Vojislav Andrić
Valjevska gimnazija
voja.andric@gmail.com

O REŠAVANJU PROBLEMA METODOM RAZLIKOVANJA SLUČAJEVA

REZIME:

Metod razlikovanja slučajeva nije mnogo poznat, a ni previše teorijski tretiran u radovima vezanim za metodiku matematike. O metodu razlikovanja slučajeva pisali su u svojim metodičkim radovima V. Andrić (1981, 2001, 2006), Z. Kurnik (2003. i 2010.), Š. Arslanagić (2004.) …

Metod razlikovanja slučajeva pretpostavlja precizno definisanje domena matematičkog zadatka, zatim podelu domena na disjunktne podskupove i rešavanje zadatka u svakom od uočenih disjunktnih podskupova. Medjutim, nije lako napraviti disjunktnu podelu domena zadatka i suština metode razlikovanja slučajeva upravo i jeste u kriterijumima i principima podele domena na disjunktne poskupove.

Zato cilj saopštenja jeste da se na konkretnim primerima ilustruju principi podele domena zadatka na disjunktne podskupove i prikaže univerzalnost primene metoda, jer se metod jednako uspešno može primeniti u svim matematičkim naukama (algebra, geometrija, teorija brojeva, kombinatorika…). Naravno cilj je i da se ilustruju nestandardne situacije u kojima su elementarne metode uglavnom nemoćne.

Ključne reči: *matematika, zadatak, domen, podela, disjunktni, skup, princip.*

1. UVOD

Metod razlikovanja slučajeva je jedan od najeksploatisanijih metoda za rešavanje matematičkih problema. U nekim oblastima, kao na primer u elementarnoj matematici (teoriji brojeva, kombinatorici, algebri, geometriji), on je opšti, ali nije svemoguć, mada je sigurno najčešće korišćen, bilo samostalno, bilo u kombinaciji sa drugim metodama. Zato ćemo, pre izvesnog uopštavanja, metod razlikovanja slučajeva ilustrovati sa nekoliko primera koji se odnose na razne matematičke probleme koji pokazuju šta se sve može koristiti kao instrument za racionalno razlikovanje slučajeva i koje principe pri tom treba imati na umu.

PRIMER 1. *Odrediti sve realne brojeve* x *takve da je* $2^x + 5^x = 641$.

Rešenje: S obzirom da su funkcije $y = 2^x$ i $y = 5^x$ obe rastuće jasno je da za vrednosti promenljive x iz intervala $(-\infty, 0)$ zbir $2^x + 5^x$ ne prelazi 2 i da tu nema rešenja. Kako je $5^4 = 625 < 641$ i $5^5 = 3125 > 641$, nameću se sledeći slučajevi:

1) Ako je $x < 4$, onda je $2^x < 2^4 = 16$ i $5^x < 5^4 = 625$, pa je $2^x + 5^x < 16 + 625 = 641$ i jednačina nema rešenja.
2) Ako je $x = 4$, onda je $2^x = 2^4 = 16$ i $5^x = 5^4 = 625$, pa je $2^x + 5^x = 16 + 625 = 641$ i jedno rešenje jednačine je $x = 4$.
3) Ako je $x > 4$, onda je $2^x > 2^4 = 16$ i $5^x > 5^4 = 625$, pa je $2^x + 5^x > 16 + 625 = 641$ i jednačina nema rešenja.

Dakle, razlikovanjem tri slučaja utvrdili smo da je jedino rešenje jednačine $x = 4$.

PRIMER 2. *Dokazati da ne postoje celi brojevi* x *i* y *takvi da je* $x^2 + y^2 = 2015$.

Rešenje: Razlikujemo dve mogućnosti:

1) Ako su celi brojevi x i y iste parnosti onda su oba parna ili oba neparna, pa je i zbir njihovih kvadrata paran i ne može biti jednak 2015, što znači da jednačina nema rešenja.

2) Ako su celi brojevi x i y različite parnosti, onda postoje celi brojevi k i l takvi da je $x = 2k + 1$ i $y = 2l$. Tada je $x^2 + y^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 = 2015$. To znači da je $4k^2 + 4k + 4l^2 = 2014$. Kako je leva strana jednačine deljiva sa 4, a desna nije, to jednačina ni u ovom slučaju nema rešenja.

PRIMER 3. *Dokazati da nejednakost* $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 > 0$ *važi za svaki realan broj a.*

Rešenje: Struktura polinoma $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1$ nameće razlikovanje slučajeva:

1) Ako je $a \leq 0$, onda je $a^8 \geq 0$, $-a^5 \geq 0$, $a^2 \geq 0$, $-a \geq 0$ i $1 > 0$, pa je njihov zbir $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 \geq 1 > 0$.
2) Ako je $a > 1$, onda je $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 = a^5(a^3 - 1) + a(a - 1) + 1$. Kako je $a^3 - 1 > 0$ i $a - 1 > 0$, to je i $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 = a^5(a^3 - 1) + a(a - 1) + 1 > 0$.
3) Ako je $0 < a \leq 1$, onda je $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 = a^8 + a^2(1 - a^3) + 1 - a$. Kako je $1 - a^3 \geq 0$ i $1 - a \geq 0$, to je $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 = a^8 + a^2(1 - a^3) + 1 - a > 0$.

Na osnovu izloženih primera i njihovih rešenja može se razmotriti i opštiji problem.

2. OPŠTE KARAKTERISTIKE METODA RAZLIKOVANJA SLUČAJEVA

Pretpostavimo da se traži skup svih rešenja problema P $(x, y, z, \ldots)$, gde su $x, y, z, \ldots$ promenljive koje su prisutne u okviru datog problema P.

Neka je S neprazan skup koji predstavlja oblast definisanosti datog problema $P(x, y, z...)$, tj. skup mogućih rešenja problema P.

Metod razlikovanja slučajeva zasniva se na razlaganju skupa S na nekoliko, ali konačno mnogo, konačnih ili beskonačnih podskupova $S_1, S_2 \ldots S_k$ takvih da je $S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k = S$. Dobro je ako su ti skupovi disjunktni, tj. $Si \cap Sj = \varnothing$ za svako $i \neq j$ ($i, j \in N$). Skupovi S_1 , $S_2 \ldots S_k$ mogu biti i nedisjunktni, ali je i tada najvažnije da oni u potpunosti prekrivaju skup mogućih rešenja S.

Metod razlikovanja slučajeva, rešavanje problema P $(x, y, z, \ldots)$ svodi na rešavanje problema $P(x, y, z, \ldots)$ u svakom od skupova $S_1, S_2, \ldots ,S_k$. Neka su $R_1, R_2 \ldots R_k$ skupovi rešenja problema $P(x, y, z, \ldots)$, redom u skupovima $S_1, S_2 \ldots S_k$ (pri čemu neki od skupova R_1, $R_2 \ldots R_k$ mogu biti i prazni). Tada je skup rešenja R problema $P(x, y, z, \ldots)$ unija skupova rešenja R_1, $R_2, \ldots$, R_k , tj. $R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_k$.

To je možda dugotrajniji, ali metodološki lakši posao, jer se skupovi $S_1, S_2 \ldots S_k$ mogu birati tako da rešavanje problema $P(x, y, z, \ldots)$ u njima bude što jednostavnije.

Metod razlikovanja slučajeva je pogodan metod za rešavanje skoro svih vrsta matematičkih problema, ali moć metode ne bi trebalo precenjivati, jer i ona poput drugih metoda sadrži izvesne kreativne poteze, tj. kretanja u pravcu rešenja koja su rezultat matematičke intuicije, sagledavanja problema na sasvim drugi način i često proizvodnje novih i originalnih ideja.

Konkretno, postavlja se pitanje: "Kako razdvojiti slučajeve?"

Razdvajanje slučajeva i jeste najveći problem prilikom primene metode razlikovanja slučajeva jer se ne može unapred odrediti kako razbijati skup S. Međutim, iz prikazanih primera i dosadašnjeg razmatranja, iskustveno se mogu formulisati sledeći metodološki principi:

1. Pri razdvajanju slučajeva, skup potencijalnih rešenja, tj. skup S u potpunosti se prekriva sa konačno mnogo, konačnih ili beskonačnih (po mogućnosti disjunktnih) podskupova $S_1, S_2, \ldots, S_k$ takvih da je $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k = S$ (princip potpunosti). Na taj način se izbegava mogućnost da bilo koje potencijalno rešenje bude izostavljeno.

2. Za metod razlikovanja slučajeva naročito su povoljne dve mogućnosti:

(a) Kada je $R_i = \varnothing$, tj. kada u odabranom podskupu S_i $(1 \le i \le k)$ domena S data jednačina $F(x, y, z, \ldots) = 0$ nema nijedno rešenje i

(b) Kada je $R_j = S_j$, tj u odabranom podskupu S_j $(1 \le j \le k)$ domena S data jednačina $F(x, y, z, \ldots) = 0$ uvek ima rešenja.

Zato pri razlikovanju slučajeva treba uočiti što više podskupova koji zadovoljavaju uslove (a) ili (b), a u ostalim podskupovima tražiti najproduktivniji postupak za rešavanje datog problema P.

3. Prilikom razlikovanja slučajeva i prekrivanja skupa potencijalnih rešenja disjunktnim podskupovima (kad god je to plodotvorno) koristiti logična razbijanja skupa S. U teoriji brojeva najčešće se skup celih brojeva ili neki njegov podskup, razbija: na parne i neparne; na negativne, nulu i pozitivne; na klase ekvivalencija po određenom modulu, … U geometriji se posmatra skup tačaka unutar i izvan kruga, kolinearan i nekolinearan položaj tačaka ... (princip prirodnosti).

4. Metod razlikovanja slučajeva zasniva se na primeni već poznatih matematičkih tvrđenja (Pitagorine teoreme, poznatih nejednakosti, …) koje se kao slučajevi javljaju u rešavanju jednačine R (princip primene).

Metod razlikovanja slučajeva nije svemoguć, niti univerzalan, ali može biti veoma koristan u rešavanju mnogih problema bez obzira da li su oni algebarski, geometrijski, kombinatorni ....

Pri tom, princip 2(a) je od naročitog značaja, jer on služi za eliminaciju slučajeva kada problem nema rešenja, te se na taj način skup potencijalnih rešenja svodi na neku od svojih restrikcija. Ovo je i primarno metodološko uputstvo koje ukazuje na prvi korak u razdvajanju slučajeva, a on je svođenje skupa mogućih rešenja na što manje podskupova.

Za ilustraciju prethodnih principa posmatrajmo jedan veoma jednostavan zadatak, takoreći za sve koji se bave rešavanjem matematičkih problema od 7 do 77 godina.

PRIMER 4. *Date su jednakosti* $* + * = * - * = * \cdot * = ** : *$ *i cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Umesto devet "zvezdica" rasporediti devet datih cifara tako da se svaka cifra upotrebi samo jednom i da sve jednakosti budu tačne.*

Rešenje: Kako skup datih cifara ima tačno 9! različitih rasporeda, za računar dati problem ne bi bio nikakva poteškoća, jer bi adekvatan program tih 9! mogućnosti za čas ispitao i saopštio dobijena rešenja.

A čovek uvek ima dilemu da li da se snagom svoje inteligencije i intuicije uhvati u koštac sa datim problemom ili da napravi program i pusti da mašina odradi svoje?

Naravno da nećemo analizirati svaki slučaj posebno, jer 9! mogućnosti je u principu broj od 362880 mogućih rasporeda i testiranje kada je jednakost tačna pri pretpostavci da se za jedan slučaj potroši samo pola minuta trajalo bi neprekidno 126 dana. Zato predpostavimo da je rezultat operacija $* + * = * - * = * \cdot * = ** : * = x$. I zapitajmo se šta može biti broj x, tj. koja je najmanja, a koja najveća vrednost koju broj x može uzeti?

Najmanja vrednost zbira datih cifara je $1 + 2 = 3$, a najveća moguća vrednost razlike datih cifara je $9 - 1 = 8$, što znači da je za rešavanje datog problema neophodno analizirati samo slučajeve kada x uzima vrednosti iz skupa $\{ 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$.

1) Ako je $x = 3$, onda je $1 + 2 = 1 \cdot 3$, pa nema rešenja jer je cifra 1 upotrebljena dva puta.
2) Kada je $x = 4$, onda je $1 + 3 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$, pa nema rešenja jer je cifra 1 ili cifra 2 upotrebljena dva puta.
3) U slučaju da je $x = 5$, nema rešenja jer je $1 \cdot 5$ jedina mogućnost za proizvod, a količnik 5 se može dobiti samo ako je poslednja cifra deljenika 5 (jer ne može biti 0).
4) Ako je $x = 6$, onda za zbir postoje dve mogućnosti:
   a) $6 = 1 + 5$. Tada je proizvod $2 \cdot 3$, a razlika ili $9 - 3$, ili $8 - 2$, ili $7 - 1$, što nije moguće jer smo cifre 1, 2 i 3 već koristili.
   b) $6 = 2 + 4$. Tada je proizvod $1 \cdot 6$, a razlika $9 - 3$. Za količnik su ostale cifre 5, 7 i 8, od kojih se nijednom kombinacijom ne može dobiti količnik 6 ($58 : 7$ ili $78 : 5$, jer posledwa cifra mora biti parna)
5) Kada je $x = 7$, jedini moguć proizvod je $1 \cdot 7$, a onda jedina moguća razlika $9 - 2$. Tada je jedini mogući zbir $3 + 4$ i za količnik ostaje $56 : 8 = 7$. Dakle imamo jedno rešenje problema.
6) Konačno, ako je $x = 8$, onda je jedina moguća razlika $9 - 1$, pa je proizvod $2 \cdot 4$ i zbir $3 + 5$. Za količnik su ostale cifre 6, 7 i 8 od kojih se ne može dobiti 8.

Dakle jedino rešenje problema je $3 + 4 = 9 - 2 = 1 \cdot 7 = 56 : 8 = 7$.

3. JOŠ NEKI INTERESANTNI PRIMERI PRIMENE METODE RAZLIKOVANJA SLUČAJEVA

Primeri koji slede imaju za cilj da pokažu razgranatu strukturu metode razlikovanja slučajeva, ali i njenu primenu ne samo u elementarnoj algebra i teoriji brojeva, već i u drugim matematičkim disciplinama.

<u>PRIMER 5.</u> *Odrediti koliko ima parova (p,m), gde je p prost, a m ceo broj takvih da je i razlomak* $\dfrac{m^3 - pm + 1}{m^2 + pm + 2}$ *ceo broj.*[1]

Rešenje: S obzirom da je p prost broj kao ključna ideja nameće se razlikovanje slučajeva gde se p posmatra kao paran i kao neparan broj.

1) Ako je $p = 2$, onda se izraz $\dfrac{m^3 - pm + 1}{m^2 + pm + 2} = \dfrac{m^3 - 2m + 1}{m^2 + 2m + 2}$ transformiše u izraz $m - 2 + \dfrac{5}{m^2 + 2m + 2}$. Dobijeni izraz je za celobrojne vrednosti broja m ceo broj u slučajevima kada je $(m^2 + 2m + 2) \in \{ 1, -1, 5, -5 \}$. To znači da je $m^2 + 2m + 1$, tj. $(m + 1)^2 \in \{ 0, -2, 4, -6 \}$. Kako su samo 0 i 4 nenegativni potpuni kvadrati, to je $m + 1 \in \{ 0, 2, -2\}$ i konačno $m \in \{ \in \{ -1, 1, -3 \}$. Dakle, postoje tri para (p, m) koji zadovoljavaju uslove razmatranog slučaja: $(2, -1)$, $(2, 1)$, $(2, -3)$.

2) Ako je $p \geq 3$, onda je prost broj p neparan i opet postoje dva slučaja:
   a) Ako je m paran broj onda je $m^3 - pm + 1$ neparan broj, a $m^2 + pm + 2$ paran broj, pa izraz $\dfrac{m^3 - pm + 1}{m^2 + pm + 2}$ ne može biti celobrojan ni za jednu celobrojnu vrednost m, jer je njegov brojilac neparan, a imenilac paran broj.
   b) Ako je m neparan broj onda je $m^3 - pm + 1$ neparan broj, a $m^2 + pm + 2$ paran broj, pa izraz $\dfrac{m^3 - pm + 1}{m^2 + pm + 2}$ ne može biti celobrojan ni za jednu celobrojnu vrednost m, jer je njegov brojilac neparan, a imenilac paran broj.

Konačno, parovi $(2, -1)$, $(2, 1)$, $(2, -3)$ su jedina rešenja datog problema.

<u>PRIMER 6.</u> Na metodičkom skupu u Puli ima n učesnika. Dokazati da postoje bar dva učesnika metodičkog skupa koji među učesnicima skupa imaju isti broj poznanika.

---

[1] Problem sa prijemnog ispita za Matematičke gimnazije u Srbiji 2015. godine

Rešenje: Posmatraju se dva slučaja, uz napomenu da je relacija “poznanstva” simetrična, tj. ako učesnik skupa A poznaje učesnika B, onda i učesnik B poznaje učesnika A:

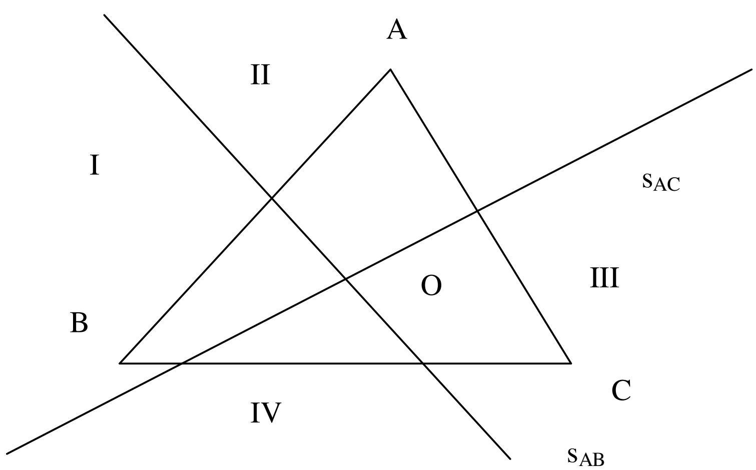
1) Ako postoji učesnik skupa koji poznaje sve učesnike skupa, to znači da ne postoji učesnik skupa koji ima 0 poznanika. Tada se svi učesnici skupa prema broju poznanika mogu razvrstati u klase tako da prvoj klasi pripadaju učesnici sa 1 poznanikom, drugoj klasi učesnici sa 2 poznanika ... $(n-1)$ klasi učesnici sa $n-1$ poznanikom. Kako postoji n učesnika, a $n-1$ klasa, to na osnovu Dirihleovog principa postoje bar dva učesnika koja pripadaju istoj klasi, tj. imaju isti broj poznanika.

2) Ako ne postoji učesnik skupa koji poznaje sve učesnike skupa, to znači da ne postoji učesnik skupa koji ima $n - 1$ poznanika. Tada se svi učesnici skupa prema broju poznanika mogu razvrstati u klase tako da prvoj klasi pripadaju učesnici sa 0 poznanika, drugoj klasi učesnici sa 1 poznanikom ... $(n-1)$ klasi učesnici sa $n-2$ poznanika. Kako opet postoji n učesnika, a $n-1$ klasa, to na osnovu Dirihleovog principa postoje i sada postoje bar dva učesnika skupa koja pripadaju istoj klasi, tj. imaju isti broj poznanika.

__PRIMER 7.__ Neka su A, B i C tačke u ravni takve da za svaku tačku M te ravni ispunjen bar jedan od dva uslova: $AM \le BM$ ili $AM \le CM$. Odrediti međusobni položaj tačaka A, B i C.

Rešenje: Tri tačke A, B i C u ravni mogu biti kolinearne ili nekolinearne.

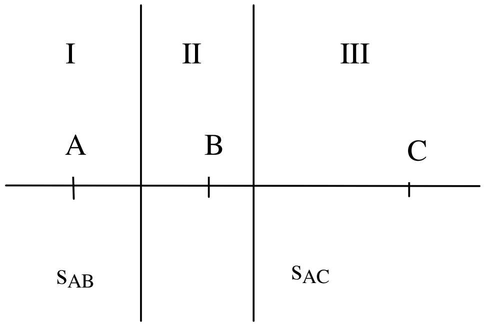
1) Ako su tačke nekolinearne onda grade trougao ABC. Neka su s_{AB} i s_{AC} redom simetrale duži AB i AC. Prave s_{AB} i s_{AC} se seku u tački O (centar opisane kružnice) i dele ravan na 4 oblasti I, II, III i IV (vidi sliku).

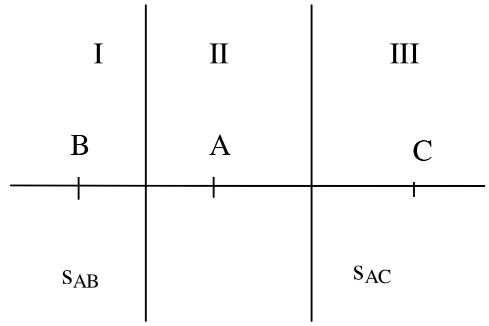


Za svaku tačku M oblasti I ispunjen je uslov $AM \le CM$. U oblasti II su ispunjena oba uslova, tj $AM \le BM$ i $AM \le CM$, dok je u oblasti III ispunjen uslov $AM \le BM$. Za svaku tačku oblasti IV ne važi ni jedan od uslova $AM \le BM$ ili $AM \le CM$. Dakle, tačke A, B i C nisu nekolinearne.

2) Ako su tačke A, B i C kolinearne, a prave s_{AB} i s_{AC} redom simetrale duži AB i AC onda postoji šest mogućih rasporeda koji se mogu svesti na tri moguća slučaja:

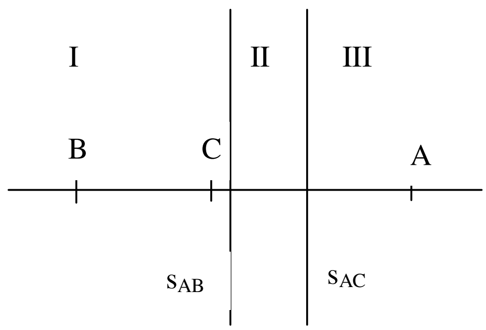
   a) Ako je A – B – C, onda u oblati III nije ispunjen ni jedan od dva uslova.





   b) Ako je B – A – C, onda je u oblasti I ispunjen uslov AM ≤ CM, u oblasti II ispunjena oba uslova AM ≤ BM i AM ≤ CM i u oblasti III ispunjen samo uslov AM ≤ BM.

   c) B – C – A, onda u oblasti I mije ispunjen ni jedan od dva uslova.



Dakle, jedno rešenje je da su tačke A, B i C kolinerane i da se tačka A nalazi izmedju tačaka B i C.

<u>PRIMER 8.</u> *Ako su a i b merni brojevi kateta, a c merni broj hipotenuze pravouglog trougla, odrediti sve vrednosti prirodnog broja n tkao da je* $a^n + b^n < c^n$.

Rešenje: Ako krenemo redom nizom prirodnih brojeva dobijaju se sledeći slučajevi:

1) Ako je $n = 1$, onda je $a + b < c$, što je suprotno nejednakosti trougla.
2) Ako je $n = 2$, onda je $a^2 + b^2 < c^2$, što je suprotno Pitagorinoj teoremi.
3) Ako je n ≥ 3, onda je $a^n + b^n = a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2}$. Kako je $a < c$ i $b < c$, to je $a^n + b^n = a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} < a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} = (a^2 + b^2) \cdot c^{n-2}$. Zbog Pitagorine teoreme je $a^2 + b^2 = c^2$, to je konačno $a^n + b^n < (a^2 + b^2) \cdot c^{n-2} = c^2 \cdot c^{n-2} = c^n$.

Dakle tražena nejednakost važi za sve prirodne brojeve veće ili jednake 3.

4. DIOFANTOVE JEDNAČINE I METOD RAZLIKOVANJA SLUČAJEVA

Oblast Diofantovih jednačina je poligon na kome metod razlikovanja slučajeva nailazi na punu primenu, pri čemu se u prvom koraku Diofantova jednačina pogodno transformiše, a u drugom koraku kao kriterijumi za razdvajanje slučajeva najčešće koriste poslednja cifra, proizvod, zbir, količnik, nejednakost, deljivost, kongruencije … O ovoj bogatoj problematici biće više reči na radionicama, gde će se na karakterističnim primerima prikazati koliko uspešno se metod razlikovanja slučajeva može koristiti za rešavanje Diofantovih jednačina najrazličitijih tipova.

5. LITERATURA

[1] Marica Prešić, Metoda dokazivanja razlikovanjem slučajeva, Časopis "Matematika" broj 3/1979, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[2] Vojislav Andrić, Rešavanje problema metodom razlikovanja slučajeva, Časopis "Matematika" broj 3/1981, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[3] Šefket Arslanagić, Matematika za nadarene, Riječ, Sarajevo, 2004.

[4] Vojislav Andrić, Diofantove jednačine, Društvo matematičara Srbije, Valjevo, 2008.

[5] Zdravko Kurnik, Posebne metode rješavanja matematičkih problema, Element, Zagreb, 2010.