било шљива у корпи?

Задатак Алкуина[10]. Пас се налази на растојању 150 фута од зеца. У једном скоку зец се удаљује од пса 7 фута а пас се једним скоком приближава 9 фута. Када ће пас стићи зеца?

Задатак Јохана Палермског[11]. Пронаћи квадратни рационалан број који увећан и умањен за 5 даје опет рационалан квадратан број.

Задатак Леонарда Пизанског (1180-1240). Једна човек каже другом. Дај ми 7 динара и имаћу 5 пута више од тебе. Други одговара. Дај ти мени 5 динара и имаћу 7 пута више од тебе. Колико је сваки имао новца?

Задатак Адама Ризе (1489-1559). Три трговца би да купе коња по цени од 12 флорина али ниједан нема довољно новца. Први каже другој двојици:"Дајте ми по пола ваших сума и купићу коња". Други каже „Дајте ми по трећину и имаћу за коња". Трећи првој двојици: „Дајте ми по четвртину ваших сума и коњ ће бити мој." Колико сваки од њих има новца?

Диреров (1471-1528) магични квадрат.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Слика 7.

[9] Либуша је према легенди чешка принцеза и пророчица. Сматра се да је у VIII веку основала Праг

[10] Алкуин (535-604.) У Алкуиновој збирци задатака је био и проблем о вуку, кози и купусу.

[11] Јохан Палермски дворски филозоф сицилијанског краља Фридриха II је овај задатак поставио Фибоначију на једном од турнира 1225. године у Пизи.

Магични квадрат Штифела (1489-1559)

16	81	79	77	75	11	13	15	2
78	28	65	63	61	25	27	18	4
76	62	36	53	51	35	30	20	6
74	60	50	40	45	38	32	22	8
9	23	33	39	41	43	49	59	73
10	24	34	44	37	42	48	58	72
12	26	52	29	31	47	46	56	70
14	64	17	19	21	57	55	54	68
80	1	3	5	7	71	69	67	66

Слика 8. Магични квадрат Штифела

Задатак Кеплера (1571-1630). Растојање средишта правог цилиндра од његове најудаљеније тачке је d. Колика је максимална запремина цилиндра?

Задатак Баше де Мезиријака (1587-1638). Поделити 8 мера течности напола помоћу два суда од 3 и 5 мера.

Француски задатак из 17. века. Три особе имају извесне количине новца. Први је дао другој двојици колико сваки од њих има. Затим је други дао првом и трећем по онолико колико имају. Када је и трећи дао првој двојици колико сваки од њих има сви су на крају имали по 8 екија. Колико је сваки имао на почетку?

Њутнов задатак о три ливаде. Три ливаде имају површину 10/3, 10 и 24 хектара. На свакој од њих трава расте равномерно. Прву ливаду попасе 12 крава за 4 недеље, другу 21 крава за 9 недеља. Колико највише крава може пасти трећу ливаду за 18 недеља?

Безуов (1730-1783) задатак. По уговору се раднику исплаћује 48 франака за сваки радни дан, а наплаћује казна 12 франака за нерадни. После 30 дана се ипоставило да раднику не треба са се исплати ниједан франак нити да он дугује послодавцу. Колико дана је радник провео радећи?

Задатак Софи Жермен (1776-1831). Доказати да је број n^4+4 сложен за свако природно n веће од 1.

Задатак Магницког (1669-1739). Наћи број који при дељењу са 2 даје остатак 1, при дељењу са 3 остатак 2, при дељењу са 4 остатак 3 и при дељењу са 5 остатак 4.

Задатак Ојлера (1707-1783). У скупу рационалних бројева решити једначину $x^y = y^x$.

Задатак Паћолија (1445-1514). Троје гађају мету самострелом. Уложили су по 10 дуката, а победник је онај који први погоди мету 6 пута. Решили су да прекину такмичење када је први имао 4, други 3 и трећи 2 поготка. Како да праведно поделе уложени новац?

Позивају се све заинтересоване колеге и колегинице да својим прилозима обогате садржај ове теме. Примере и предлоге можете послати на мејл адресу mzivanovic@vaspks.edu.rs.

БИБЛИОГРАФИЈА

[1] Баврин И. И., Фрибус, Е. А. *Старинные задачи*, Книга для учащихся. Просвещение, 1994. Москва

[2] Болгарский Б.В. *Очерки по истории математики*. 1979. Минск

[3] Глейзер, Г. И. *История математики в школе*: IV – VI кл. Пособие для учителей , Просвещение, 1981. Москва

[4] Глейзер, Г. И. *История математики в школе*: VII – VIII кл. Пособие для учителей , Просвещение, 1982. Москва

[5] Глейзер, Г. И. *История математики в школе*: IX – X кл. Пособие для учителей, Просвещение, 1983. Москва

[6] Дејић, М. Михајиловић, А. *Улога и значај историје математике у настави*, Годишњак Учитељског факултета у Врању, књига VI, 2015.

[7] Живановић, М. *Настава математике у древном Египту*, Синтезе 1/2012, Крушевац

[8] Петковић, М. Занимљиви математички проблеми великих математичара, ДМС, 2008. Београд