МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Државна комисија за такмичења из математике ученика основних школа

др Зоран Каделбург, Милош Ђорић, Вељко Ћировић

Београд, 12.02.2017.

I део – О такмичењима

1. Увод

Рад са младима је вероватно један од најважнијих, а сигурно најбоље организован вид делатности Друштва математичара Србије, практично од његовог оснивања. Он се одвијао и одвија у више облика – кроз припреме младих математичара и програмера на разним нивоима, на летњим и зимским школама, у оквиру издавачке делатности чији је већи део окренут младима и у, ако не најважнијем, оно сигурно најпознатијем и најатрактивнијем облику – такмичењима.

Такмичења младих математичара Друштво је почело да организује још 1958. године и од тада овај вид активности се усталио и постао незаобилазан облик рада са ученицима. Нећемо претерати ако кажемо да су у поплави разноразних такмичења из многих области која се организују у последње време, такмичења која организује Друштво математичара сигурно и најстарија, и најмасовнија и најбоље организована. У њиховој реализацији, посредно и непосредно, учествују практично сви извођачи наставе из математике и рачунарства у основним и средњим школама, као и они запослени у разним просветним институцијама, а непосредну организацију и контролу изводе Државне комисије за такмичења (има их укупно четири).

Не постоје сасвим прецизни подаци о броју ученика који се такмиче, али сигурно је да на почетним ступњевима, на сва четири вида такмичења укупно, учествује годишње више десетина хиљада такмичара. Кроз оштру селекцију, од школских и општинских тајмичења, преко окружних и државних, до Српских математичких олимпијада долази укупно око 100 најбољих, да би се у олимпијске екипе које представљају Србију на међународним такмичењима из математике и рачунарства пласирало њих 25.

2. Кратак историјат

Друштво математичара Србије је непосредно по устројству такмичења за ученике средњих школа (крајем педесетих година прошлог века) започело са организацијом математичких такмичења ученика основних школа. Шездестих година такмичења су се одвијала на школском, општинском и међуопштинском нивоу. Када су такмичења постигла довољну масовност природно је било отпочети и са републичким такмичењима.

Прво Републичко такмичење из математике за ученике основних школа одржано је 4. јуна 1967. године на Природно-математичком факултету у Београду. Наредних година такмичења су добила на замаху. На 4. Републичком такмичењу 1970. године по први пут осим 65 ученика VIII разреда, учествовало је и 85 ученика VII разреда.

Математичка такмичења су се тих година успешно одвијала и у другим републикама „претходне“ Југославије, тако да је та иста 1970. година карактеристична и по томе што је 14. јуна 1970. године одржано и 1. Савезно такмичење младих математичара Југославије за ученике основних школа. Организатор и дуго затим покровитељ такмичења је био „Математички лист за ученике основних школа“.

Прво републичко такмичење које је одржано ван Београда је било осмо, које је одржано 1974. године у Нишу. Прво савезно такмичење које је организовано ван Београда је било пето, које је одржано у Тузли 1976. године.

Ученици VI разреда укључени су у републичка такмичења почев од 14. такмичења које је реализовано у Аранђеловцу 1980. године. На савезним такмичењима ученици VI разреда су присутни тек од 27. такмичења у Лозници.

У то време су урађени и приручници за додатну наставу математике за V и VI, односно VII и VIII разред. Осмишљавање целог овог система, концепцијска поставка, уређивање приручника и окупљање око свих ових идеја великог броја веома стручних сарадника је велики и немерљив допринос *проф. др Милице Илић-Дајовић*.

Председници Републичких (касније Државних) комисија за такмичења ученика основних школа били су *Богољуб Маринковић*, *Илија Митровић*, *Војислав Андрић*, *др Драгослав Љубић*, *Милан Јовановић*, *др Бранислав Поповић* и *др Зоран Каделбург*.

Важна новина је уведена 1986. године – сваке године се на дан Државног такмичења објављује тзв. Билтен, тачније збирка решених задатака са свих такмичења ученика основних школа одржаних те године.

Осим Математичког листа за ученике основних школа, који је у току свих протеклих година година био један од кључних ослонаца талентованим ученицима и наставницима у припреми за математичка такмичења, доста доприноса дале су и специјализоване збирке задатака са материјалом са претходних такмичења, објављене претежно у едицији *Материјали за младе математичаре*. Посебно се истиче збирка свих решених задатака из 10 протеклих година која се, под разним називима и стално обнављана, објављује од 1997. године и досад је издата у укупно више десетина хиљада примерака.

Друштво математичара Србије је било иницијатор и први организатор *Јуниорских балканских математичких олимпијада*. Прва Балканијада је организована у Београду 1997. године, а председник организационог одбора био је *др Владимир Мићић*. Балканијаде се отада редовно одржавају сваке године, а Србија је била домаћин још два пута (Нови Сад 2004, Београд 2015).

За избор екипе за Балакнијаду у почетку су организована посебна изборна такмичења, обично одмах после Савезног такмичења. Ту улогу су, почев од 2007. године, преузеле Српске математичке олимпијаде на којима учествује двадесетак најуспешнијих ученика страости до 15,5 година (што је горња старосна границе за учешће на Балканијади).

ЗАДАЦИ НА 1. РЕПУБЛИЧКОМ ТАКМИЧЕЊУ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА ОСНОВНИХ ШКОЛА БЕОГРАД – 4. јун 1967.

8. Разред

1. Дат је систем једначина:

$$(2x-3)(y+1)-(x-2)(2y+1)=3m-2$$
$$\frac{x+y}{2}-\frac{2x-y}{6}=m+0{,}5.$$

а) Решити овај систем сматрајући m познатим бројем.

б) Одредити нумеричку вредност за m тако да буде $\dfrac{x}{3}=y-3$.

2. Пољопривредно добро засејало је пшеницом три њиве. Површина прве њиве износи 37% од укупне површине све три њиве, а површине друге и треће њиве односе се као $1\frac{2}{5}:3{,}5$. Површина прве њиве је већа од површине друге њиве за 4,56 хектара. Одредити укупну површину коју је пољопривредно добро засејало пшеницом и површину сваке њиве посебно.

3. Дуж AB има дужину $4\,\mathrm{cm}$. Из крајњих тачака A и B те дужи описане су кружнице полупречником AB. Нека је M једна од њихових пресечних тачака. У тако добијени „криволинијски троугао“ ABM уписана је кружница. Одредити полупречник те уписане кружнице.

4. Комад леда који има облик квадра димензија 0,60 m; 0,60 m и 0,40 m стављен је у цилиндрични суд пречника 90 cm. Колика ће бити висина слоја воде у том суду пошто се лед истопи? Специфична тежина леда је $0{,}92\,\dfrac{\mathrm{G}}{\mathrm{cm}^3}$.

5. Дата је дуж $MN = 2a$.

а) Конструисати полукружницу којој је пречник MN и на њој одредити тачку P која ту полукружницу дели у размери 1 : 2.

б) Израчунати обим и површину троугла MNP у функцији од a.

в) Одредити површину и запремину тела које настаје обртањем троугла MNP око странице MN.

г) Одредити размеру запремина тела која настају обртањем троугла MNP око страница MN и MP.

3. Актуелни систем такмичења

Актуелни систем такмичења је добро познат, па се овде нећемо задржавати на детаљима. Укратко, организују се школска и општинска такмичења (за ученике од 3. до 8. разреда ОШ), окружна (градска) за узраст 4–8. разред, државна (6–8. разред) и, најзад, Српска математичка олимпијада за ученике основних школа на којој учествују ученици 7. и 8. разреда који су остварили најбоље резултате на државном такмичењу, као и ученици 1. разреда средњих школа који нису старији од 15,5 година у тренутку одржавања Јуниорске балканијаде (ово последње јер је то услов на учествовање на ЈБМО).

Број такмичара на прва три ступња такмичења је условљен просторним и техничким условима организације. На државном такмичењу учествује око 300 ученика (по сто из сваког од три разреда), а на ЈСМО њих двадесетак, одређених на основу прецизних правила која прописује Правилник о такмичењима ДМС.

Задатке за све ступњеве такмичења саставља Државна комисија за такмичења из математике ученика основних школа која обично броји 8–10 чланова и коју именује Извршни одбор ДМС. За школско такмичење дозвољено је да школски активи математике саставе своје посебне задатке. Посебно је фиксирано да део задатака на нижим ступњевима такмичења мора да буде на неки начин узет из Математичког листа за ученике основних школа – ово је учињено као помоћ ученицима, од којих се многи по први пут сусрећу са нестандардним такмичарским задацима, а немају одговарајућу помоћ у својим срединама.

Радове ученика на свим такмичењима прегледају одговарајуће такмичарске комисије. Мада Државна комисија уз задатке шаље и скице решења и кратка упутства за бодовање, јасно је да се тако не може обезбедити потпуна униформност критеријума. Уз то су могуће и грешке прегледача, посебно због великог броја такмичара и често доста кратких рокова за прегледање.

Због свега овога је предвиђена и могућност приговора на додељени број бодова. Приговоре прегледају посебно одређене комисије (обично састављене од чланова такмичарских комнисија), с тим да је, бар теоријски, обавезно да сваки приговор прегледа најмање два члана. Често су ученици, или њихови наставници (а још чешће родитељи), незадовољни и одлукама комисија за приговоре, но с обзиром на кратке рокове и чињеницу да такмичења морају да се даље одвијају, предвиђено је да је одговор комисије за приговор коначан. О једном могућем изузетку биће речи у наредном одељку.

4. Неке уведене и неке предложене новине

Систем такмичења се у протеклих 50 и више година непрестано дорађивао и унапређивао. Од такмичења само ученика 7. и 8. разреда (на нижим ступњевима) и само 8. разреда за Републичком такмичењу, дошло се временом до данашње организације која обухвата ученике од 3. до 8. разреда ОШ. Мишљења смо да се ту треба и зауставити, бар када је овај тип такмичења у питању (такмичења ученика млађих узраста су могућа на ревијалном нивоу, какво је нпр. такмичење „Кенгур“).

Једну од великих новина је својевремно представљало увођење могућности приговора (то се десило осамдесетих година прошлог века – пре тога тако нешто није постојало). Колико год је то очигледно потребно и оправдано, због скоро неизбежних грешака комисија при првом прегледању, оваква могућност је постала својеврсна „ноћна мора“ свих такмичарских комисија. Практично је немогуће спречити ученике (као и њихове наставнике и родитеље) да улажу приговоре који су у великој већини случајева неоправдани, али морају бити прегледани. Апели наставницима да саветују ученике да не улажу приговор кад је он очигледно неутемељен углавном немају одјека. Ово је посебно изражено на Државном такмичењу где се очекује да се коначни резултати такмичења објаве у току истог дана када је такмичење одржано. Нажалост, притисак који ствара велики број приговора ствара и могућност недовољно пажљивог прегледања чак и оних приговора где можда постоји потреба за исправком.

Нажалост, постоје ученици, па чак и наставници који ни после образложених (негативних) одговора на њихове приговоре нису убеђени. О једном таквом случају који је стигао и до новина биће речи у приказу задатака са овогодишњег Државног такмичења.

У вези са претходним, ове године је у Правилник унета једна новина за коју тек треба видети како ће изгледати у пракси и да ли ће бити задржана. Наиме, Државна комисија је у протеклих неколико година добијала известан приговора на бодовања задатака на окружним такмичењима. Строго гледано, такве приговоре није требало прегледати, али је тешко било и одбити их када се установило да је заиста учињена грешка која је могла утицати на пласман ученика на Државно такмичење (таквих је случајева обично било неколико, највише 2–3).

С друге стране, Државна комисија је и раније тражила на увид радове свих ученика који су кандидати за пласман на Државно такмичење, но до сада се чинило да нема потребе да се ту врши нека ревизија (у смислу смањивања додељених поена), нити је то било предвиђено Правилником. Међутим, ове године смо запазили неке неочекиване резултате на појединим задацима у појединим окрузима. Детаљним прегледом смо установили да је заиста било неколико случајеве неоправдано много додељених поена.

Због наведеног, ове године су у Правилник унета следеће одреднице:

„Државна комисија има право да достављене радове [са окружних такмичења] поново прегледа и да, у циљу уједначавања критеријума, изврши ревизију додељених поена.“

„На резултате окружног такмичења 6, 7. и 8. разреда могуће је уложити приговор Државној комисији у року од 5 дана од одржавања окружног такмичења. Писмени и образложени приговор може да уложи ученикова школа, а приговор потписује предметни наставник ученика.“

II део – ЗАДАЦИ

У другом делу биће приказана решења изабраних задатака са такмичења основаца у протеклој школској години, и то са Државног такмичења, Српске и Балканске (јуниорске) математичке олимпијаде. Даћемо статистику решивости тих задатака, а осврнућемо се и на типичне грешке ученика, посебно оне због којих је било највише неоправданих приговора.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2016.

VI разред

1. Дијагонале делтоида са његовим страницама заклапају осам углова. Два од тих осам углова су 78° и 43°. Одреди углове делтоида.

2. Нека су $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2015}$ узастопни цели бројеви такви да је

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2013} - a_{2014} + a_{2015} = 2016$$

(наизменично се ређају знакови $+$ и $-$). Израчунај вредност израза

$$\frac{a_{1008}}{4} \cdot \frac{a_{1948}}{a_{866} - a_{127}}.$$

3. На табли су написана два природна броја. Марко је помножио први број са збиром цифара другог и добио број

$$2016201620162016201620162016,$$

а Илија је помножио други број са збиром цифара првог и добио број

$$2017201720172017201720172017.$$

Докажи да је бар један од њих погрешио у рачуну.

4. У равни је дато 27 тачака, таквих да је 7 обојено црвеном, а по 10 плавом и зеленом бојом. Ако међу овим тачкама не постоје 3 тачке које припадају једној правој, колико је одређено троуглова чија су темена обојена са тачно две различите боје?

5. Троугао ABC је оштроугли. Нека су AD и BE висине, H ортоцентар, M средиште странице AB и G средиште дужи CH. Докажи да је права MG симетрала дужи DE.

VII разред

6. Нека су a, b и c цифре такве да је један од двоцифрених бројева $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ и $\overline{ca}$ аритметичка средина друга два. Докажи да је $a = b = c$.

7. На једном шаховском турниру сваки играч је играо са сваким другим играчем по две партије. Познато је да су непосредно пред почетак турнира два или три играча отказала учешће, па је одиграно тачно 84 партије мање него што је планирано. Колико играча је остало на турниру?

8. Одреди све тројке позитивних реалних бројева a, b и c такве да је

$$abc = 1 \quad \text{и} \quad ab + bc + ca + a + b + c = 6.$$

9. Нека су A' и B' подножја нормала из крајњих тачака A и B пречника AB датог круга k на произвољну тангенту тог круга. Докажи да је збир дужи $AA' + BB'$ константан, тј. да не зависи од избора тангенте.

10. Дат је квадрат $ABCD$ странице a. На страници AB дата је тачка E таква да је $AE : EB = 2 : 1$. Нека је F произвољна тачка дијагонале BD. Докажи да је

$$AF + EF \geqslant \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

VIII разред

11. Одреди све природне бројеве n такве да је

$$2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n$$

квадрат неког природног броја.

12. Одреди непознати број $\overline{xyzt}$ ако за његове цифре важе следеће једнакости:

$$xt + zt = 18, \quad xz + tz = 8, \quad xz + xt = 14, \quad x \cdot y \cdot z \cdot t = 0.$$

13. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је запремина $1000\,\mathrm{cm}^3$. Нека су E, F, G, H, I, J редом средишта ивица $BC, CD,\ DD_1, D_1A_1,\ A_1B_1, B_1B$.

а) Докажи да тачке E, F, G, H, I, J припадају једној равни.

б) Израчунај површину и запремину пирамиде $AEFGHIJ$.

14. Перица и Јоца су ушли у учионицу и видели да је на табли написано

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

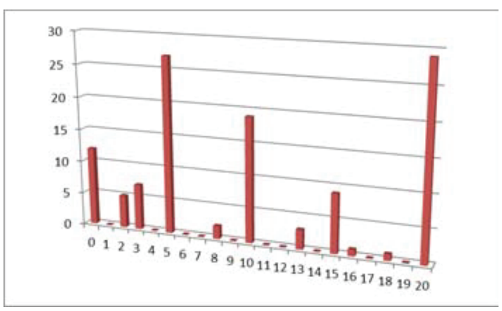
Они су се договорили да играју следећу игру. Наизменично ће брисати слова тог записа, при чему се једним потезом може избрисати само неколико истих слова (бар једно и не морају сва иста слова да се избришу). Победник је играч који избрише последње слово. Перица почиње први. Који играч има победничку стратегију?

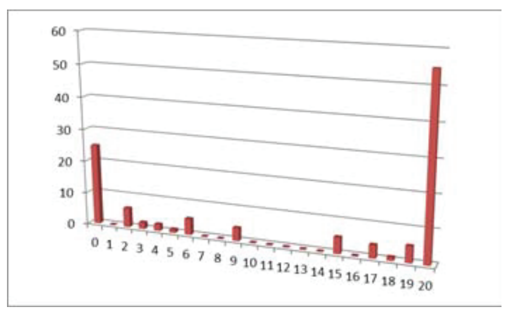
15. Права p садржи ортоцентар H оштроуглог троугла ABC и сече његове странице AB и CA, при чему страницу CA у тачки P. Права q такође садржи тачку H, нормална је на p и сече странице AB и BC, при чему страницу BC у тачки Q. Права кроз A паралелна са q и права кроз B паралелна са p секу се у тачки R. Докажи да су тачке P, Q и R колинеарне.

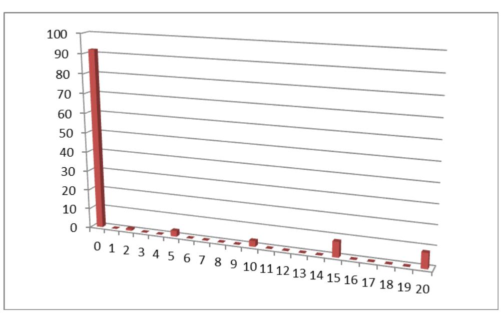
Статистика решивости задатака и дистрибуција поена

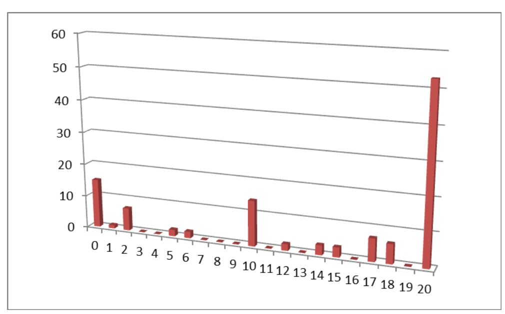
6. разред

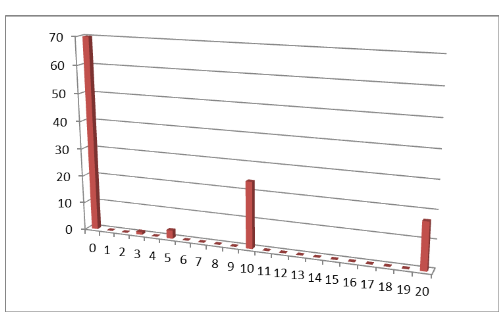
задатак	1.	2.	3.	4.	5.	Укупно
бодови	10,09	12,63	2,84	13,7	5,2	44,46





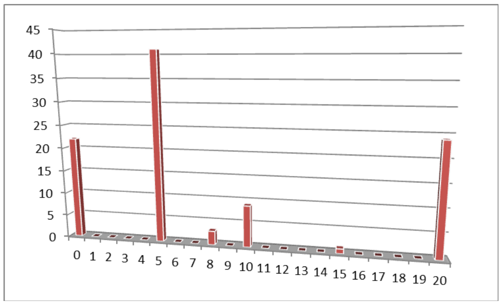


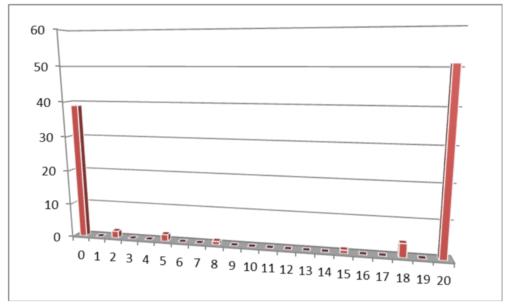


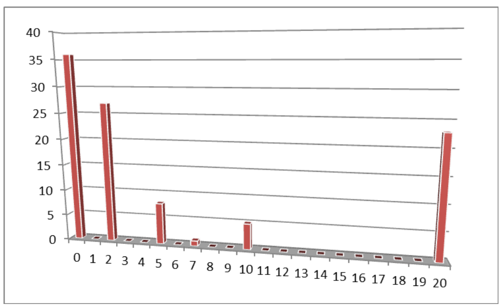


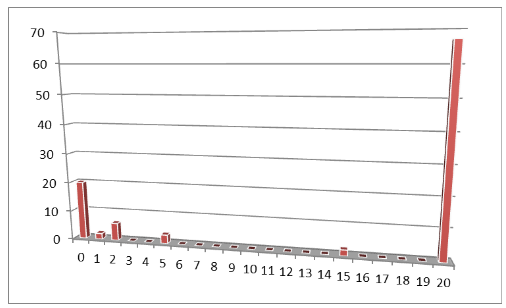
7. разред

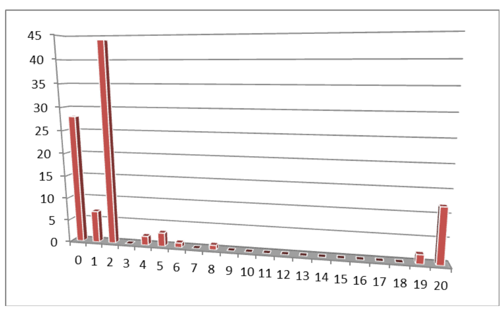
задатак	1.	2.	3.	4.	5.	Укупно
бодови	8,14	11,29	6,11	13,99	4,1	43,63





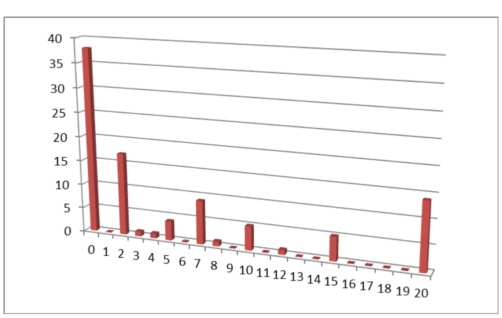


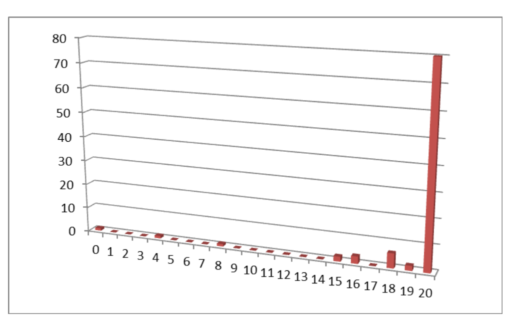


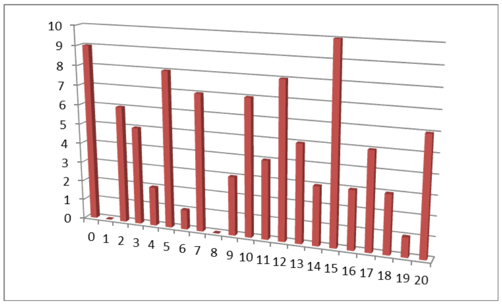


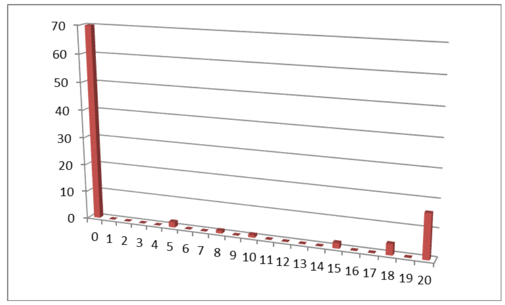
8. разред

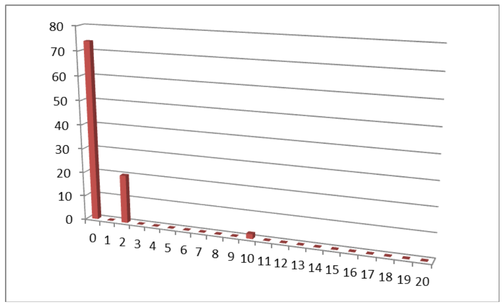
задатак	1.	2.	3.	4.	5.	Укупно
бодови	5,72	19,13	9,9	4,69	0,62	40,06











ДЕСЕТА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

16. Дат је троугао ABC са правим углом код темена C. Нека је D подножје висине троугла из темена C, а k кружница која додирује дуж BD у тачки E, дуж CD у тачки F и описану кружницу троугла ABC у тачки G.

а) Доказати да су тачке A, F и G колинеарне.

б) Изразити полупречник кружнице k у зависности од дужина страница датог троугла ABC.

17. Одредити минимални број делилаца који у скупу природних бројева може имати број облика $|2016^m - 36^n|$, где су m и n природни бројеви.

18. У два суседна поља (димензија 1×1) квадратне табле 10×10 налази се благо. Перица треба да погоди која су то поља. Једним потезом он може да изабере неко поље табле и да добије информацију да ли се у њему налази благо или не. Одредити минимални број потеза који је, уз одговарајућу стратегију, увек довољан да Перица са сигурношћу одреди поља у којима се благо налази.

19. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c важи неједнакост

$$\frac{2a}{\sqrt{3a+b}} + \frac{2b}{\sqrt{3b+c}} + \frac{2c}{\sqrt{3c+a}} \leqslant \sqrt{3(a+b+c)}.$$

Додатно изборно такмичење

20. Доказати да за све позитивне реалне бројеве x, y, z важи неједнакост

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{z-y}{x} + \frac{x-z}{y} + \frac{y-x}{z} + 3.$$

21. Унутар троугла ABC одабрана је произвољна тачка X. Праве AX, BX, CX по други пут секу кружницу описану око троугла ABC редом у тачкама P, Q, R. Нека је K произвољна тачка дужи XP. Праве кроз K паралелне са AB и AC секу редом XQ и XR у тачкама M и N. Доказати да тачке R, Q, M и N припадају једој кружници.

22. Одредити све природне бројеве a, b, c такве да важи

$$2001^a + 15^b = 2016^c.$$

ДВАДЕСЕТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Слатина (Румунија), 2016.

23. Трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) описан је око кружнице. Уписана кружница троугла ABC додирује странице AB и AC у тачкама M и N, редом. Доказати да центар уписане кружнице трапеза $ABCD$ припада дужи MN.

24. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c важи неједнакост

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}.$$

25. Одредити све тројке (a, b, c) целих бројева такве да је број

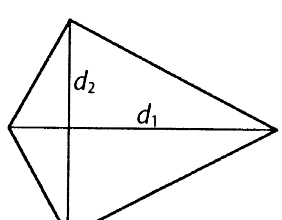
$$N=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$$

степен броја 2016 са ненегативним изложиоцем.

26. За табелу 5×5 кажемо да је *регуларна* ако свако њено поље садржи један од четири дата међусобно различита реална броја, таква да се сваки од њих појављује тачно једном у свакој 2×2 подтабели. Збир свих бројева у регуларној табели зове се *укупан збир* те табеле. За свака четири броја конструисане су све могуће регуларне табеле и израчунати њихови укупни збирови. Одредити максимални могући број резултата.

Решења

1. Разликујемо 4 случаја према томе која од дијагонала заклапа који угао (са једном страницом делтоида).



Сл. уз зад. 1

Први случај. Оба угла су на дијагонали d_1 (слика). Тада су два угла $2 \cdot 78^\circ = 156^\circ$ и $2 \cdot 43^\circ = 86^\circ$, а друга два су једнака и износе $(360^\circ - (156^\circ + 86^\circ)) : 2 = 59^\circ$.

Други случај. Оба угла су на дијагонали d_2. Тада имамо два једнака угла $78^\circ + 43^\circ = 121^\circ$, а главна дијагонала са страницама заклапа углове од $90^\circ - 78^\circ = 12^\circ$ и $90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$ па су углови код крајева главне дијагонале од 24° и 94°.

Трећи случај. Угао од 78° је на дијагонали d_1, а угао од 43° на дијагонали d_2. Други угао на дијагонали d_1 биће 47°, а на дијагонали d_2 12°, па су углови делтоида: 156°, 94°, 55°, 55°.

Четврти случај. Угао од 43° је на дијагонали d_1, а угао од 78° на дијагонали d_2. Други угао на дијагонали d_1 биће 12°, а на дијагонали d_2 47°, па су углови делтоида: 86°, 24°, 125°, 125°.

2. Како су бројеви узастопни, то је $a_1 - a_2 = a_3 - a_4 = \cdots = a_{2013} - a_{2014} = -1$. Зато је $-1007 + a_{2015} = 2016$, одакле је $a_{2015} = 3023$, па је $a_1 = 1009$ и важи $a_{1008} = 1009 + 1007 = 2016$.

Аналогно је $a_{1948} = 2956$, $a_{866} - a_{127} = 865 - 126 = 739$, а вредност траженог израза је

$$\frac{a_{1008}}{4} \cdot \frac{a_{1948}}{a_{866} - a_{127}} = \frac{2016}{4} \cdot \frac{2956}{739} = 2016.$$

3. Нека су a и b дати бројеви, а $s(a)$ и $s(b)$ редом збирови њихових цифара. Приметимо да је број $as(b) = 201620162016201620162016$ дељив са 9 (јер му је збир цифара дељив са 9), а број $bs(a) = 201720172017201720172017$ није дељив са 9 (јер му је збир цифара 60). Ако је Марков рачун тачан, онда или је један од бројева a и b дељив са 9 или су оба дељива са 3. И у једном и у другом случају је и $bs(a)$ дељив са 9, што је контрадикција.

4. Троуглове чија су темена обојена у тачно две боје, од три дате, можемо поделити у три групе тако да у свакој од њих буду они који имају по две темена једне боје, а треће теме је обојено једном од преостале две боје. Размотримо одговарајуће случајеве.

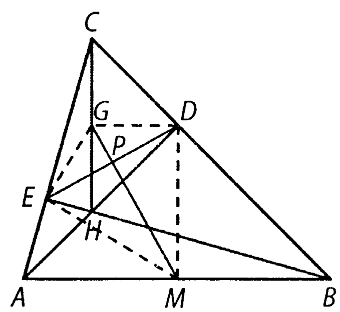
1° [троуглови чија су два темена црвена, а треће било које друге боје] Број различитих избора два темена црвене боје исти је као и број дужи одређених тачкама те боје, а то је $(7 \cdot 6) : 2 = 21$. Треће теме може бити одабрано на 20 различитих начина. Дакле, таквих троуглова има $21 \cdot 20 = 420$.

2° [троуглови чија су два темена плаве, а треће било које друге боје] Темена плаве боје можемо одабрати на $(10 \cdot 9) : 2 = 45$ начина, а треће теме на 17 начина. Дакле, таквих троуглова има $45 \cdot 17 = 765$.

3° [троуглови чија су два темена зелене, а треће било које друге боје] На исти начин као у случају 2° се добија да постоји 765 таквих троуглова.

Дакле, укупан број тражених троуглова је $420 + 765 + 765 = 1950$.

5. Како је M средиште заједничке хипотенузе правоуглих троуглова ABE и ABD, то су дужи ME и MD једнаке као полупречници описаних кружница око ових троуглова. Аналогно из правоуглих троуглова CHE и CHD, дужи GE и GD су једнаке јер је G средиште хипотенузе. Дакле, обе тачке M и G су подједнако удаљене од крајева дужи DE, те оне одређују њену симетралу.



Сл. уз зад. 5

6. *Прво решење.* Због симетричности израза можемо, не смањујуи општост, претпоставити да је $a \leqslant b \leqslant c$. Ако је притом $a < b = c$, онда је $ab < ca < bc$, па је $\overline{ca} = \overline{ba}$ аритметичка средина бројева $\overline{ab}$ и $\overline{bc} = \overline{bb}$, тј. $2 \cdot \overline{ba} = \overline{ab} + \overline{bb}$, односно $20b + 2a = 10a + 12b$, одакле је $a = b$, супротно претпоставци. У осталим могућим случајевима $\overline{bc}$ ће бити аритметичка средина друга два броја, тј. $2 \cdot \overline{bc} = \overline{ab} + \overline{ca}$, односно $20b + 2c = 11a + 10c + b$, тј. $19b = 11a + 8c$. С обзиром да су b и c већи или једнаки од a, можемо ставити да је $b = a + d$ и $c = a + e$, где су d и e једноцифрени бројеви. Имамо $19(a + d) = 11a + 8(a + e)$, дакле $19d = 8e$. Одавде $19 \mid 8e$, па је $e = 0$. Сада је $a \leqslant b \leqslant c = a + e = a$, па је $a = b = c$.

Друго решење. Претпоставимо да је, на пример, $2 \cdot \overline{bc} = \overline{ab} + \overline{ca}$ (остали случајеви се разматрају на исти начин). Као у првом решењу се добија да мора да важи $19b = 11a + 8c$, односно $19b - 11a = 8c$. Како је десна страна претходне једнакости дељива са 8, то мора бити и лева. У наредним таблицама су дати остаци бројева $11a$ и $19b$ при дељењу са 8 (у зависности од вредности цифара a и b):

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$11a$	3	6	1	4	7	2	5	0	3

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$19a$	3	6	1	4	7	2	5	0	3

Видимо да бројеви $19b$ и $11a$ дају исти остатак при дељењу са 8 (што је неопходно да би $19b - 11a$ било дељиво са 8) само у случају када је $a = b$ (а тада је очигледно и $c = a = b$). Случајеви $a = 1$, $b = 9$, односно $a = 9$, $b = 1$ дају немогуће вредности за c.

7. Да је на турниру играло n играча, било би одиграно $n(n-1)$ партија. Турнир је одигран са мање играча него што је планирано, па је одиграно $(n-2)(n-3)$ партија ако су одустала два играча или $(n-3)(n-4)$ партија ако су одустала три. У првом случају, из

$$n(n-1)-(n-2)(n-3)=n^2-n-(n^2-5n+6)=4n-6=84$$

је $n=22{,}5$. У другом случају, из

$$n(n-1)-(n-3)(n-4)=n^2-n-(n^2-7n+12)=6n-12=84$$

је $n=16$. Дакле, први случај одбацујемо, а из другог закључујемо да је на турниру остало 13 играча.

8. *Прво решење.* Заменом $ab=\dfrac{1}{c}$, $bc=\dfrac{1}{a}$, $ca=\dfrac{1}{b}$ и $6=2+2+2$ добијамо да је

$$\begin{aligned}ab+bc+ca+a+b+c-6&=a-2+\frac{1}{a}+b-2+\frac{1}{b}+c-2+\frac{1}{c}\\&=\Big(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\Big)^2+\Big(\sqrt{b}-\frac{1}{\sqrt{b}}\Big)^2+\Big(\sqrt{c}-\frac{1}{\sqrt{c}}\Big)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

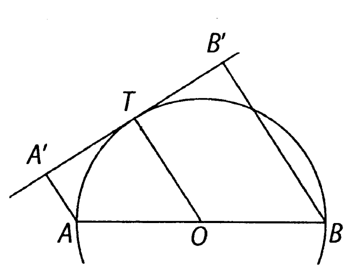
при чему једнакост важи само када су сви сабирци једнаки нули, а то је могуће само за $a=b=c=1$.

Друго решење. Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине за бројеве ab, bc, ca, a, b, c добијамо да важи

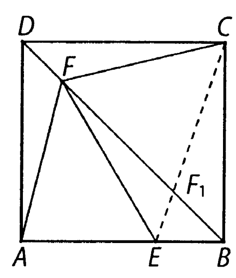
$$\frac{ab+bc+ca+a+b+c}{6}\geqslant\sqrt[6]{ab\cdot bc\cdot ca\cdot a\cdot b\cdot c}=\sqrt[6]{a^3b^3c^3}=\sqrt[6]{1}=1,$$

тј. $ab+bc+ca+a+b+c\geqslant 6$. Како, по претпоставци, у претходној неједнакости мора да важи једнакост, то су бројеви ab, bc, ca, a, b, c једнаки међу собом, па је $a=b=c=1$.

9. Из услова задатка је $AA'\perp A'B'$ и $BB'\perp A'B'$ па је четвороугао $ABB'A'$ правоугли трапез (слика). Означимо са O центар круга, а са T тачку у којој тангента додирује круг ($OT=r$ је полупречник круга). Како је тангента нормална на полупречник круга у тачки додира, то је и $OT\perp A'B'$. Сада је $AA'\parallel BB'\parallel OT$. Како је O средиште дужи AB, то је OT средња линија трапеза и важи $AA'+BB'=2OT=2r$. Дакле, тражени збир не зависи од избора тангенте и једнак је пречнику круга.



Сл. уз зад. 9



Сл. уз зад. 10

10. Због симетричности квадрата у односу на дијагоналу BD је $AF=CF$ (слика). Зато је збир $AF+FE$ најмањи када је збир $CF+FE$ најмањи. То се постиже за $\{F\}=\{F_1\}=CE\cap BD$. Из $AE:EB=2:1$ добијамо $EB=\dfrac{a}{3}$. Сада је

$$AF+FE\geqslant CE=\sqrt{\Big(\frac{a}{3}\Big)^2+a^2}=\frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

11. Дати број се може записати као $A=3^{14}\cdot(2^4\cdot 3^2+5^2)+3^n=169\cdot 3^{14}+3^n$. Размотримо три могућа случаја.

1) $n < 14$. Ако би било $A = 3^n \cdot (169 \cdot 3^{14-n} + 1) = x^2$ за неки природан број x, морали би 3^n и $169 \cdot 3^{14-n} + 1$ да буду квадрати (јер су узајамно прости). Међутим, тада би n морао да буде паран број, а како је број $169 \cdot 3^{14-n} + 1$ паран, он би могао да буде квадрат само ако је дељив са 4. Он то није јер се лако проверава да (за парно n) при дељењу са 4 даје остатак 2.

2) $n = 14$. Непосредно се види да $3^{14} \cdot (169 + 1)$ није квадрат природног броја.

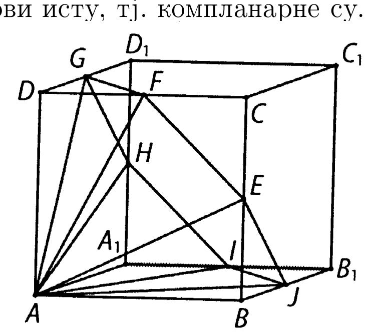
3) $n > 14$. Сада треба да буде $A = 3^{14} \cdot (169 + 3^{n-14}) = x^2$, па и $169 + 3^{n-14} = y^2$. Одатле је $3^{n-14} = (y-13)(y+13)$. Како се бројеви $y-13$ и $y+13$ разликују за 26, не могу оба бити степени тројке, изузев у случају када је $y - 13 = 1$, $y + 13 = 27$ (тј. $y = 14$). Директно се проверава да је $n = 14 + 3 = 17$ (једино) решење задатка.

12. Из прве три једнакости закључујемо да цифре x, z и t морају бити различите од 0, па је из четврте једнакости $y = 0$.

Сабирањем прве три једнакости добијамо $xz + xt + zt = 20$. Сада се једноставно добија $xz = 2$, $xt = 12$ и $zt = 6$ $(*)$. Множењем последње три једначине добијамо $(xzt)^2 = 144$, одакле је $xzt = 12$. Из последње једнакости и $(*)$ је $x = 2$, $z = 1$ и $t = 6$. Тражени број је 2016.

13. а) Дужи AE, AF, AG, AH, AI, AJ као и дужи C_1E, C_1F, C_1G, C_1H, C_1I, C_1J су хипотенузе правоуглих троуглова чије су катете једнаке ивици односно половини ивице коцке (слика). То значи да су тачке E, F, G, H, I, J подједнако удаљене од тачака A и C_1, односно да се налазе у равни која је нормална на дијагоналу AC_1 и полови исту, тј. компланарне су.

б) Наведених шест тачака су темена правилног шестоугла и једна страница тог шестоугла је $\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Висина пирамиде је половина дијагонале коцке, тј. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Дужина апотеме је три четвртине дијагонале квадрата (стране коцке) и износи $h = \dfrac{15}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Запремина пирамиде је $375\,\mathrm{cm}^3$, а површина $75(3 + \sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 13

14. Перица (први играч) има победничку стратегију. Он првим потезом брише пет слова А (којих има 6). На табли остају по 3 слова И и М, по два слова К, П, С и Т и по једно слово А, Д, Е, Ј, Л, О, Р и Ч. Затим изврши спаривање слова, тако да се оба слова у оквиру истог пара јављају исти број пута. Даље одговара симетрично – ако Јоца избрише један или више примерака једног слова, Перица ради то исто са другим словом из истог пара.

15. Нека је M пресек правих AR и HP, а N пресек правих BR и HQ. Тврђење задатка добијамо уколико докажемо да су правоугли троуглови MPR и NRQ слични, што је еквивалентно са

$$(*) \qquad \frac{MP}{MR} = \frac{NR}{NQ}.$$

Четвороугао $MHNR$ је правоугаоник, па је $MR = NH$ и $NR = MH$. Означимо оштар угао који права p гради са страницом AB са x. Узимајући у обзир да праве p и q садрже ортоцентар H, тада се лако рачуна да троуглови AMP и BNH имају углове $\alpha - 90^\circ + x$, 90° и $180^\circ - \alpha - x$, те су зато слични. Из те сличности следи

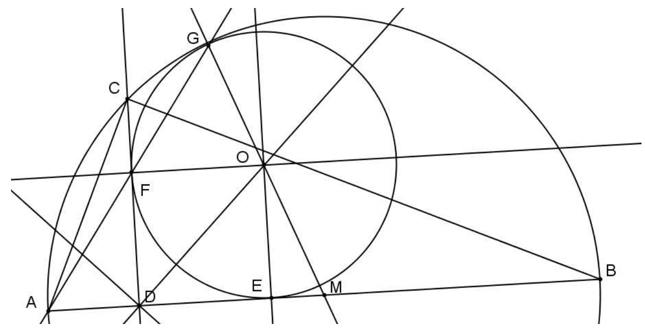
$$\left(\frac{MP}{MR} = \right) \; \frac{MP}{NH} = \frac{AM}{BN},$$

а, на аналоган начин, из сличности троуглова BNQ и AMH следи

$$\left(\frac{NR}{NQ} = \right) \; \frac{MH}{NQ} = \frac{AM}{BN}.$$

Из последње две једннакости следи једнакост $(*)$, па и тврђење задатка.

16. (а) Нека је M средиште хипотенузе AB троугла ABC (слика). Тада су тачке M, O, G колинеарне. Како је $OF \perp CD$ и $AB \perp CD$, то је $OF \parallel AB$, па је $\measuredangle AMG = \measuredangle FOG$. Дакле, троуглови AMG и FOG, који су једнакокраки, имају једнаке углове при врху, па следи да је $\measuredangle MGA = \measuredangle OGF$. Следи да су тачке A, F и G колинеарне.



Сл. уз зад. 16

(б) Ако је r тражени полупречник, тада важи $OM = \dfrac{c}{2} - r$, $ME = |AE - \dfrac{c}{2}| = |AD + r - \dfrac{c}{2}| = |AD - OM|$, $AD = \dfrac{b^2}{c}$. Из Питагорине теореме примењене на $\triangle OME$ добијамо $OM^2 = r^2 + (AD - OM)^2$, па је

$$r^2 = 2AD \cdot OM - AD^2 = \frac{a^2b^2}{c^2} - \frac{2rb^2}{c}.$$

Сада је $\left(r + \dfrac{b^2}{c}\right)^2 = \dfrac{a^2b^2}{c^2} + \dfrac{b^4}{c^2} = b^2$, одакле је $r = b - \dfrac{b^2}{c} = \dfrac{b(c-b)}{c}$.

17. Очигледно је да је дати број, за произвољне m и n, дељив са 4 и 9. Како се бројеви 2016^m и 36^n увек завршавају са 6, дати број се завршава нулом, тј. дељив је и са 5. Значи, он је облика $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ или $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot P$, где је $a, b \geqslant 2$, $c \geqslant 1$, а P је производ неких простих бројева различитих од 2, 3 и 5.

Како $2^5 \mid 2016$, једина могућност да буде $a = b = 2$ јесте када је $n = 1$. Но, тада је дати број или облика $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^c$ са $c \geqslant 4$, или је облика $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^c \cdot P$. У првом случају је број његових природних делилаца најмање $(2+1)(2+1)(4+1) = 45$, а у другом је најмање $(2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 36$.

Размотримо случај $n \geqslant 2$. Тада је $a \geqslant 4$, па је тражени број делилаца најмање $(4+1)(2+1)(1+1) = 30$, при чему се та вредност постиже да $m = 1$, $n = 2$ јер тада добијамо број $2016 - 36^2 = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Дакле, тражени минимални број делилаца је 30.

18. Докажимо да је Перици потребно бар 50 потеза да би сигурно одредио поља са благом. Поделимо дату таблу најпре на 50 „хоризонталних“ правоугаоника 2×1. Било који број потеза мањи од 50 би значио да Перица није проверио ниједно поље бар једног од тих правоугаоника. Слично важи ако је табла подељена на одговарајуће „вертикалне“ правоугаонике. Како се „хоризонтални“ и „вертикални“ правоугаоник не могу поклопити, значи да постоје бар две могућности за суседна поља у којима се налази благо, па Перица не може са сигурношћу рећи која су то поља.

Докажимо да је наведени број потеза довољан. Обојимо поља табле црно-бело на шаховски начин – свакако, поља с благом су једно бело и једно црно. Даље ћемо разликовати три врсте поља: „централна“ (она која нису на рубу табле, њих има $8^2 = 64$, од чега 32 црна), 4 угаона и преостала ивична поља (њих има $4 \cdot 8 = 32$, од тога 16 црних). Перица прво проверава сва црна централна поља. Ако међу њима нађе поље с благом, онда му је довољно да провери 3 од његова 4 суседна бела поља. Дакле, у овом случају је извео највише $32 + 3 < 50$ потеза. Ако Перица не нађе поље с благом међу црним централним пољима, онда проверава црна ивична поља. Ако међу њима нађе поље с благом, онда му је за налажење другог поља довољно да провери 2 од његова 3 суседна бела поља. Укупан број изведених потеза је највише $32+16+2=50$. Најзад, ако не нађе црно поље с благом ни међу ивичним, тада је сигурно да је такво једно од два црна угаона. Бира произвољно од њих – ако погоди, онда је довољно да провери једно од два његова суседна бела поља; ако не, значи да је тражено црно поље оно друго угаоно, па је опет довољно да провери једно од његових суседних белих. Број изведених потеза је исти као у претходном случају.

19. Применом Коши-Шварцове неједнакости на бројеве $\sqrt{\dfrac{2a}{3a+b}}$, $\sqrt{\dfrac{2b}{3b+c}}$, $\sqrt{\dfrac{2c}{3c+a}}$, односно $\sqrt{2a}$, $\sqrt{2b}$, $\sqrt{2c}$, добија се неједнакост

$$\left(\frac{2a}{\sqrt{3a+b}}+\frac{2b}{\sqrt{3b+c}}+\frac{2c}{\sqrt{3c+a}}\right)^2 \leqslant 4\left(\frac{a}{3a+b}+\frac{b}{3b+c}+\frac{c}{3c+a}\right)(a+b+c).$$

Неједнакост која се доказује ће зато следити ако се докаже да увек важи

$$\frac{a}{3a+b}+\frac{b}{3b+c}+\frac{c}{3c+a}\leqslant\frac{3}{4}.$$

Проширивањем првог разломка на левој страни последње неједнакости са $1/a$, другог са $1/b$ и трећег са $1/c$, та неједнакост добија еквивалентни облик

$$\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3+y}+\frac{1}{3+z}\leqslant\frac{3}{4},$$

где је означено $x=\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{b}$, $z=\dfrac{a}{c}$ (и, дакле, важи $xyz=1$). Након ослобађања од именилаца и сређивања, ова неједнакост постаје

$$3(x+y+z)+5(xy+yz+zx)\geqslant 24.$$

Ово, пак, следи из неједнакости $x+y+z\geqslant 3$ и $xy+yz+zx\geqslant 3$ које се добијају (због услова $xyz=1$) из неједнакости између аритметичке и геометријске средине, примењене на бројеве x,y,z, односно xy,yz,zx.

20. *Прво решење.* Полазећи од неједнакости $\dfrac{(x+y)(x-y)^2}{xy^2}\geqslant 0$ која очигледно важи за све позитивне реалне бројеве, добијамо неједнакост

$$\frac{x^2}{y^2}\geqslant 1+\frac{x}{y}-\frac{y}{x}.$$

Аналогно се добијају и неједнакости $\dfrac{y^2}{z^2}\geqslant 1+\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{y}$ и $\dfrac{z^2}{x^2}\geqslant 1+\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{z}$. Сабирањем последње три неједнакости добијамо неједнакост која се доказује.

Друго решење. Означимо $\dfrac{x}{y}=a$, $\dfrac{y}{z}=b$, $\dfrac{z}{x}=c$ (тада је $abc=1$). На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо да важе неједнакости $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3$ и $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c}}=3$, а на основу неједнакости између квадратне и аритметичке средине да важи $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2$. Зато је

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &\geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)(a+b+c)\\
&\geqslant \frac{1}{3}\cdot 3(a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-3\right)\\
&\geqslant a+b+c-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+3,
\end{aligned}$$

што је на други начин записана неједнакост која се доказује.

21. Из услова датих у задатку добијамо да важи $\measuredangle APR = \measuredangle ACR = \measuredangle KNC$, одакле следи да је четвороугао $PKNR$ тетиван. На исти начин добијамо да је и четвороугао $PQMK$ тетиван. Сада, користећи потенцију тачке X у односу на описане кружнице ових троуглова (или из сличности одговарајућих троуглова) имамо $XN \cdot XR = XK \cdot XP$ и $XK \cdot XP = XM \cdot XQ$. Одатле је $XN \cdot XR = XM \cdot XQ$, па следи да је четвороугао $QRNM$ тетиван.

22. Претпоставимо да природни бројеви a, b, c задовољавају дату једначину. Како је $2001^a \equiv 1^a \equiv 1 \pmod 4$, $15^b \equiv (-1)^b \pmod 4$ и $2016^c \equiv 0 \pmod 4$, то број b мора бити непаран. Слично, из $2001^a \equiv (-1)^a \pmod 7$, $15^b \equiv 1^b \equiv 1 \pmod 7$ и $2016^c \equiv 0 \pmod 7$ следи да број a мора бити непаран. Како су 3^a, 3^b и 3^{2c} највећи степени тројке који, редом, деле бројеве 2001^a, 15^b и 2016^c, најмања два међу њима морају бити једнаки (евентуално, могу сва три да буду једнака). Како су a и b непарни, не може да важи $a = 2c$ ни $b = 2c$, па је $a = b$ и, при томе, $a = b < 2c$. Ако ово уврстимо у дату једначину, добијамо

$$(*) \qquad 2001^a + 15^a = 2016^c.$$

Очигледно решење ове једначине је $a = c = 1$ (при томе, ако је један од бројева a, c једнак један, онда је то и други). Докажимо да је ово решење и једино.

Први начин. Ако је $a > 1$ и $c > 1$, с обзиром да је број a непаран, растављањем израза на левој страни и скраћивањем са 2016, добијамо

$$2001^{a-1} - 2001^{a-2} \cdot 15 + \cdots - 2001 \cdot 15^{a-1} + 15^a = 2016^{c-1}$$

(на левој страни има непаран број сабирака). Десна страна добијене једнакости је дељива са 2016, а лева то није, чиме добијамо контрадикцију.

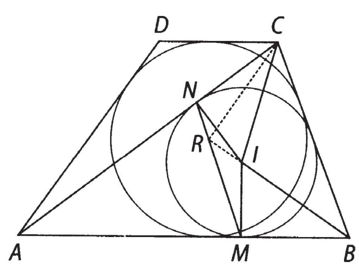
Други начин. Посматрајући једначину $(*)$ по модулу 13 добијамо да мора бити $a = 12k+1$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Затим, посматрајући ту једначину по модулу 9, добијамо да је $c = 6k+1$. После скраћивања добија се једначина $667^a + 5^a = 672 \cdot 224^a$. Њено једино решење је $a = 1$, јер је за $a > 1$ очигледно $672 \cdot 224^a < 667^a < 667^a + 5^a$.

Једино решење дате једначине је $a = b = c = 1$.

23. Нека је I центар уписаног круга троугла ABC и нека је R тачка пресека правих BI и MN (слика). Како је $\measuredangle ANM = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle MAN$ и $\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle MAN$, четвороугао $IRNC$ је тетиван. Следи да је $\measuredangle BRC = 90^\circ$ и зато је

$$\measuredangle BCR = 90^\circ - \measuredangle CBR = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle BCD) = \frac{1}{2}\measuredangle BCD.$$

Следи да је полуправа CR симетрала угла DCB, па је тачка R центар уписаног круга датог трапеза, што доказује тврђење задатка.



Сл. уз зад. 23

24. Из очигледне неједнакости $2ab \leqslant a^2 + b^2$ следи да је $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, као и $4abc \leqslant 2c(a^2+b^2)$. Сабирањем последње две неједнакости добијамо да је $(a+b)^2 + 4abc \leqslant 2(a^2+b^2)(c+1)$, а одатле је

$$(1) \qquad \frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} \geqslant \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)}.$$

Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине добијамо да је

$$(2) \qquad \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)} + \frac{a^2+b^2}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{2}{c+1}} = \frac{4}{\sqrt{2(c+1)}},$$

као и $\dfrac{c+3}{8} = \dfrac{(c+1)+2}{8} \geqslant \dfrac{\sqrt{2(c+1)}}{4}$, тј.

(3) $$\frac{4}{\sqrt{2(c+1)}} \geqslant \frac{8}{c+3}.$$

Из (2) и (3) следи да је $\dfrac{4}{(a^2+b^2)(c+1)} + \dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant \dfrac{8}{c+3}$, што заједно са (1) даје

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} + \frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{8}{c+3}.$$

Сабирањем последње неједнакости са две аналогне неједнакости добијене цикличном заменом променљивих a, b, c, добија се неједнакост која се доказује.

25. Претпоставимо да за неке целе бројеве a, b, c и ненегативан цео број n важи

$$(a-b)(b-c)(c-a) + 4 = 2 \cdot 2016^n.$$

Размотримо најпре случај $n > 0$ и означимо $a - b = -x$, $b - c = -y$. Тада се претходна једнакост записује као

$$xy(x+y) + 4 = 2 \cdot 2016^n.$$

Како је лева страна ове једнакости дељива са 7, то мора бити и десна, тј.

(∗) $$xy(x+y) + 4 \equiv 0 \pmod 7,$$

одакле је $3xy(x+y) \equiv 2 \pmod 7$ и $(x+y)^3 - x^3 - y^3 \equiv 2 \pmod 7$. Лако се проверава да су, при дељењу са 7, могући остаци кубова целих бројева -1, 0 и 1. Одатле следи да један од бројева $(x+y)^3$, x^3, y^3 мора бити дељив са 7, па то важи и за број $xy(x+y)$, што је у супротности са (∗).

Дакле, остаје једина могућност $n = 0$, тј. једначина $xy(x+y) + 4 = 2$, односно $xy(x+y) = -2$. Њена решења су $(x, y) \in \{(-1,-1), (2,-1), (-1,2)\}$. Сва решења полазне једначине су $(a, b, c) = (k+2, k+1, k)$, $k \in \mathbf{Z}$ и њихове цикличне пермутације.

26. Показаћемо да је тражени максимални број међусобно различитих укупних збирова једнак 60. Докажимо најпре следеће помоћно тврђење.

Лема. У свакој регуларној табели или свака врста садржи тачно два од датих бројева или свака колона садржи тачно два од тих бројева.

Доказ леме. Нека су дати бројеви x, y, z, t. Претпоставимо да постоји врста V која садржи најмање три од тих бројева. Тада у тој врсти можемо наћи три броја, на пример, x, y, z, на узастопним позицијама у врсти. Према претпоставци да се у свакој подтабели 2×2 сваки број јавља тачно једном, у врсти изнад V (ако таква постоји) тачно изнад бројева x, y, z морају бити бројеви z, t, x, тим редом. Изнад бројева z, t, x опет морају бити x, y, z, тим редом. Слично важи и за врсте које се налазе испод врсте V:

$$\begin{bmatrix} * & x & y & z & * \\ * & z & t & x & * \\ * & x & y & z & * \\ * & z & t & x & * \\ * & x & y & z & * \end{bmatrix}$$

Попуњавајући на овај начин целу табелу, видимо да свака њена колона садржи тачно два од датих бројева, чиме је лема доказана.

Ротирајући табелу (ако је потребно), можемо претпоставити да свака врста садржи тачно два различита броја. Ако изоставимо прву врсту V_1 и прву колону K_1, добијамо табелу 4×4 коју можемо поделити на 4 подтабеле 2×2 у којима се сваки број јавља тачно једном, па је укупан збир у њима $4(x+y+z+t)$. Преостаје да одредимо на колико различитих начина можемо уписати бројеве у врсту V_1 и колону K_1.

Ако са x_1, y_1, z_1, t_1 означимо број појављивања бројева x, y, z, t, редом, у V_1 и K_1, тада укупан збир бројева у табели 5×5 износи

$$S = 4(x + y + z + t) + x_1 \cdot x + y_1 \cdot y + z_1 \cdot y + z_1 \cdot z + t_1 \cdot t.$$

Ако прва, трећа и пета врста садрже бројеве x и y, где је x број на позицији $(1, 1)$, онда друга и четврта врста садрже само бројеве z и t, где је са z означен број на позицији $(2, 1)$ (друга врста, прва колона). Тада је $x_1 + y_1 = 7$, $x_1 \geqslant 3$, $y_1 \geqslant 2$, $z_1 + t_1 = 2$ и $z_1 \geqslant t_1$, па је $(\{x_1, y_1\} = \{5, 2\}$ и $\{z_1, t_1\} = \{2, 0\})$ или $(\{x_1, y_1\} = \{4, 3\}$ и $\{z_1, t_1\} = \{1, 1\})$. Дакле, четворка (x_1, y_1, z_1, t_1) је пермутација једне од следећих четворки

$$(5, 2, 2, 0), \quad (5, 2, 1, 1), \quad (4, 3, 2, 0), \quad (4, 3, 1, 1).$$

Постоји по 12 пермутација прве, друге и четврте од тих четворки, а 24 пермутација четворке $(4, 3, 2, 0)$. Дакле, постоји 60 могућих различитих укупних збирова.

Покажимо још да се свака од 60 комбинација заиста може добити. Можемо узети три врсте облика $xyxyx$ наизменично са $ztztz$ да бисмо добили случај $(5, 2, 2, 0)$; затим 3 врсте $xyxyx$ наизменично са једном врстом $ztztz$ и једном врстом $tztzt$ да бисмо добили случај $(5, 2, 1, 1)$. Случај $(4, 3, 2, 0)$ добијамо помоћу 3 врсте $xyxyz$ наизменично са $ztztx$, а случај $(4, 3, 1, 1)$ помоћу 3 врсте $xyztx$ наизменично са $ztxyz$. Узимајући, на пример, $x = 10^3$, $y = 10^2$, $z = 10$, $t = 1$, можемо све укупне збирове учинити различитим.

Дакле, 60 је максимални могући број различитих укупних збирова.

III део

ДИСКУСИЈА

ЛИТЕРАТУРА

1. *1100 задатака*, Материјали за младе математичаре, свеска 54 (друго издање), Друштво математичара Србије, Београд, 2016.
2. Збирка задатака са математичких такмичења ученика основних школа школске 2015/16 године, ДМС, Београд 2016
3. 50 година Друштва математичара Србије, ДМС, Београд 1998.