ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

РЕПУБЛИЧКИ СЕМИНАР 2016.

др Војислав Андрић
Иванка Томић

О РАЗВИЈАЊУ КРЕАТИВНОСТИ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

БЕОГРАД,

14.02.2016.

КОЛИКО ЈЕ ВИСОК ТОРАЊ?

Научник Murrau Gell-Mann, добитник Нобелове награде за физику и велики заљубљеник у математику, прича о незгодама једног ученика средње школе који у Сједињеним Државама морао да полаже испит из физике да би био примљен на факултет.

Асистент-професор пита ученика:
''*Како ћеш измерити висину торња помоћу барометра?*

Младић одговара:
''У џепу имам клупко конца, вежем барометар за то клупко, попнем се на торањ и спустим барометар, а затим измерим дужину конца.''

" Пао си!",
немилосрдно одговара асистент-професор.

Он је од ученика очекивао овакав одговор: барометар мери притисак, а притисак се мења са висином (јер је притисак ваздуха на живу различит). На сваких десет и по метара жива се спушта за 1 милиметар; па ако је притисак на земљи 760 мм, а 757 на врху торња, то значи следеће: 760 - 757 = 3; 10,5 х 3 = 31,5! Одговор је – торањ је висок 31,5 метар.

Ученик се ипак није предао. Обратио се вишим органима и допуштено му је да још једном изађе на испит. Овог пута га је испитао лично професор Gell-Mann.

Обратио се ученику овако:
''*Заборавимо шта је било на прошлом испиту. Исто питање: Ево барометра, овде напољу је торањ, реци ми како ћеш да измериш висину торња барометром.''*

Ученик се замислио часак, направио белешке и изјавио:
''*Нашао сам 21 решење па сад не знам које је најбоље!''*

Gell-Mann, изненађен, затражи од ученика да наброји сва решења.

Младић почне:
''Прво решење: ставићу барометар на земљу уз зид торња, направићу зарез на зиду на врху барометра, онда ћу барометар поставити на зарез, па направити нови зарез и тако даље - док не дођем до врха.
Друго решење: чекаћу Сунце, ставићу барометар на земљу, измерићу његову сенку па упоредити са сенком торња и тако ћу одредити висину на начин као је то урадио Талес.
Треће решење: попећу се на врх торња с хронометром, бацићу барометар, измерити време па - по формули закона о сили теже и убрзању - израчунати висину торња.
Четврто решење: израчунаћу висину по паду притиска ... (Решење које је други професор тражио).
Пето... шесто... решење...
А на крају је и двадесет и прво решење, које можда није одвећ поштено. Отићи ћу до чувара торња, показати му барометар и дати му га под условом да ми каже колико је торањ висок!''

Ко је овде кративан, наш ученик или професор који се ухватио закона о обрнутој пропорцији висине и притиска и не допушта друга решења?

О РАЗВИЈАЊУ КРЕАТИВНОСТИ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ [1]

1. УВОД

Основни захтев послодаваца (у најширем смислу те речи) према едукаторима данас је несумњиво иновативност ученика, па се од образовног система очекује да младе људе оспособи за креативно обављање својих, најчешће флексибилно дефинисаних, професионалних обавеза без обзира да ли се ради о пословима у области привреде, финансија, администрације, образовања или неким другим делатностима. Зато су стваралачке способности, иницијативност и сарадња оне особине личности од којих значајно зависи иновативно понашање сваког појединца у обављању својих професионалних задатака.

Развијање креативности кроз наставни процес није немогућ, али ни мало лак посао. При том се приличи домети у овој области с правом очекују и од математике као наставног предмета који има добар наставни континуитет, али и могућности широке примене у свакодневном животу. Међутим, фрагментарна истраживања наставне праксе показују да се у нашим школама, а мислимо да је слична ситуација и у окружењу, проблему развијања креативности у настави математике (и уопште) не посвећује довољна пажња.

Циљ овог текста је да усмери пажњу наставника математике на овај проблем, укаже на психолошке основе креативности, прикаже неке проблемске ситуације у којима је могуће креативно исказивање ученика, нагласи улогу дијалога, игре и истраживачког рада ученика као активних наставних метода за подстицање креативности ученика и предложи извесне принципе које треба применити да би се као резултат добила извесна, узрасту примерена креација ученика.

2. О КРЕАТИВНОСТИ

Креативност (стваралаштво) је појам који се у научно-техничкој литератури користи на сличан начин као и у свакодневном језику и подразумева менталне процесе којима се долази до нових идеја, појмова, решења проблема, уметничких дела, научних теорија, производа ... који су јединствени и нови.

Креативност је активност која даје нове, оригиналне "производе", било у материјалној или духовној сфери, при чему се ти производи не могу приписати имитацији или репродукцији већ раније постојећих "производа" или поступака, јер су од њих битно другачији. Ти нови "производи", настали креативним процесом, боље, успешније и рационалније задовољавају индивидуалне и друштвене потребе од раније постојећих производа.

[1] Овај текст представља резултат рада на пројекту „Од подстицања иницијативе, сарадње и стваралаштва у образовању до нових улога и идентитета у друштву“ број 179034 (2011-2015), чију реализацију финансира Министарство просвете и науке Републике Србије.

Сам појам креативности карактеришу дилеме у његовом дефинисању, али се ипак, као особине које несумњиво указују на креативност узимају два елемента:

1. креативни појединац који *уочава*, види, доживљава, комбинује ствари и појаве на нов, свеж, неуобичајен начин;
2. креативни појединац који *производи* нове, неуобичајене, другачије идеје и дела.

У смислу претходног неки сматрају да је креативан само онај појединац који производи, а не само уочава (креативност = стваралаштво), док други мисле да је способност уочавања необичног (као нпр. код хумора) барем знак креативност (креативност = особина). У покушајима расветљавања појма креативности, начињена је и подела на креативност с "малим к" и с "великим К" [2]. У том смислу:

- "креативна" (мало к) су она деца која самостално откривају правила и техничке вештине одређеног подручја, уз минимално вођство одраслих, и измишљају необичне стратегије за решавање проблема.
- "Креативност" (велико К), подразумева ширење, мењање или чак трансформацију подручја, што укључује велику базу знања и искуства (помиње се и тзв. "десетогодишње правило" - тврдња да за пробој у неком подручју треба бар десет година напорног рада), и сматра се да деца не могу бити креативна на овај начин.

Оваквим погледима на креативност је покушао доскочити Irvin Taylor[3]. Тејлоров модел би се могао објаснити на следећи начин: ако дете повлачи црте по папиру, оно није створило друштвено вредан "производ", али је ипак нешто створило. Зато је Тејлор креативност разврстао у пет нивоа:

1. креативност спонтане активности, (1-6 г.);
2. креативност усмерене активности (7 - 10 г.),
3. креативност инвенције (11-15 г.),
4. креативност иновације (16-17 г.),
5. креативност стварања (18+).

Дакле, прва четири ниво су за мало к, а задњи за велико К. Дакако, деца нису ни уметници ни научници (изузев у случају креативног стварања).

Обдарене особе које нису креативне, у узрасту одраслог третирају се као стручњаци. Стручност није креативност. Стручњаци остварују високе резултате у оквиру свог подручја, али само креативне особе мењају то подручје. Занимљив пример овде чине тзв. деца генији, тј. она деца с екстремно развијеним талентом. Иако деца генији блистају у детињству, без креативности сваки геније на крају постаје бивши геније. Да би наставили с остваривањем креативних постигнућа, генији морају научити како да пуку техничку вештину трансформишу у нешто концептуалније, интерпретативније и оригиналније [2]. Задивљујућа реалистичност дечјег цртежа за правог уметника постаје обична ствар. Креативност у математици подразумева постављање нових проблема, решавање оних који до сада нису решени или решавање старих проблема на нов и ефикаснији начин. Често су потребне животне препреке и жртве како би се остварио прелаз од стручњака до ствараоца.

---

[2] Видети: Winner, Ellen (2005): Darovita deca, Lekenik, Ostvarenje d.o.o.

[3] Irvin Taylor, професор неурохирургије Краљевског UCL Универзитета у Лондону

Истраживања потврђују да су за креативност потребне и одређене карактерне особине, као што су самосталност, необазирање на мишљење околине и храброст за преузимањем ризика. Живот по друштвеним правилима креативнима није приоритет. Они се не труде да сваком угоде и често негирају и оспоравају традициоанлно утврђене поступке. Коефицијенат интелигенције (IQ) није нужно повезан с креативношћу.

Већ педесетак година изводе се бројна педагошка и психолошка истраживања чији је циљ да се добију одговори на три суштинска питања:

1. каква је природа креативности,
2. може ли се и како креативност мерити и
3. може ли се и како креативност научити, тренирати, неговати.

За истраживање креативности највеће заслуге припадају америчком психологу Joy Paulu Guilfordu. Гилфорд је психолог који је заступао идеје тродимензионалне структуре интелекта и сматра да мишљење може бити - конвергентно (логичко закључивање, тражење тачног решења) и дивергентно (стварање нових идеја, уживање у процесу тражења, трагање за што већим бројем тачних решења). Дивергентно мишљење имају креативне особе. Особе које користе конвергентно мишљење, иако интелигентне, могу бити и нетолерантне: сматрају како постоји исправан и неисправан начин решавања задатка. Студент са почетка наше приче дивергентно размишља, његов асистент-професор, очигледно, конвергентно.

Гилфорд утврђује следеће факторе дивергентног мишљења:

1. <u>Флексибилност</u> - способност производње многих релевантних идеја, брзо проналажење што више решења неког проблема, тј. способност да се лако напусте већ уходани путеви;
2. <u>Флуентност ума</u> - способност обраде информација и објеката на различите начине, могућност симултаног сагледавања различитих могућности, што више категорија, једном речју способност располагања богатством идеја;
3. <u>Оригиналност</u> - способност производње ретких или сасвим нових идеја, долажење до идеја које се разликују од осталих људи;
4. <u>Елаборација</u> - способност украшавања идеја детаљима што више детаља у одговорима, тј. разрађивање оригиналне идеје у детаље;

Поред наведених фактора, за креативност су значајни и следећи фактори који се не убрајају у дивергентне:

5. <u>Осетљивост за проблеме</u> - способност да се уоче недостаци или потребе за променама или побољшањима у постојећим стварима, тј. способност откривања и увиђања проблема;

6. <u>Редефиниција</u> - способност напуштања старих начина тумачења познатих предмета како би се користили у нове сврхе, тј. нова употреба постојећих садржаја.

На Гилфордовим темељима развијани су тестови и програми за идентификацију и развој креативности. Важно је напоменути да креативност није знање, већ способност. <u>У дидактичком систему развијање креативности не припада материјалним задацима наставе, већ функционалним.</u> Креативност је повезана са интелектуалним особинама појединца, његовим знањима и вештинама, али и са начином на који је његово знање структуирано и како се оно користи.

КРЕАТИВНОСТ (СТВАРАЛАШТВО)

МЕСТО СТВАРАЛАШТВА У ОБРАЗОВНОМ ПРОЦЕСУ

ОБРАЗОВАЊЕ
(квалитет личности одређен знањем и способностима)

ЗНАЊЕ
(материјални задаци)

ЧИЊЕНИЦЕ
(конкретно)

ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈЕ
(апстрактно)

СПОСОБНОСТИ
(функционални задаци)

СЕНЗОРНЕ, ПРАКТИЧНЕ,
ИЗРАЖАЈНЕ, ИНТЕЛЕКТУАЛНЕ

МИШЉЕЊЕ
(процес захваћања односа и веза)

КОНВЕРГЕНТНО
(логичко закључивање)

ДИВЕРГЕНТНО
(стварање нових идеја)

Истраживања показују да се људи у извесној мери могу напредовати у креативном мишљењу, што може бити повезано с уклањањем препрека креативном мишљењу, као што су нпр. различити облици мисаоних стереотипа, као и с усвајањем креативних хеуристичких техника, као што су нпр. анализа случаја и истраживање аналогија кад се односе на изузетке из уобичајених правила, затим структурирањем познатих идеја и знања тако да изгледају стране или необичне итд. Дакле, креативност се не може научити, већ само увежбавати, попут спорта. Више тренинга омогућава боље резултате. Али, гледајући ово тврђење обрнуто, може се установити поражавајућа чињеница: већина људи заправо не решава проблеме размишљајући, већ наученим знањем које им је на располагању. Пошто је немогуће поседовати знања за све хипотетичке ситуације које појединца очекују у животу, наслућујемо да стереотипна употреба стечених знања које појединац има на располагању није увек продуктивна и да је у таквим ситуацијама, када се тражи нестандардно решење, креативност неопходна.

Стваралачко мишљење јавља се у друштвима у којима постоји потреба за открићима, изумима, иновацијама, али и уметничким и другим креативним "производима". Нека су историјска раздобља обиловала открићима и уметничким остварењима: античка цивилизација, ренесанса, научно - техничка револуција која је почела крајем 19. века и све се више убрзава. У нелим историјским раздобљима открића потискивана, тј. прописивани су дозвољени облици стваралачког рада у многим подручјима (нпр. средњи век, радикални комунизам).

Особине креативног мисаоног процеса посебно се истичу у науци и уметности, тј. у детаљима из живота научника и уметника, у описима њиховог начина рада, те у особинама њихових мисаоних креација. Неке од тих посебности су на пример:

- Богатство нових, иновативних мисаоних садржаја и "производа" (нпр. животна дела проналазача попут Едисона или Тесле; научника попут Аристотела или Ајнштајна; уметника попут Моцарта, Родина или Ван Гога).
- Игра или неозбиљност у схватању важећих норми, стандарда, стереотипова, култова и културе (нпр. Семјуел Бекет и театар апсурда, Франц Кафка и његова дела, Клод Моне и импресионизам, Енди Ворхол и поп-арт)
- Аутономност креативних личности (Тесла, Верди, Велс, Галилеј ...)
- Велики стваралачки потенцијал и енергија (Аристотел, Микеланђело, Гете, Бах, Хегел)
- Интелектуалне способности и знања (интелигенција, имагинација, истраживачка способност, иноваторство, способност организације и управљања, стручно знање).

3. КРЕАТИВНОСТ И НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

Ако се анализира место неговања стваралаштва у настави математике, онда морамо признати да се овом проблему не посвећује довољна пажња. У овом делу текста анализираћемо неке ситуације у наставном процесу у којима је могућ рад на развијању стваралачких способности ученика, тако што ћемо констатовати облик исказивања стваралаштва (и облик дивергентног мишљења по датој Гилфордовој класификацији), његову манифестацију, тј. објашњење како се зашто се наведена стваралачка активност испољава и узраст на коме је могуће у тој сфери у настави математике нешто учинити.

Шта је у суштини стваралачки рад у области математике?

У настави математике стваралачки рад се најчешће огледа у следећим активностима:

РБ	Облик исказивања стваралачких способности	Манифестација	Узраст
1.	Решавање проблема по аналогији (осетљивост за проблеме) [4]	За дати проблем ученик уочава неочигледну сличност са већ виђеним проблемима и истим методама решава дати проблем	Млађи Старији Средњошколски
2.	Решавање проблема на више различитих начина (флексибилност)	Ученик показује способност да један математички проблем реши коришћењем две или више различитих идеја	Млађи Старији Средњошколски
3.	Нестандардно решавање познатих проблема (оригиналност)	За већ виђени проблем за који наставник и литература препоручују познати поступак, ученик налази своје нестандардно решење	Млађи Старији Средњошколски
4.	Оригинално решавање непознатих проблема (оригиналност)	Ученик успева да самостално реши проблем који до тада никада није видео, и то оригинално	Млађи Старији Средњошколски

[4] Неки од облика исказивања стваралачких способности понекад подразумевају комбинацију два или више аспеката дивергентног мишљења

5.	Логичко – комбинаторна способност (флуентност ума)	Поједини проблеми не захтевају познавање математичких теорија, већ систематичност, добру логику и комбинаторни таленат	Млађи Старији Средњошколски
6.	Формулисање оригиналних проблема (оригиналност)	Ученик на основу добре овладаности изучаваном проблематиком успева да формулише нове, занимљиве и оригиналне проблеме	Млађи Старији Средњошколски
7.	Инверзно решавање проблема (флуентност ума)	Ученик креће од исхода проблема и његовом реконструкцијом корак по корак, враћа се на почетно, а тражено стање	Старији, Средњошколски
8.	Оповргавање нетачних хипотеза (осетљивост за проблеме)	Ученик лако проналази контра-пример и на тај начин оповргава нетачно формулисану хипотезу	Старији Средњошколски
9.	Генерализација (осетљивост за проблеме)	На основу неколико појединачних примера уочава се и доказује извесна математичка правилност или законитост	Старији Средњошколски
10.	Уочавање инваријантности (флуентност ума)	Вештина да се у датом проблему уочи извесна непромењивост и на основу тога проблем реши	Старији Средњошколски
11.	Способност брзог утврђивања егистенције решења проблема (флуентност ума)	Често је неопходно брзо утврдити да ли дати проблем има или нема решења. Способност да се то осети, докаже ... указује на стваралаштво	Старији Средњошколски
12.	Конструкција математичког објекта који задовољава дате сложене услове (елаборација)	Од ученика се очекује способност да одреди број, геометријску фигуру ... математички објекат који испуњава одређене и не баш једноставне услове	Старији Средњошколски
13.	Директна, али неочигледна примени математичких теорема, правила, тврђења ... (редефиниција)	Јасно је да се ради о примени одређене теореме, али њена примена није тривијална, јер тражи одређена прилагођавања, трансформације ...	Старији Средњошколски
14.	Индиректна и нестандардна примени математичких теорема, правила, тврђења (редефиниција)	Проблем не указује на примену одређене теореме, али се његовом трансформацијом препознаје суштина и тражи одговарајуће, а познато тврђење на које се треба позвати	Старији Средњошколски
15.	Способност да се добијени непознати проблем реши рашчлањавањем на више познатих проблема (елаборација)	Анализом проблема он се своди на једноставнији, а овај на још једноставнији ... све док се не дође до познатог проблема	Старији Средњошколски
16.	Самостално откривање непознатих, али математичкој науци познатих математичких тврђења, правила, теорема (оригиналност)	Стваралаштвом се може сматрати све што ученику није било познато, а добијено је снагом сопственог ума без обзира да ли је то математичкој науци позната или непозната чињеница	Старији Средњошколски

17.	Примена математичких знања у нестандардним животним ситуацијама (редефиниција) [5]	У свакодневном животу понекад је неопходно нешто измерити, израчунати, процентити... применом стечених математичких знања. Шта и на који начин применити је ипак питање стваралачких способности	Млађи Старији Средњошколски

Испољавање наведених и других облика и манифестација стваралачких способности ученика углавном се дешава спонтано и не превише фреквентно. Интензивирања ових активности неће ни бити уколико не буде и планираних и програмираних утицаја на креативно понашање ученика. Како је циљ сваког образовања унапређивање креативних компетенција, то значи да све наведене облике у којима се манифестује креативности ученика у настави математике треба констатнтно и осмишљено подстицати и развијати.

ВЕЖБА 1.

Следећи проблеми су груписани по областима и у оквиру сваке области од познатијих ка мање познатима. Класификовати их према могућностима развијања стваралачких способности:

1. Збир два броја је 256, а њихова разлика је 74. О којим бројевима је реч?
2. Анка и Бранка имају заједно 256 динара, при чему Анка има 74 динара више од Бранке. Колико новца има Анка, а колико Бранка?
3. Новчаница од 100 динара замењена је за 38 новчића од 2 и 5 динара. Колико има којих новчића?
4. На тесту из математике било је 10 задатака. Сваки тачно решен задатак се вреднује са 4 бода, а за сваки нетачно решен или нерешен задатак се одузима 3 бода. Сања је освојила 19 поена. Колико задатака је Сања решила тачно?
5. Први ученик је добио половину бомбона и још једну бомбону. Други ученик је добио половину преосталих бомбона и још једну бомбону. Трећи ученик је добио половину преосталих бомбона и још једну бомбону. Четврти ученик је добио половину преосталих бомбона и још једну бомбону. После тога више није било бомбона. Колико бомбона је добио сваки ученик? Шта би било да је било 10 ученика? Уопшти проблем на n ученика.

6. Дата је шаховска табла 5 х 5 и у једном њеном углу скакач. Да ли је могуће у наредна двадесет четири потеза прећи сва преостала 24 поља шаховске табле?
7. Колико има седмоцифрених бројева чији је производ цифара паран?
8. У једној колони налази се 222 војника. Дозвољено је да своја места замене само они војници који имају заједничког комшију у колони. Да ли овакав систем промене места обезбеђује војнику који се налази на зачељу колоне, да се нађе на челу колоне?
9. На табли су написана два узастопна природна броја n и $n + 1$. Професор Пера има право да било који од датих бројева замени њиховим збиром или разликом. Да ли се, после коначног броја таквих трансформација може на табли наћи број 2012?
10. Да ли се дати једнакостранични троугао може поделити на 2012 једнакостраничних троуглова?

11. Одредити све целе бројеве x, y и z ако је $x + 2y + 3z = 15$ и $2x + y = 8$.
12. Одредити све природне бројеве x и y тако да је њихов производ 7 пута већи од њиховог збира.
13. Да ли постоји двоцифрен природан број који је једнак квадрату збира својих цифара ?
14. Хипотеза једног основца: Квадрат сваког природног броја већег од 1 може се приказати као збир два проста броја. Да ли је дата хипотеза тачна?
15. Доказати да је за сваки природан број n, израз $(n + 1)(n + 2) \ldots (2n - 1)\, 2n$ дељив са 2^n, а није дељив са 2^{n+1}.

[5] Аутор текста верује да постоје и други облици исказивања стваралаштва ученика у настави математике и биће захвалан свим колегама који на такве облике укажу

16. Анка и Бранка су рођене у 20. веку. Пре седам година број Анкиних година је био дељив са 8, а за осам година ће бити дељив са 7. Пре осам година број Бранкиних година је био дељив са 7, а за седам година ће бити дељив са 8. Колико година има Анка, а колико Бранка?
17. Постоји ли природан број који има особину да када се помножи са 2 онда се добије тачан куб природног броја, а када се помножи са 3, онда се добије тачан квадрат природног броја? Ако постоји који је најмањи такав број ?
18. Дванаестоугао има 54, а деветоугао 27 дијагонале. Колико има уређених парова (m, n) таквих да m- тоугао има два пута више дијагонала од n-тоугла ?
19. Колико решења има једначина: $x^2 - y^2 = n$, ако су x, y и n природни бројеви?

20. Конструисати троугао чије су све странице веће од 2012, а чија је површина мања од 1.
21. Постоји ли троугао чије су све висине мање од 2 cm, а чија је површина већа од 1000 cm^2 ?
22. Конструисати једнакостранични троугао чија је површина једнака збиру површина датог четвороугла и датог петоугла.
23. Колико има тупоуглих троуглова чије су мерни бројеви страница узастопни природни бројеви?
24. У четвороуглу ABCD дијагонала AC је симетрала $\angle$BAD. Конструисати четвороугао ABCD ако је AB = 7cm, BC = 3cm, CD = 4cm и DA = 5cm.
25. Дат је троугао A(B)(C), где су B и C недостижне тачке. Конструисати тежиште датог троугла.
26. Доказати да је збир површина полукругова конструисаних над катетама правоуглог троугла једнак површини полукруга конструисаног над хипотенузом.
27. Нека су a, b и c мерни бројеви катета, односно хипотенузе правоуглог троугла и n природан број већи од 2. Доказати да је $a^n + b^n < c^n$.

28. Ако је $x \in [-5, 4]$, одредити најмању и највећу вредност израза $(x + 5)(x - 4)^2$.
29. Познато је да је: $1^3 = 1$, $1^3 + 2^3 = 9 = (1 + 2)^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1 + 2 + 3)^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$ ... Колико је $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$?

30. На командној табли се налази 2016 тастера нумерисаних бројевима од 1 до 2016. Тастер са редним бројем n пали светиљку са редним бројем n ($1 \leq n \leq 2016$). Први ученик је притиснуо тастере 1, 2, 3…, 2016 (дакле, све тастере). Други ученик је притиснуо тастере 2, 4, 6, 8 … 2016 (дакле, сваки други тастер). Трећи ученик је притиснуо тастере 3, 6, 9 … 2016 (дакле, сваки трећи тастер)… Двехиљаде шеснаести ученик је притиснуо тастер 2016 (дакле, сваки 2016-ти тастер). Које ће светиљке после свих изведених операција бити упаљене, а које угашене?
31. Али-Баба је дошао у пећину са благом и има сандук у кога може да стане 200 *kg* злата или 40 *kg* дијаманата. Познато је да 1 *kg* злата кошта 20.000 евра, а 1кг дијаманата 80.000 евра и да Али-Баба може да понесе највише 100 *kg* блага. Како Али-Баба треба да распореди злато и дијаманте да би са собом понео највећу могућу вредност блага?
32. Одредити ширину реке Дунав.

ВЕЖБА 2.

Конструиши по један пример проблема за све наведене облике исказивања стваралачких способности ученика? Да ли постоје још неки облици, тј. манифестације исказивања стваралаштва ученика?

∴

Испољавање наведених и других облика и манифестација стваралачких способности ученика углавном се дешава спонтано и не превише фреквентно. Интензивирања ових активности неће ни бити уколико не буде и планираних и програмираних утицаја на креативно понашање ученика. Како је циљ сваког образовања унапређивање креативних компетенција, то значи да све наведене облике у којима се манифестује креативности ученика у настави математике треба констатнтно и осмишљено подстицати и развијати. Пут ка креативности води и преко развијања иницијативности и сарадње у настави математике.

Ако за циљ имамо повећање иницијативе ученика (у настави математике и уопште) онда су неки од могућих путеви који воде до тог циља:

- одговарајућа и сврсисходна припрема ученика за нове садржаје
- осмишљена мисаона провокација при излагању наставних садржаја
- нестандардност наставних поступака (експеримент, рад у групама, измештање наставе из учионице у друге просторе, природу…)
- искрена отвореност наставника за ученичка питања и интересовања
- равномернија пажња и усмереност наставника ка што широј ученичкој популацији
- поступност, тј. степенасти приступ увежбавању и задавању проблема
- примереност и диференцираност домаћих задатака.
- инсистирање на оригиналном, нестандардном и решавању проблема на више начина
- постицање самосталне формулације проблема
- стављање ученика у реалне проблемске ситуације
- други поступци.

ВЕЖБА 3.

Диофантову једначину $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ решити на што више начина.

ВЕЖБА 4.

Дата је функција f која пресликава скуп природних бројева већих од 2 на скуп природних бројева, следећом таблицом:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$f(n)$	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	...

а) Која функционална једначина карактерише дату функцију?

б) Реши добијену диференцну једначину

в) Изразити дату функцију у експлицитном облику.

г) Шта дата функција суштински представља (у области планиметрије)?

д) Формулиши низ, тј. што је могуће више проблема који се односе на дату функцију и њено суштинско значење.

.
. .

При том је очигледно да развијања креативности и иницијативе ученика нема без сарадње која се може остварити кроз неколико повратних веза (ученик $\leftrightarrow$ наставник, ученик $\leftrightarrow$ учениик, ученик $\leftrightarrow$ родитељ, наставник $\leftrightarrow$ родитељ, …), а најчешће манифестује кроз:

- сврсисходна питања ученик – наставник (и обрнуто)
- решавање проблема у паровима
- едукацију у пару
- решавање проблема у групама
- дискусија око могућих идеја, а потом и око добијених решења
- e-mail веза ученик $\leftrightarrow$ ученик
- e-mail веза ученик $\leftrightarrow$ наставник
- интернет форум ученика (са или без уплива наставника)
- друге могућности.

4. МЕТОДИ ЗА РАЗВИЈАЊЕ КРЕАТИВНОСТИ

Развијање стваралачких способности ученика, иницијативе и сарадње сигурно је један од најважнијих циљева образовања уопште, па самим тим и математичког образовања. Средства за постизање тог циља су различита, али је сигурно да су дијалог, игра и истраживачки рад важни методи наставног рада усмерени ка његовом постизању.

4.1. ДИЈАЛОГ

Дијалог је незамењив наставни метод. Дијалог као наставна метода подразумева комуникацију између наставника и ученика или самих ученика којом се размјењују искуства, схватања и ставови о наставним садржајима. У настави математике то није борба између непријатеља за победу или превласт, већ двосмерна сарадња савезника на путу увођења у проблем, актуализацији проблема, спонтаног низа питања и одговора, верификације постојећих сазнања и откривања неоткривенога. На млађем узрасту дијалог је сугестивнији и директнији, док на старијем и средњошколском узрасту у настави математике дијалог има улогу да разменом идеја омогући квалитетније усвајање математичких појмова и свођење нових и непознатих проблема на проблеме чији исход је већ третиран. Дијалог треба да буде логичан и спонтан и да ситуацију из корака у корак води ка решењу датог проблема. Дијалог подстиче сарадњу, развија иницијативу и утиче на креативно понашање ученика.

ВЕЖБА 5.

Дат је следећи проблем: У бубњу за лутрију су лоптице. На свакој лоптици је исписан један број, а бројеви на лоптицама су различити. На 30 лоптица су исписани бројеви који су дељиви са 6. На 20 лоптица су исписани бројеви који су дељиви са 9? На 10 лоптица су исписани бројеви који су дељиви са 18. Који је најмањи могући број лоптица у бубњу. Направити дијалог који води решавању овог проблема.

4.2. ИГРА

Игра је мотивационо један од најснажнијих наставних метода. " Игра, као наставни метод у интердисциплинарном програму, подстиче креативно понашање ученика изражено кроз имагинацију (дивергентне идеје), логичко мишљење, емоционално испољавање и унутрашњу мотивацију за учење. Пошто су својства игре слична својствима креативног процеса (дивергентност, аутиотеличност, регулативност, експресивност) она представља начин развијања креативног понашања."[6] Међутим, заблуда је да је игра наставни метод који у настави математике треба неговати, углавном, на млађем узрасту. Игра је моћна наставна метода у настави математике на свим узрастима, јер откривање победничке стратегије у игри најче-шће представља креативан процес у коме до изражаја долазе способности синтезе стечених знања и њихова стваралачка примена.

[6] Видети: Јасмина Шефер, Креативност у настави на млађем школском узрасту, Зборник Института за педагошка истраживања 1996, бр. 28, стр. 295-313

ВЕЖБА 6.

1. Марко и Никола располажу са по n идентичних новчића и играју следећу игру на правоугаоном столу. Марко стави новчић било где на сто, а затим то исто уради Никола, па опет Марко и тд, при чему се новчићи не смеју преклапати. Игру је изгубио играч који не буде могао да на сто постави свој новчић. Који играч има победничку стартегију? [7]

2. На гомили се налази n жетона. Играчи А и В са гомиле наизменично узимају 1, 2 или 4 жетона. Победник је онај играч који узме последњи жетон. Ко је победник?

3. Анка и Бранка играју игру тако што исписују десетоцифрени број наизменичним исписивањем цифара с лева у десно. Ако је добијени број дељив са 9 победник је Анка, а ако је дељив са 11 победник је Бранка. Који играч има победничку стратегију?

ВЕЖБА 7.

1. Дата је једначина $ax^2 + bx = 0$ (a, $b \in R$, $a \neq 0$). Анка и Бранка бирају реалне бројеве a и b тако да:
   а) Анка бира број a, а Бранка бира број b.
   б) Анка бира прва ма који од бројева a и b, а потом Бранка бира други број.

   Ако једначина има реална решења победник је Анка, а ако једначина нема реална решења победник је Бранка. Ко ће победити у случају а), а ко у случају б)? Каква је Анкина, а каква Бранкина оптимална стратегија?

2. Дата је једначина $ax^2 + c = 0$ (a, $c \in R$, $a \neq 0$). Анка и Цеца бирају реалне бројеве a и c тако да:
   а) Анка бира број a, а Цеца бира број c.
   б) Анка бира прва ма који од бројева a и c, а потом Цеца бира други број.

   Ако једначина има реална решења победник је Анка, а ако једначина нема реална решења победник је Цеца. Ко ће победити у случају а), а ко у случају б)? Каква је Анкина, а каква Цецина оптимална стратегија?

3. Дата је једначина $x^2 + bx + c = 0$ (a, $b \in R$, $a \neq 0$). Бранка и Цеца бирају реалне бројеве b и c тако да:
   а) Бранка бира број b, а Цеца бира број c.
   б) Анка бира прва ма који од бројева b и c, а потом Цеца бира други број.

   Ако једначина има реална решења победник је Анка, а ако једначина нема реална решења победник је Бранка. Ко ће победити у случају а), а ко у случају б)? Каква је Анкина, а каква Цецина оптимална стратегија?

4. Дата је једначина $ax^2 + bx + c = 0$ (a, $b \in R$, $a \neq 0$). Анка и Бранка бирају реалне бројеве a, b и c тако да:
   а) Анка бира број a, Бранка бира број b, а Анка потом бира број c.
   б) БраАнка бира број a, Анка бира број b, а Бранка потом бира број c.
   в) Анка бира прва ма који од бројева a, b и c, а потом Бранка бира други број, а Анка бира трећи број.
   г) Бранка бира прва ма који од бројева a, b и c, а потом Анка бира други број, а Бранка бира трећи број.

   Ако једначина има реална и различита решења победник је Анка, а ако једначина нема реална решења победник је Бранка, а ако једначиа има двоструко реално решење поведник је Цеца. Ко ће победити у случају а), а ко у случају б)? Каква је оптимална стратегија?

5. Дата је једначина $ax^2 + bx + c = 0$ (a, $b \in R$, $a \neq 0$). Анка, Бранка и Цеца бирају реалне бројеве a, b и c тако да:
   а) Анка бира број a, Бранка бира број b, а Цеца бира број c.
   б) Анка бира прва ма који од бројева a, b и c, а потом Бранка бира други број, а Цеца бира трећи број.

   Ако једначина има реална и различита решења победник је Анка, а ако једначина нема реална решења победник је Бранка, а ако једначиа има двоструко реално решење победник је Цеца. Ко ће победити у случају а), а ко у случају б)? Каква је оптимална стратегија?

---

[7] Видети књигу: Ратко Тошић: Математичке игре, Агенција "Ваљевац", Ваљево, 1999.

6. Дата је једначина $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in R$). Анка и Бранка бирају реалне бројеве a, b и c тако да:
   а) Анка бира број a, Бранка бира број b и Анка бира број c.
   б) Анка бира прва ма који од бројева a, b и c, а потом Бранка бира други број, а Анка бира трећи број.

   Ако једначина има сва три реална решења победник је Анка, а ако једначина има само једно реално решење победник је Бранка.
   Ко ће победити у случају а), а ко у случају б)? Каква је оптимална стратегија?

7. Дата је једначина $a_{2013}x^{2013} + a_{2011}x^{2011} + ... + a_1x + a_o = 0$ (коефицијенти полинома су реални бројеви и $a_o \neq 0$). Анка и Бранка бирају коефицијенте тако да:
   а) Анка бира парне, а Бранка бира непарне коефицијенте.
   б) Бранка бира било који, па Анка било који и тд. све до последњег коефицијента.

   Ако једначина има бар једно реално решења победник је Анка, а ако једначина нема реалних решења победник је Бранка. Ко ће победити у случају а), а ко у случају б)?

8. На табли је написано n израза облика $* x^2 + * x + * = 0$, где је n непаран број. Два играча уместо звездица наизменично исписују бројеве различите од нуле. После $3n$ потеза добија се n квадратних једначина. Први играч се труди да обезбеди што више једначина чија решења нису реална. Колико највише једначина чија решења нису реална може да обезбеди Први играч, без обзира како игра други играч? [8]

ВЕЖБА 8.

Конструисати математичке игре за следеће наставне јединице:
а) Дељивост (5. разред)
б) Подударност троуглова (6. разред)
в) Квадрат бинома (7. разред)
г) Осна и централна симетрија (1. разред средње школе)
д) Виетове везе (2. разред средње школе)

4.3. ИСТРАЖИВАЧКИ РАД

Истраживачки рад[9] ученика подразумева креативност, иницијативу и сарадњу и могућ је у настави математике, наравно са различитим дометима, на свим узрасним нивоима. На млађим узрастима то могу бити мали експерименти у којима се захваљујући креативности и иницијативи ученика расветљују међусобни односи математичких објеката и једноставније математичке законитости. На старијем, а поготову средњошколском узрасту истраживачким радом ученика се може постићи релативно самостално откривање значајних математичких тврђења, ставова и законитости, али и добити мале математичке теорије[10] које представљају резултат стваралачких способности, иницијативности и добре сарадње учесника истраживања. Резултат тих истраживања може бити једно или више решење датог проблема, али и нека његова уопштења или формулација нових оригиналних проблема, конституисање неких математичких игара или других математичких творевина.

---

[8] Видети књигу: Ратко Тошић: Математичке игре, Агенција "Ваљевац", Ваљево, 1999.
[9] Овде говоримо о истраживачком раду ученика, јер истраживачки рад наставника се код развијања стваралачких потенцијала ученика подразумева
[10] На пример, у Русији се већ годинама организује математичко такмичење "Турнир градова" чији значајан део представља екипно истраживање интересантних математичких проблема и презентација резултата који најчешће, поред решења датог проблема подразумевају уопштавање, примену и формулисање нових проблема

ВЕЖБА 8.

1. Дванаестоугао има 54, а деветоугао 27 дијагонале. Колико има уређених парова (m, n) таквих да m-тоугао има два пута више дијагонала од n-тоугла ?
2. Колико решења има једначина: $x^2 - y^2 = n$, ако су x, y и n природни бројеви?
3. Да ли се дати квадрат може поделити на n мањих неподударних квадрата?
4. Бројеви n, x и y су природни. Када је $n^x + n^y$ потпун квадрат?
5. Дата је једначина $ax^2 + by^2 = cz^2$ (a, b и c су целобројне константе, а x, y и z су природни бројеви). Истражити решивост дате једначине у зависности од различитих вредности целобројних константи.

$\therefore$

Веза стваралаштве, сарадње и иницијативе са дијалогом, игром и истраживачким радом у настави математике је узрочно – последична, јер се рад на унапређивању стваралачких способности, сарадње и иницијативности ученика најчешће одвија кроз дијалог, игру и мале истраживачке пројекте. С друге стране развијене стваралачке способности, иницијатива и сарадња подстичу дијалог, иницирају нови истраживачки рад и игру као карактеристичну људску активност.

5. НАСТАВНИК И КРЕАТИВНОСТ

О стваралаштву наставника нисмо до сада говорили али напоменимо да најчешће креативних младих људи нема без креативних наставника, и да стваралаштво ученика у многоме зависи од стваралачких способности наставника и његових постицаја стваралачким активностима ученика.

У познатој књизи "Математичко откриће"[11] познати амерички дидактичар George Polya препоручује ДЕСЕТ ЗАПОВЕСТИ НАСТАВНИЦИМА МАТЕМАТИКЕ, које се могу веома успешно применити у развијању креативности у настави математике:

1. Интересуј се за математику!
2. Знај свој предмет!
3. Знај на који начин се може научити то што што је неопходно! Најбољи начин учења је самооткривање.
4. Знај да читаш са лица својих ученика! Настој да спознаш шта они од тебе очекују; схвати њихове тешкоће; стави себе у њихову позицију!
5. Не ограничавај се на голе информације; тежи да код ученика развијаш одређене навике, потребан склад мишљења и привикавања на методологију!
6. Труди се да их научиш да наслућују!
7. Настој да их научиш да наслућено доказују!
8. Нагласи шта се у конкретном задатку може искористити за решавање других проблема; потруди се да из дате конкретне ситуације открију општи метод!
9. Не откривај одмах своје тајне; пусти ученицима да покушају да погоде оно што желиш да им откријеш; уступи самим ученицима да открију што је могуће више!
10. Помажи ученицима корисним упутствима, али не намећи своје мишљење по сваку цену!

---

[11] Види Джордж Пойа – Математическое открытие – Наука, Москва, 1976,стр. 305-311.

Започета тема о креативном наставнику и улози наставника у развијању стваралачких способности својих ученика је комплексна. Зато детаљнија разматрања ове изузетно важне проблематике оставимо за неки нови семинар, уз обећање да ћемо о томе обавезно разговарати.

6. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

1. Резултати истраживања ефеката наставе математике у Србији указују на малу математичку писменост ученика у Србији и приличан заостатак за европским просеком када је функционално математичко образовање у питању.
2. Једна од могућности за превазилажење таквог стања свакако је развијање сваралачких особина ученика кроз наставу математике.
3. Настава математике познаје значајан број облика креативног исказивања ученика и подстицање стваралаштва, сарадње и иницијативности би значајно унапредило наставу математике и допринело функционалнијим знањима ученика.
4. Због тога унапређивање наставе математике подразумева и другачији однос према настави и далеко већу пажњу усмерену на развијање креативних потенцијала, иницијативности и сарадње као кључних компетенција ученика, неопходних за иновативни приступ својој будућој професији.
5. Анализа феномена стваралаштва, сарадње и иницијативе недвосмилено указује на њихову узрочно-последичну везу са дијалогом, игром и истраживачким радом као активним методама у настави математике.
6. Зато је истраживање стваралаштва, иницијативе и сарадње као друштвених вредности у савременом образовању и њихових конкретних веза и манифестација са дијалогом, игром и истраживачким радом, као и имплементација резултата добијених истраживањем у наставну праксу неопходна и пожељна.

7. ЛИТЕРАТУРА

[1.] Наставни програм математике,
КММ "Архимедес", Београд 1991.

[2.] Андрић Војислав,
Неки проблеми наставе математике (Зборник "Савремени уџбеник")
Завод за уџбенике, Београд, 2007.

[3.] Андрић Војислав,
Диофантове једначине
Друштво математичара Србије, Ваљево, 2008.

[4.] Бауцал Александар, Павловић Бабић Драгица,
Научи ме да мислим, научи ме да учим
РИСА 2009. године - први резултати, Београд, 2010.

[5.] Judita Cofman,
What to Solve? Problems and Suggestions for Young Mathematicians
Oxford Sience Publications, Oxford, 1990.

[6.] Квашчев Радивој,
Развијање стваралачких способности код ученика
Завод за уџбенике Београд, 1974.

[7.] Максић Славица,
Развијање креативности у школи
Институт за педагошка истраживања, Београд, 2006.

[8.] Образовни стандарди за крај обавезног образовања
Министарство просвете, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања
Београд, 2010.

[9.] Пойа, Джордж,
Математическое открытие,
"Наука", Москва, 1976 (превод са енглеског)

[10.] Тошић Ратко,
Математичке игре
Агенција "Ваљевац", Ваљево, 1999.

[11.] Хузјак Мирослав:
Даровитост, таленат и креативност у одгојном процесу,
Одгојне знаности, Вол. 8, бр. 1, 2006, стр. 289-300

[12.] Шефер Јасмина,
Креативност у настави на млађем школском узрасту,
Зборник Института за педагошка истраживања, Београд, 1996, бр. 28

http://hr.wikipedia.org/wiki/Kreativnost

http://www.ljiljanacuk.com/prolaz/prikazi/kreativnost/kreativnost.html