ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

РЕПУБЛИЧКИ СЕМИНАРИ 2016.
О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА У ОСНОВНИМ И СРЕДЊИМ ШКОЛАМА

Милорад Шуковић, Зоран Ловрен

МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ У СТАРИЈИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

Б е о г р а д 2016. године

МОТИВАЦИЈА

Према важећим програмима наставе математике за основну школу у Републици Србији, циљеви наставе математике, између осталих, су: да ученици усвоје елементарна математичка знања која су потребна за схватање појава и законитости у природи и друштву**;** да оспособи ученике за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе**;** стицање основне математичке културе потребне за сагледавање улоге и примене математике у различитим подручјима човекове делатности (**математичко моделирање),** за успешно настављање образовања и укључивање у рад.

⬥ МОДЕЛ. МОДЕЛИРАЊЕ

Појам модела је познат ученицима основне школе: физички модели (у настави техничког образовања, биологије,...), симболички модели (хемијске формуле, мапе, шеме електричних уређаја,...), мисаоно-дескриптивни модели, модели геометријских фигура и тела које користимо у настави (илуструјемо примерима визуелизације доказа Питагорине теореме, формуле за разлику квадрата, модели геометријских тела у сврху одређивања најкраћег пута, површина круга).

Модел -представља замену за неки реалан објекат или појаву, аналогију са неким објектом
- користи се за објашњење неког процеса или предвиђање догађаја
- поједностављује и објашњава комплексност онога што се посматра (и моделира)

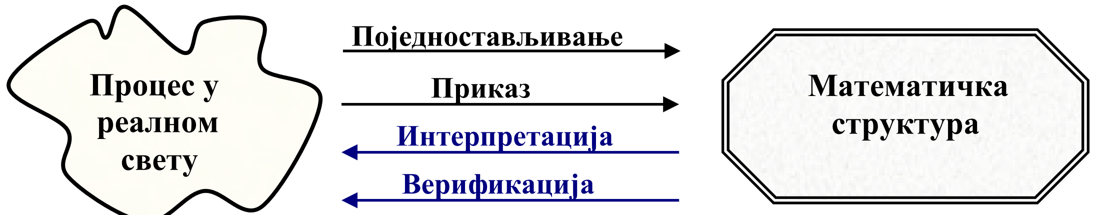
Математика је , како каже Кит Делвин у књизи „ Математички ген“, наука о релацијама.
Добро средство (језик) за изражавање принципа.

⬥ МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ

- предлог законитости записан математичким језиком
- уређен скуп математичких релација (формула, једначина, неједначина, логичких услова, релационих оператора и слично) који описују реалан објекат или појаву, односно одређују његове карактеристике.
- базирани су на математички постављеним принципима
- математичка карактеризација или опис неког феномена или процеса

⬥ МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ

- процес математичке презентације неког проблема са циљем његовог бољег разумевања
- поступак апстракције – елементи битни за функционисање састава

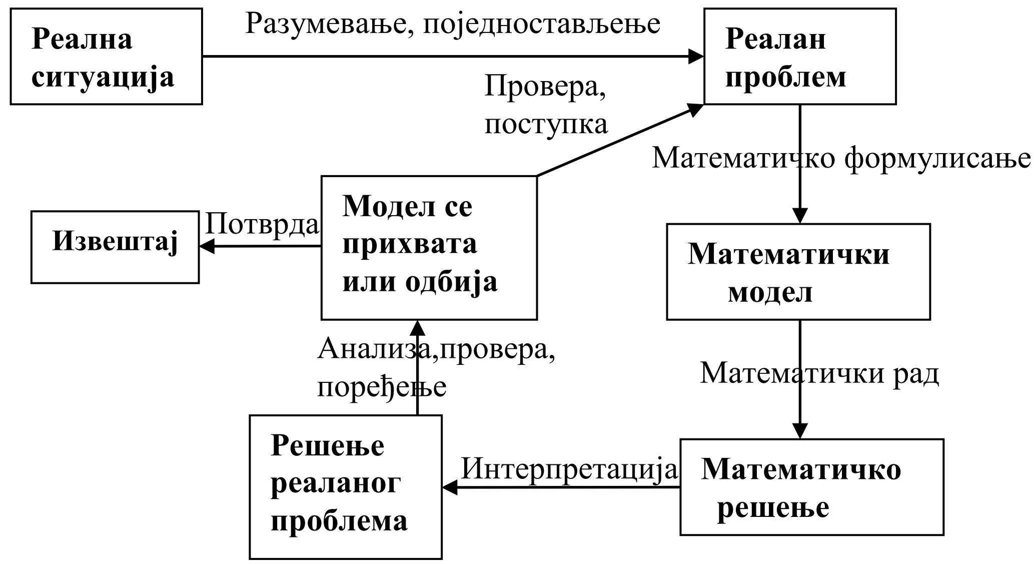


→ поједностављивање (апстракција)
→ приказ (презентација)
← интерпретација (трансформација)
← верификација (упоређивање добијених резултата са резултатима опажа

Како се формира математички модел?

Моделирање у настави математике прати дидактички круг који почиње упознавањем ученика са стварним проблемом из живота и преко својих фаза води ка развоју математичког мишљења и самог решења проблема. Ученичко мишљење има главну улогу у стварању апстракција и појмова као модела реалних појава. Али, осим мисаоних активности велики значај се придаје и графичким активностима којима се често може повезати конкретно са апстрактним.

На слици је приказана шема математичког моделирања у настави:



Да би се вршило математичко моделирање полази се од неке реалне ситуације (свакодневне, ученицима познате и доступне), потом се та ситуација помоћу математичког језика претвара у математичку ситуацију и помоћу одговарајућег модела тражи се решење ситуације (проблема).За наставу математике у основној школи неоспоран је значај моделирања. Ученици који су савладали и усвојили одређен модел, лакше и брже усвајају нова знања, спретнији су, боље се сналазе у различитим проблемским ситуацијама, имају већу мотивацију за рад, сигурнији су при давању одговора и излагању својих знања.

• **Функција** у математици представља зависност једне промењљиве (y) од друге промењљиве (x) и управо та (функционална) зависност је оно што овај појам издваја од других појмова које изучавамо у математици. Пре свега у питању је појам који нас учи да математичке величине посматрамо у њиховој промењљивости, међусобној вези и условљености. То је оно чиме можемо описати покретљивост и динамичност појава, као и условљеност и повезаност реалних величина. Наиме, када се моделирају појаве из реалне стварности код којих се јавља узрочно–последична веза између две промењљиве величине добија се функција као **математички модел** за одређену појаву.

……………………………………… ЗАДАЦИ ……………………………………………………

(1) Математичко моделирање. Линеарна функција

Избор такси превозника		Продаја календара	Пут у средиште земље
Телефонска претплата	Проток воде	Поскупљење и снижење	Производња шалова
Кошаркашка лига	Интернет услуге	Целзијус и Фаренхајт	Продаја аутомобила
Кварови на машини	У пицерији	Пењање увис	Враћање дуга

(2) Кретање

Вожња лифтом	По крацима угла	Бициклиста и пешак I	Бацање лопте
Вожња аутобусом	Аранђеловац- Београд	Са врха торња	Промењљиво кретање

(3) За истраживање

Мешање кафе I	Бициклиста и пешак II	Преливање	Хотелске собе
Мешање кафе II	Суво грожђе	Најкраћи пут I	Пумпе и базен
Једнакокораки троугао	Покривање губитка	Бојење коцке	Родбинске везе
Проценат раствора	Каса са динарима	Израда намештаја	Пожар
Лажни златник	Пакети	64=65, Где је грешка?	

(4) Модели једначина, неједначина, система линеарних једначина

Орање	На ливади	Сложене фигуре I , II, III	
Чоколаде	Краве, козе и гуске	Обалом реке	Производња обуће
Година рођења	Воз на мосту	Радници	Доручак

(5) Математика и неке животне ситуације

Гусарско благо	Билијар	Ломљење штапа	Излаз из шуме
Девојка и удварач	Злато и дијаманти	Балони и сок I	Необично путовање
Избори	Најкраћи пут	Балони и сок II	Изградња пута
Подела чоколаде	Састанак	Преко моста	Мужеви и жене

(6) Геометријски модели

Подела троугла	Подела квадрата	Правоугаоник у делтоиду	Кружни прстен у круг
Подела круга	Подела четвороугла	Троугао у једнакостранични троугао	Правоугаоник у троуглу
Подела трапеза	Подела шестоугла	Крива поделе троугла	Правоугаоник у квадрат
Ограда	Парче пице	Раскршће	Два троугла

(7) Пројектна настава. Тимски рад

Упијање воде	Загревање гаса	На пијаци	Флаута	Паскалов троугао

(1)……..Математичко моделирање. Линеарна функција

Избор такси превозника: Цена такси услуга је функција која зависи од дужине вожње у километрима. Старт је 50 динара и још 75 динара по пређеном километру.
а) Изрази функцијом зависност цене (y) од броја пређених километара (x)
б) Нацртај график функције в) Колико ће се платити за вожњу од 4,4km?
г) Колико се возила особа која је за услугу платила 350 динара
д) Цена вожње плавим таксијем је 100 дин/km. Прикажи графички
ђ) Зелени такси наплаћује старт 110 динара и 60 дин/km. Прикажи графички
е) Избор најповољнијег превоза зависи од дужине вожње. Како одабрати?

Кошаркашка лига: У другој кошаркашкој лиги има 14 клубова. Све екипе играју међусобно две утакмице (као гост и као домаћин).За победу се добија 2 бода, а за пораз 1 бод. Број освојених бодова екипе (y) зависи од броја победа (x). а) Изрази функцијом ту зависност. Представи графички
б) Одреди област дефинисаности функције (математичког модела)
в) Одреди мимималну и максималну вредност функције
г) КК „ЛАСТА“ је освојио 40 бодова. Колико је имао победа, а колико пораза?
д) КК „ПУМА“ је кажњен премештањем у другу лигу и одузето му је 10 бодова.
Како гласи функцуја зависности броја освојених бодова (y) од броја победа (x) за КК „ПУМА“ ?

Враћање дуга: Господин Илић је у децембру имао дуг од 16500 динара. Почевши од јануара, наредних годину и по дана сваког првог у месецу уплаћивао је по 1500 динара.
а) Изрази формулом зависност стања на рачуну (y) у динарима од протеклог времена (x) у месецима. Прикажи графички. б) Одреди нулу функције. Објасни значење добијеног резултата
в) У ком периоду је стање на рачуну било: 1) негативно 2) позитивно
г) Колико је било стање на рачуну почетком јула? д) Када је на рачуну имао 3000 динара?

Проток воде: Цистерна садржи 400 *l* воде. Отворена је славина кроз коју сваке секунде истекне 0,4*l* воде. а) Напиши функцију зависности количине воде која се налази у цистерни (y) у литрама од времена (x) које је протекло од отварања славине. График. б) Одреди област дефинисаности
в) Одреди нулу функције г) Када ће цистерна бити испражњена? д) Колико воде има у цистерни после 5 минута? ђ) Када ће у цистерни бити 150 литара воде?

Интернет услуге: Јован је уплатио 1500 динара за услуге интернета. Цена је 0,30 динара за минут плус PDV 20%. а) Изрази зависност стања на рачуну (y) од потрошеног времена (x) у сатима
б) Одреди нулу функције и објасни значење добијеног резултата
в) Јован планира да допуни рачун када на њему буде мање од 96 динара. Када то треба да уради?

Продаја календара: Трошкови штампања календара износе 6000 динара. Штампарија продаје по цени од 80 динара по календару. а) Изрази зависност прихода (y) у динарима од броја продатих календара (x). Представи графички. б) Одреди нулу функције. Објасни значење добијеног резултата
в) Колико износи приход остварен након што је продато 225 календара ?
г) Приход штампарије износи 30000 динара. Колико је продато календара

Поскупљење и снижење: Цена је 62,5 €. После снижења од 20% уследило је поскупљење од x процената. Нова цена (y) у динарима зависи од поскупљења x у процентима.
а) Изрази зависност (математички модел) и представи графички
б) Одреди цену после поскупљења од: 60% , 46% в) Нова цена је: 90 €. Одреди проценат поскупљења
г) За колико процената треба снизити цену да би била једнака старој цени?

Целзијус и Фаренхајт: Температура се изражава у Целзијусовим и Фаренхајтовим степенима.
Тачка мржњења воде је 32º, а тачка кључања 212º Фаренхајта.
а) Напиши формулу којом се број степени Фаренхајтове скале (y) изражавају степенима Целзијуса (x). Представи графички. б) Провери формулу за: –20º , –10º
в) Изрази број Целзијусових степени (x) у зависности од броја Фаренхајтових степени (y) степени. Провери формулу за: 14º , 5º

Пут у средиште Земље: При спуштању у унутрашњост земље, температура се повећава просечно за 1° C на сваких 10 m. Изрази зависност температуре (y) и дубине (x), ако је температура на површини Земље 5°C и предатави графички.
а) Колика је температура на дубини 110 m? б) На којој дубини температура износи 11 °C

Пењање увис: При пењању увис атмосферски притисак се смањује за 1mm живиног стуба на сваких 100 m. а) Изрази зависност између атмосферског притиска (y) и надморске висине (x), знајући да је на висини 0 m атмосферски притисак 760 mm. График
б) Колико износи притисак на 7000m надморске висине ?
в) На којој надморској висини притисак износи 680 ?

Производња шалова: Радионица током производње шалова има дневни трошак од 2000 динара и на сваки произведени шал трошак од 30 динара. Укупни недељни трошкови (**y**) зависе од броја исплетених шалова (**x**).
а) Изрази зависност б) Представи графички
в) Произведено је 60 шалова. Колико износе трошкови?
г) Укупни дневни трошкови радионице су 3350 динара. Колико је произведено шалова тог дана?
д) Продајна цена шала је 180 динара.
Колико шалова треба да продају да би остварили зараду већу од 1000 динара?

Продаја аутомобила: Цена аутомобила је 6900 еура. Марко је дао учешће од 1500 €, а остатак плаћа у ратама од 150 €. а) Изрази функцијом остатак дуга (y) у зависности од броја рата (x)
б) Када ће дуг бити: 4200 еура ; 3300 еура ?
в) Колико износи дуг после: 19 месесци ; после две године?
г) Одреди нулу функције. Објасни значење добијеног резултата

У пицерији: Марко је запослен у пицерији, прима поруџбине и разноси пице по граду. Његова недељна зарада (y) дата је формулом y = *a*x + b; x је број пица; b загарановани део; *a* је премија по испорученој пици. Прве недеље је испоручио 120 пица и зарадио 6750 динара, а друге је за испоручених 90 пица зарадио 6000 динара.
а) Израчунај *a* и b, изрази зависност плате (y) од броја испоручених пица (x)
б) Једне недеље је испоручио 180 пица, Колико је зарадио?
в) Колико пица треба да испоручи да би зарада била 12000 динара?

Кварови на машини: Број кварова машине је у линеарној вези са бројем укључења машине, f(x)= *a*x+b, x је број кварова, a f(x) број укључења машине. У 100 укључења машине појавила су се 3 квара, а у 300 укључења 5 кварова. а) Израчунати *a*, израчунати b.
б) Математички модел (функција), график линеарне функције.
в) Колико кварова проузрокује 1000 укључења машине?
г) После колико укључења машине очекујемо да ће се појавити 25 кварова ?

(2)………… Кретање

Вожња лифтом: У једној згради растојања између спратова су једнака и износе 3m. Зграда има приземље, шест спратова и два спрата испод приземља. Лифт се, без заустављања, креће са најниже тачке брзином 0,5 m/s
а) Изрази пређени пут лифта (y) у метрима у зависности од пређеног пута (x) у секундама
б) Прикажи графички в) Када је лифт у приземљу? г) Где се налази лифт после 20 секунди?
д) Када је лифт на 15-ом метру зграде?

Вожња аутобусом: Аутобус се враћа са екскурзије равномерном брзином од 1,2 km/min. У 18h 57min се налази 42 km од школе. Растојање аутобуса од школе (y) зависи од времена кретања (x).
а) Изрази ту зависност б) На ком растојању је аутобус у 19h 7min?
в) Растојање аутобуса у 19h 19min 30 sec. г) Када је аутобус био на половини пута?
д) Када је аутобус био удаљен 12 km ?

По крацима угла: Из темена угла крену истовремено,по крацима, два тела. Брзина првог је *a* m/s , а другог b m/s. Изрази зависност растојања (y) у метрима од времена кретања (x) у секундама ако је:
а) угао 45° б) угао 60°

Бициклиста и пешак: Места А и В су удаљена 20 km. Из места А крене пешак средњом брзином 3km/h. После 20 минута из места А, за њим, крене бициклиста средњом брзином 18km/h .
Изрази зависност растојања (y) између бициклисте и пешака од времена (x) кретања бициклисте.
Представи графички.

Аранђеловац- Београд: Растојање између Аранђеловца и Београда је 80 km. Изрази зависност времена од брзине којом се прелази пут Аранђеловац – Београд.
а) За колико се стиже од Аранђеловца до Београда ако се путује колима бризином 80 km/h?
б) За колико времена се стиже од Аранђеловца до Београда ако се путује бициклом просечном брзином од16 km/h?
в) Којом брзином треба да се крећемо ако желимо да стигнемо У Београд за 1h и 15 min.?
г) Како повећање брзине утиче на време потребно да се пређе пут Аранђеловац – Београд.

Промењљиво кретање: У почетном тренутку брзина тела је 3 m/s. Креће се праволинијски са убрзањем $2 m/s^2$. Изрази зависност брзине тела (m/s) од времена кретања (s).
Одреди пут који је тело прешло у првих шест секунди кретања.

Бацање лопте: Тело се баца са земље у вис брзином 30m/s.
а) Када ће оно бити највише удаљено од земље? Одреди удаљеност.
б) После колико секунди ће се вратити на земљу?

Са врха торња: Лопта је бачена у вис са врха торња у Пизи, висине 58m, просечном брзином 30m/s.
а) Одредити максимално растојање лопте од земље
б) После колико времена ће лопта додирнути земљу.

(3) ……… Задаци за истраживање

Мешање кафе I: Скупља кафа по цени од a дин./kg меша се са јефтинијом врстом кафе од b дин./kg.
Колико треба узети скупље кафе (y) да би се добило 100 kg. мешавине по цени од x дин./kg?
РЕШЕЊЕ: Формулски превод гласи:

$$ay + b(100 - y) = 100x \wedge 0 \le y \le 100$$
$$y(a - b) = 100(x - b) \wedge 0 \le y \le 100$$

По услову је $a > b$, па је $a - b \neq 0$ У противном: Ако је $x=b$, y може бити ма који број од 0 до 100 .
Ако је $x\neq b$, проблем је немогућ

$$y = 100\frac{x-b}{a-b} \wedge 0 \le 100\frac{x-b}{a-b} \le 100 /\cdot \frac{a-b}{100} > 0$$

$$y = 100\frac{x-b}{a-b} \wedge 0 \le x - b \le a - b$$

$$y = 100\frac{x-b}{a-b} \wedge b \le x \le a$$

Верификација**:** y(b) = 0 , $y(a)$ = 100

Мешање кафе II: Скупља кафа по цени од a дин./kg меша се са јефтинијом врстом кафе од b дин./kg
Количина кафе коју треба узети зависи од цене. Господин Y^{-1} тврди да важи и обрнуто. Цена зависи од количине скупље кафе коју узимамо. Како гласи зависност?

Једнакокраки троугао:Нека је ABC једнакокраки троугао основице a, обима 2014 cm.
Ако се дужина основице повећа(смањи) за x cm, онда се крак смањи(повећа) за y cm.
Изрази зависност промене дужине крака од промене дужине основице.
Госпођа Y^{-1} тврди: „Ако се крак повећа(смањи) за x cm, онда се основица смањује (повећава) за y cm“. Одреди функцију зависности промене основице од промене крака.

Бициклиста и пешак, поново:. Места A и B су удаљена d km. Из места B, удаљавајући се од A, крене пешак средњом брзином v_1 После x сати из места A , за њим, крене бициклиста средњом брзином v_2 .
Када ће бициклиста стићи пешака?
РЕШЕЊЕ:
- Означимо са **y** време потребно да би бициклиста стигао пешака.
- Проблему одговара формула:

$$yv_2 = (d + v_1x) + yv_1 \quad \wedge \quad y > 0 \ , \ v_1, v_2, d, x > 0$$
$$y(v_2 - v_1) = d + v_1x \quad \wedge \quad y > 0$$

Овде настаје „раскрсница“:

- Закључак: Ако је $v_2 < v_1$ проблем је немогућ. Бициклиста неће стићи пешака.
Ако је $v_2 > v_1$ бициклиста ће стићи пешака за **y** сати.

Суво грожђе: Свеже грожђе садржи a% воде, а суво b%.
Колико свежег грожђа (y) треба узети да би се добило x килограма сувог ?

РЕШЕЊЕ: Количина суве материје се не мења: $(100-a)y=(100-b)x \Leftrightarrow y=\dfrac{100-b}{100-a}x$

Покривање губитка I : Трећина укупне количине робе продата је са зарадом од 10%, а половина са губитком од x% . За колико процената зараде треба продати остатак робе да би се покрио губитак?

РЕШЕЊЕ: • Означимо са **a** укупну количину робе

Формулски превод који одговара задатку: $1{,}1\cdot\dfrac{a}{3}+\left(\dfrac{100-x}{100}\right)\cdot\dfrac{a}{2}+\left(\dfrac{100+y}{100}\right)\cdot\dfrac{a}{6}=a \;\; /\cdot\dfrac{6}{a}$

$$2{,}2+3-\frac{3x}{100}+1+\frac{y}{100}=6 \;\; /\cdot 100$$

$$220+300-3x+100+y=600$$

$$y=3x-20$$

Покривање губитка II: Извесна количина робе изажена правим разломком m/n продата је са губитком од x%. Са колико процената зараде (y) треба продати остатак да би се покрио губитак ?

Проценат раствора: Дата је мешавина од a литара течности A и B. У тој мешавини је x % течности A. Колико треба додати (y) течности B да би нова мешавина садржала r % течности A?
Или овако: Количина течности B коју треба додати (y) зависи од процента (x) течности A у раствору. Како гласи ова зависност?

Најкраћи пут I : Између места A и B налази се канал са паралелним обалама. Конструисати мост преко канала тако да дужина моста буде минимална и да пут од A до B буде најкраћи могући пут.

Хотелске собе (Р.8.2005.)**:** Један хотел има 40 соба које издаје по цени 3000 динара дневно. Али, ако се цена повећа за 100 динара, једна соба остаје празна, ако се повећа за 200 дин, две собе остају празне, и тако редом. Трошкови одржавања издате собе су 200 динара дневно. Колико треба да буде цена издавања собе по дану па да, под датим условима, зарада хотела буде највећа?

Пумпе и базен : Једна цев може да напуни базен за $\boldsymbol{a}$ сати, друга за **b** сати, док трећа исти базен празни за **c** сати. Када ће базен бити напуњен уколико са прво укључи прва цев, а након **x** сати друга и трећа цев?

Решење:
- Случај $\mathbf{x} \geq \boldsymbol{a}$, тада ће кроз $\boldsymbol{a}$ сати базен бити пун. Друге две пумпе се не укључују
- У случају **x < a** формулски превод гласи (**y** је број сати потребних да се напуни базен)

$$\frac{x}{a}+(y-x)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c})=1 \;\wedge y>x \Leftrightarrow (y-x)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c})=1-\frac{x}{a} \;\wedge\; y>x$$

Израз $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}$ означимо са M. Њиме се мери укупни учинак све три цеви

Уколико је M=0 претходна еквиваленција постаје: $\Leftrightarrow 0=1-\dfrac{x}{a}\wedge y>x \;\Leftrightarrow\; x=a\wedge y>x \;\Leftrightarrow \perp$

Јер је претпоставка x< a.. Проблем је немогућ. Базен се не може

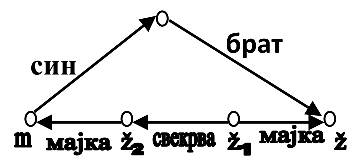
- У случају $M \neq 0$ имамо еквиваленције:

$$\Leftrightarrow y=x+(1-\frac{x}{a}):M \;\wedge\; y>x \Leftrightarrow y=x+(1-\frac{x}{a}):M \;\wedge x+(1-\frac{x}{a}):M>x \Leftrightarrow y=x+\frac{a-x}{aM}\wedge(1-\frac{x}{a}):M>0$$

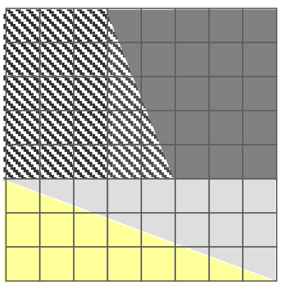
$$\Leftrightarrow y=x+\frac{a-x}{aM} \;\wedge\; M>0 \quad (x<a \Leftrightarrow \frac{x}{a}<1)$$

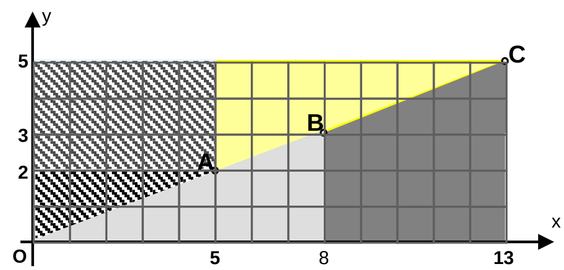
Родбинске везе: Када су мушкарац и жена ушли у продавницу, трговац који их није познавао, рече: „Добар дан желим мужу и жени? Шта ви желите?“ „Ми нисмо муж и жена“, одговорила је жена, „Него је моја мајка свекрва мајке овог човека!“ У ком су сродству?

Решење: Модел: :



Где је грешка? Квадрат 8 X 8 и правоугаоник 13 X 5 који је настао разлагањем квадрата на два трапеза и два троугла имају једнаку површину. Где је грешка?





Пожар: (Савезно 2001.) Становници села А увек говоре истину, становници села В увек говоре лажи, а сваки становник села С наизменично говори истину и лаж. Дежурни ватрогасац је телефоном примио поруку из једног од ова три села: „Код нас је пожар!“ , јавио је један од становника. „Где?“ – упитао је дежурни. „У селу С!“ У које место треба да оде ватрогасна екипа?

Бојење коцке: За бојење једне стране коцке потребно је 10 секунди. Одреди најкраће време у току којег 3 човека могу да обоје 7 коцки?. Претпоставља се да два човека не могу бојити једну коцку истовремено.

Израда намештаја: Потребно је израдити 50 комада намештаја. Сваки комад треба да се обоји и потом монтира. За бојење једног комада потребан је 1h, а за монтажу 2h. После бојења сваки комад треба да се суши пола сата. Пословођа може да ангажује највише 10 радника од којих су неки фарбари, а неки монтажери. Колико којих радника треба да узме да би се посао завршио за најкраће могуће време? (На једном комаду намештаја не могу да раде два радника истовремено)

Пакети: У фабрици производе пакују у пакете од 3kg и 5kg. доказати да се овим паковањима може испоручити свака поруџбина већа од 7kg.

Решење: Нека поруџбина садржи x пакета од по 3kg и y пакета од 5kg.

Тада имамо једначину $3x + 5y = n$, $n \in N$, $n > 7$

Како је $n = 3k$ или $n = 3k+1$ или $n = 3k+2$, то имамо следеће случајеве:

- Ако је $n = 3k$, онда се роба испоручује пакетима од по 3kg
- $n = 3k+1 = 3(k-3) + 10$, од k пакета масе 3kg узму 3 пакета и замене са два пакета од по 5kg
- $n = 3k+2 = 3(k-1) + 5$,онда се се од k пакета масе 3kg узме један и замени пакетом од 5kg.

Лажни златник: Од 100 златника један је лажан и лакши од осталих. Одреди поступак којим се уз помоћ ваге без тегова, у минималном броју корака, сигурно одређује лажни златник.

Каса са динарима: За тачно решен задатак – рече брат сестри-пренећемо из из моје касе у твоју 1 динар. Ако не решиш тачно први задатак, пренећемо из твоје у моју касу такође 1 динар. Прелазимо на други задатак који вреди два динара, затим трећи који вреди 4, и тако даље, сваки следећи два пута више од претходног. Сестра је прихватила услове. После десетог задатка била је задовољна јер је освојила 601 динар. Одреди редне бројеве задатака које је тачно решила.

(4) ....Модели једначина, неједначина

Чоколаде: Дечак је купио 100 чоколада за 5000. Велика је коштала 500 динара, средња 100, а мала 10 динара. Колико је великих, средњих и малих чоколада купио дечак?

Орање (Савезно 1973) Група тракториста треба да пооре две њиве (једна је по површини два пута већа од друге). Први дан су орали прву њиву, а онда су се поделили па је другог дана половина групе довршила орање прве њиве, а друга половина је орала другу. Како нису могли да заврше орање друге њиве, један тракториста је радио још два дана. Колико је било тракториста у групи?

Година рођења: Данас Милан и Ана славе рођендан и навршавају онолико година колико износи збир цифара године његовог рођења. Ког датума су рођени ако се зна да је: а) Милан рођен у XX, а Ана у XXI веку ?

Радници: Два радника могу да заврше посао за 12 дана. После заједничког рада од 5 дана, један се разболео па је други сам завршио посао за 17,5 дана. За колико дана може да заврши посао сваки радник радећи сам?

Решење: Означимо са x и y број дана који је потребан првом, односно другом раднику да сам уради посао. Тада први радник за 1 дан уради 1/x -ти, други 1/y -ти део посла. Према датим условима добијамо систем једначина: $\frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1 \wedge \frac{5}{x}+\frac{5}{y}+\frac{17{,}5}{y}=1$ Решење x=20, y=30

Краве на ливади: На ливади расте трава. Када би се на ливаду пустило 9 крава, оне би попасле сву траву за 4 дана, ако би на њу било пуштено 8 крава, оне би попасле сву траву за 6 дана. Колико се крава може прехрањивати на ливади док год расте трава?

Крава, коза и гуска: У току дана крава сама попасе онолико траве колико коза и гуска попасу заједно. Колико дана могу пасти истовремено крава, коза и гуска на ливади на којој могу пасти: крава и коза 45 дана, крава и гуска 60 дана, коза и гуска 90 дана ?

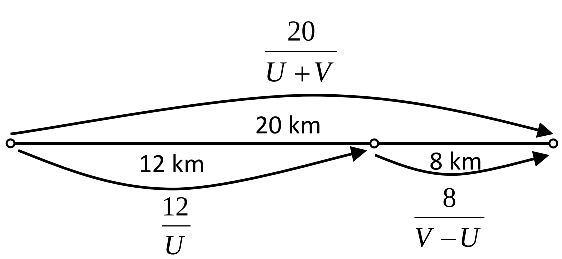
Воз на мосту: Воз прелази преко моста дугачког 171м за 27 секунди (рачунајући од тренутка наиласка локомотиве на мост до изласка последњег вагона), а са пешаком који иде у сусрет возу брзином 1m/s мимоилази се за 9 секунди. Израчунај брзину воза и његову дужину.

Решење: Како воз брзине v прелази дужину моста и своју дужину (l) за 27 секунди, то је:

171 + l = 27v Мимоилажење воза и пешака траје 9 секунди, па је: l – 9 = 9v

Решавањем система једначина добијамо l = 99m, v = 10m/s

Обалом реке: Математичар се у току шетње која је трајала 7 сати, чамцем одвезао 20 km низводно и затим се вратио на полазно место. У повратку је на удаљености 12 km од места поласка срео сплав којег је претекао баш када је пошао у шетњу. Одреди брзину чамца низводно.



Нека је V брзина чамца у мирној води, U брзина сплава. Онда је V+U брзина чамца низводно и V – U брзина чамца узводно.

Време проведено у шетњи низ реку $\frac{20}{V+U}$, а уз реку $\frac{20}{V-U}$, па је. $\frac{20}{V+U}+\frac{20}{V-U}=7$ ....(1)

Са друге стране, време потрошено до сусрета, за чамац и сплав је: $\frac{20}{V+U}+\frac{8}{V-U}=\frac{12}{U}$

Сређивањем добијамо $V=\frac{7}{3}U$, па је $V+U=\frac{10}{3}U$ и $V-U=\frac{4}{3}U$ Заменом у (1) добијамо да је U=3, V=7.

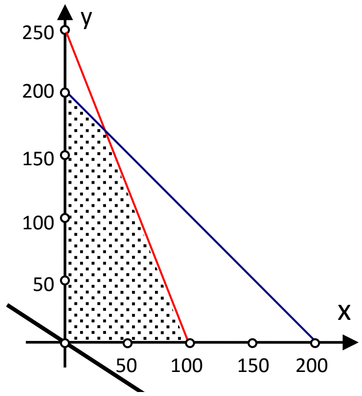
Брзина чамца низводно износи 10 km/h

Производња обуће:: Фабрика обуће производи нови модел мушке ципеле и нови модел женске чизмице за чију се производњу користе исте сировине. Зарада која ће се остварити од једног пара ципела износи 20 €, а од једног пара чизмица 30 €. За обраду једног пара ципела неопходно је у првом погону утрошити укупно 4 h, а за један пара чизмица 4 h рада. За обраду једног пара ципела у другом погону се утроши 5 h, а за једнан пар чизмица 2 h рада. Радом се може ангажовати 800 радних часова у првом и 500 часова рада у другом погону. Одредити производње ових производа за који ће се остварити максималан зарада.

Решење: Одговарајући математичи модел постављеног проблема је: $20x + 30y \rightarrow$ максимум

Услови: $4x + 4y \le 800$, $5x + 2y \le 500$, $x,y \ge 0$

Напишимо ограничавајуће услове у облику једначина: $4x + 4y = 800 \ \wedge \ 5x + 2y = 500$



Три ограничења образују затворен конвексан скуп , где се налази и тачка која представља оптимално решење. Конвексан скуп је скуп могућих решења, јер свака тачка тог скупа задовољава постављена ограничења, али не максимизира функцију циља. Функција циља достиже максимум у једној од тачака допустивог скупа.,

Ако сада претпоставимо да је функција циља једнака нули, односно: $20x + 30y = 0$, $y = - 2/3\ x$

Са повећавањем вредности функције циља, график се помера паралелно почетном положају све док се не поклопи са тачком (0,200). Вредност функције циља у тачки оптимума је: $20 \cdot 0 + 30 \cdot 200 = 6000$. Провери!

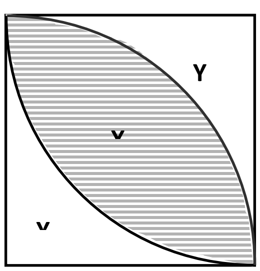
Доручак: Ученик за доручак има овсене пахуљице и млеко. Препорука је да једним оброком треба унети најмање 30g протеина, 80g угљених хидрата и 25g масти. Састав намирница (за количину 100g) и одговарајућа цена дати су таблицом:

Како треба направити оброк да се задовољи препорука лекара уз најнижу могућу цену?

	Овсене пахуљице (2)	Млеко (1)
Протеини(g)	14	3
Угљенихидрати(g)	64	3
Масти(g)	6	4

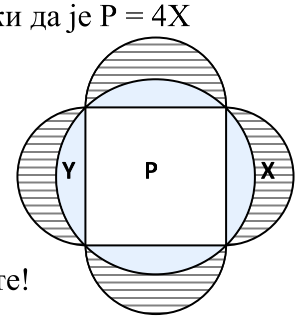
Сложене фигуре:

I) Квадрат странице *a*. Површина (X) шрафираног дела

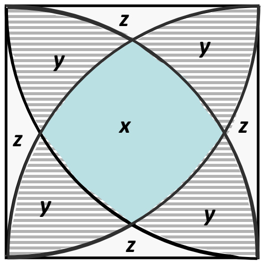


Систем две линеарне једначине са две непознате!

II) Докажи да је P = 4X



III) Дат је квадрат странице a. Око његових темена описане су четири кружнице полупречника *a* којима је одређен део равни (плава фигура). Одреди површину плаве фигуре у функцији странице квадрата a.



Означимо површине одговарајућих делова са x,y,z.

Можемо записати следеће једначине:

$$x + 4y + 4z = a^2$$

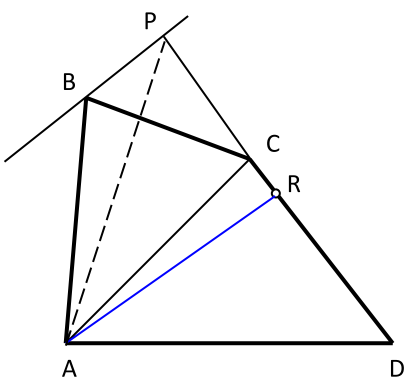
$$x + 3y + 2z = \frac{a^2\pi}{4}$$

$$x + 2y + z = \frac{a^2\pi}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$x = \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)a^2 \approx 0{,}315a^2$$

(5) …………Геометријски модели

Подела круга: Дати круг поделити концентричним кругом на два дела једнаких површина
Подела квадрата: Подели квадрат на три дела једнаких површина правама које су паралелне са дијагоналом.
Подела трапеза: Основице трапеза су a и b. Одреди дуж која је паралелна са основицама и дели трапез на делове једнаких површина
Подела троугла: Правом паралелном страници подели дати троугао на два дела једнаких површина
Подела четвороугла: Правом која садржи теме A конвексног четвороугла ABCD подели четворугао на два дела једнаких површина.



- Дијагонала AC
- Права кроз B паралелна са AC и нека је P пресечна тачка те праве са правом DC
-ΔAPC и ΔABC имају заједничку страницу AC, једнаке висине, па су једнаких површина
- Нека тачка R ,средина DP, припада страници CD
- Како је висина ΔDAR и ΔDAP заједничка, а основица DR првог је половина основице DP другог, то је:

$P_{DAR} = \frac{1}{2} P_{DAP}$ $\quad P_{DAP} = P_{DAC} + P_{CAP} = P_{DAC} + P_{ABC} = P_{ABCD}$

- Права AR је тражена права
- Размотри случај да тачка R лежи изван странице CD!

Крива поделе троугла: Лук бисекције је проста крива која дели затворену област на два дела једнаких површина. Најкраћи лук бисекције за круг је његов пречник, а за квадрат дуж која спаја средине наспрамних страбица. Који је најкраћи лук бисекције за једнакостранични троугао?

Правоугаоник у троуглу: Из тачке M на хипотенузи правоуглог троугла спуштене су нормале на обе катете. Одреди положај тачке M тако да добијени правоугаоник има највећу могућу површину. (Хипотенуза AB = 10cm , катете 8 cm и 6 cm)
Правоугаоник у делтоиду: У делтоид дијагонала $d_1 = 12$,$d_2 = 4$ упишите правоугаоник тако да су му странице паралелне са дијагоналама делтоида. Који од уписаних правоугаоника има највећу могућу површину?
Кружни прстен у круг: Конструиши круг чија је површина једнака површини кружног прстена између две задате кружнице.
Правоугаоник у квадрат: Конструиши квадрат чија је површина једнака површини датог правоугаоника. („Претвори правоугаоник у квадрат једнаке површине”)
Троугао у једнакостранични троугао: Конструиши једнакостранични троугао чија је површина једнака површини датог троугла
Ограда: Од свих правоугаоника обима 2016 cm одреди онај који има највећу површину

Парче пице: Који кружни исечак датог обима 100 cm има највећу могућу површину?

Раскршће: Две полуправе Aa и Bb се секу. Одабрати тачке M на Aa и N на Bb тако да је AM = BN. Одреди положај тачака M и N тако да је дуж MN најкраћа могућа.

Два троугла: (Републичко 2006.) Дата су два подударна једнакокрако-правоугла троугла чије су катете дужине1 cm . Одреди максималну површину пресека ових троуглова која се добија померањем троуглова по правој p.

(6)………. Математика и неке животне ситуације:

Гусарско благо: Један морнар је пронашао лист пергамента на коме су били подаци о географском положају пустог острва са скривеним гусарским благом: На јужној страни острва налази се ливада на којој расту палма и еукалиптус. Мало даље су вешала. Пођи од вешала ка еукалиптуси број кораке, затим се окрени удесно за 90º, направи исти број корака и потом забоди кочић у земљу. Онда опет пођи од вешала према палми и број кораке. Код палме се окрени улево за 90º и продужи за исти број корака. Када се зауставиш, забоди кочић. Благо се налази на средини између та два кочића. Морнар је пронашао острво, ливаду, палму и еукалиптус, али од вешала није било ни трага.

Девојка и удварач: Девојка је летовала у кампу поред језера кружног облика. Имала је више удварача од којих је један био прилично упоран али врло одбојан, за избегавање. Једног дана испловила је чамцем на језеро и упутила се ка центру где је усидрен сплав. Тада је опазила на обали досадног удварача. Удварач је размишљао: „ Пре или касније, она ће морати да изађе на обалу. Како ја четири пута брже трчим него што она може да се креће у чамцу, сачекаћу је у тренутку кад чамац пристане на обалу. Девојка је знала да на обали може лако да утекне, али је потребно да стигне до обале пре него што удварач дотрчи до места искрцавања. Ипак, смислила је стратегију за спас из настале ситуације! Како?

Решење: Означимо са v брзину кретања чамца, а 4v брзина удварача

- Девојка (D) весла око центра (C) тако да центар увек буде између ње и удварача (U)
- Држећи се курса (праве) D-C-U, истовремено весла према обали. Све док не отплови од центра језера на растојање једнако четвртини полупречника!
- У том моменту угаона брзина девојке ω_D једнака је угаоној брзини удварача $\omega_U = \dfrac{4v}{r}$
- Од тог тренутка девојка весла праволинијски U – C – D до најближе тачке на обали
- Време за које стиже до обале $t_D = 3r / 4v$. Да би удварач стигао до тачке искрцавања мора да пређе полуобим језера $r\pi$. Међутим он ће за време t_D прећи пут $s = v_U \cdot t_D = 4v \cdot \dfrac{3r}{4v} = 3r < r\pi$

Билијар: На билијарском столу налазе се две кугле А и В. Како треба управити куглу А, да она, пошто удари о две суседне ивице стола, удари у куглуВ.

Балони и сок: Два дечака имају балон од 8*l* пун сока и два празна балона од 6*l* и 3*l*. Треба да поделе сок на два једнака дела, а при подели користе само та три балона.

Решење :

8*l*	8	5	5	2	2	7	7	4	4
5*l*	0	0	3	3	5	0	1	1	4
3*l*	0	3	0	3	1	1	0	3	0

Таблица не даје одговор на питање које правило треба применити да би се дошло до решења!
Зато, означимо са ***x*** и ***y*** : количине вина које остају у првом и другом балону после сваког пресипања

Онда у трећем балону остаје $8 - (x + y)\, l$

По условима задатка:

$0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 5$, $0 \le 8 - x - y \le 3$ или $0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 5$, $5 \le x + y \le 8$

Правоугли координатни систем:

Балони и сок II: Помоћу две празне боце запремине 9*l* и 5*l* одлијте један литар воде из пуне 12 – литарске посуде.

Злато и дијаманти: (Изборно 1998.) Али-баба се налази у пећини у којој има злата и дијаманата. Килограм злата кошта 20 н.ј.,а килограм дијаманата 60н.ј. Има само један празан ковчег занемарљиве тежине. Пун ковчег злата тежи 200kg, а пун ковчег дијаманата 40kg. Али-баба може да понесе 100kg. Колико злата и колико дијаманата треба да понесе да би зарада у новцу била максимална?

Избори: У једном одељењу од 30 ученика бира се председник одељенске заједнице. Кандидати су Ана, Бојан и Маја. Прва група од 13 ученика гласа за Ану, потом су наклоњени Бојану док за Мају не би никада гласали. Друга група од 7 ученика гласа за Бојана, подносе и Мају, док Ани не би дали глас.

Преосталих 10 ученика гласа за Мају, наклоњени су Бојану,али не и Ани. Који ће кандидат бити изабран ако се избори: а) завршавају једним гласањем (у једном кругу).
б) спроводе у два круга где у други круг иду два кандидата са највећим бројем гласова
ц) спроводе у три круга (турнирски) где се у сваком кругу надмећу по два кандидата. Победник је онај који у сва три круга добије највише гласова.

Излаз из шуме: Марко се нашао у шуми конвексног облика, површине 60 km^2. Без оријентира, са машином која троши 0,2*l* горива по километру, а он има само 4,4 *l* у резервоару. Како може да изађе из шуме?

Најкраћи пут II: Два брода A и B налазе се усидрени на мору недалеко од праволинијске обале *p*. Са једног брода послат је чамац на други брод. Чамац, успут, мора да искрца на обалу једног путника. Одреди (конструиши) најкраћи пут којим чамац треба да иде да би обавио задатак.

Састанак: Младић и девојка су заказали састанак у парку у времену од 8 до 9 сати, Договорили су се да онај ко дође први не чека другог више од 15 минута. Колика је вероватноћа да ће се они састати у договореном временском интервалу?
РЕШЕЊЕ: • Нека је момак дошао у 20 сати и **x** минута, а девојка у 20 сати и ***y*** минута.
• Тада је по услову задатка: $0 \leq x \leq 60$ и $0 \leq y \leq 60$
• Да би до сусрета дошло пред услова потребно је и довољно да буде $|x - y| \leq 15 <=> -x + y \leq 15 \leq x - y \leq 15$
• У правоуглом координатном систему тачке (x , y) налазе се у квадрату са теменима (0 , 0) , (60 , 0) , (60 , 60) и (0 , 60) До сусрета ће доћи ако се налази у шрафираној области одређеној правама $x - y = 15$, $-x + y = 15$ и деловима страница квадрата Однос површина је: $\left(60^2 - 45^2\right):60^2 = 7:16$. Мање од 50 %

Ломљење штапа: Штап дужине ***a*** ломи се на случајан начин на три дела. Колике су шансе (вероватноћа) да се од тако добијених делова може конструисати троугао?

Минимална дужина пута: Четири села смештена су у теменима квадрата странице 10km. Становници желе да споје та села системом путева али имају средстава за само 28 km пута. Како треба да поступе ?
Упутство: Користимо решење задатка: Одреди тачку у троуглу ABC тако да је збир њених растојања од темена троугла минималан. (Минимум је у тачки O, када су три угла AOB, AOC, BOC једнакиа)

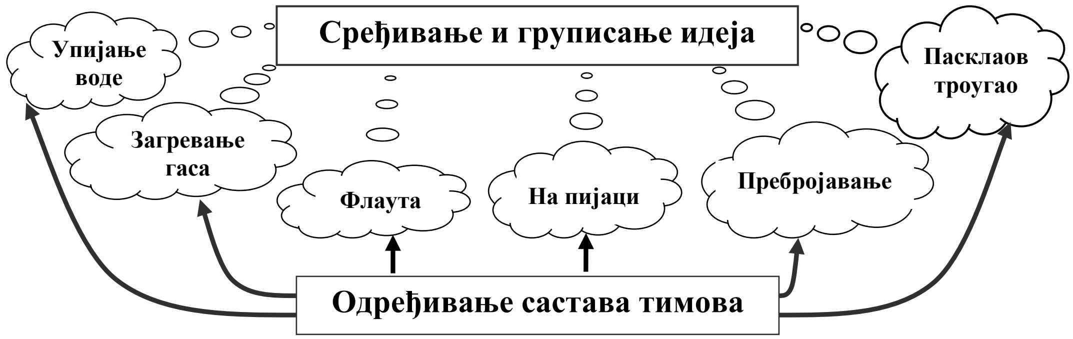
Мужеви и жене: Три мушкарца са својим женама су на обали реке и желе да се превезу на другу обалу. Имају чамац у који могу да се сместе највише две особе. Али, ниједан муж не дозвољава да његова жена остане са другим мушкарцем без његовог присуства. Успели су да се превезу на другу обалу. Како?

Подела чоколаде: (Д. 8. 2007.) Брат и сестра имају чоколаду квадратног облика која се састоји од 27·27 "коцкица". На почетку је чоколада код брата. Онај ко држи чоколаду пресече је једним праволинијским потезом на два дела, тако да не оштети ни једну коцкицу. Један део поједе, а други да противнику. Губи онај играч који добије само једну коцкицу. Који од играча може смислити стратегију којом побеђује независно од тога како паротивник игра и која је ро стратегија?

Преко моста: (Републичко 2000.) Породица има само један фењер и треба да по ноћи, у најкраћем року, пређе трошним мостом преко реке. Отац пређе мост за 1, мајка за 2, дечак за 5, а бака за 10 минута. Колико је најмање потребно времена да сви пређу преко моста ако се на мосту истовремено могу наћи највише две особе, ако морају са собом носити фењер? (Бржа особа хода брзином спорије, а ношење преко моста није могуће).

Необично путовање: Пешак полази из тачке A и иде 1 km према југу, затим скреће под правим углом и иде 1 km према истоку, поново скреће под правим углом и иде 1 km према северу. После 3 km поново се нашао у тачки A,. Одредити на површини Земље све тачке за које је такво путовање могуће.

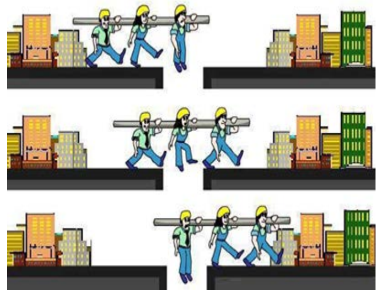
(7) ………Пројектна настава. Тимски рад



Прикупљање података

Тимски рад

Мерења:
- Запремине сунђера
- Запремине воде
- Запремине гаса
- Температуре гаса



- Паскалов троугао:
- Литература, интернет
- Уџбеник биологије
- Деоба ћелије
- Размножавање зечева
- Тачке на кругу
- Природни бројеви
- Подскупови скупа
- Бацање новчића

- Свирање на флаути или фрули
- Утврђивање зависности висине тона од дужине цеви
- Разговор са људима који раде на пијаци
- Праћење продаје јаја на пијаци, цене и количине

Обрада и анализа

Систем две линеарне једначине са две непознате. Решење. Линеарна функција. График. Скуп, елементи скупа, пребројавање. Математички модел. Провера модела.

Завршни радови - синтеза

Израда презентације

Презентација

Упијање воде: Веза запремине сунђера и количине воде коју сунђер може да упије је линеарна $f(x) = ax + b$, где је x запремина сунђера, f(x) је количина воде коју та запремина може да упије. Познато је да сунђер запремине 1 dm^3 упије 0,6*l* воде, а сунђер запремине 2 dm^3 упија 1,1 *l* воде.
а) Израчунати *a*, b. Математички модел (функција)
б) Колико упија сунђер запремине 1,6 dm^3 ?
в) Колика је потребна запремина сунђера да би упио 1 *l* воде ?

Загревање гаса: Нека количина гаса заузимала је на температури 20°C запремину од 107 cm^3, а на 40°C запремину 114 cm^3 . а) Изрази запремину V у функцији температуре t.
б) Колика је запремина на 0°C ? в) На којој температури је запремина гаса 124,5 cm^3 ?

На пијаци: Бака продаје на пијаци разно поврће. Понудила би на продају одређену количину јаја, зависно од цене. Ако је цена 14 динара, понудила би 80 комада; ако је цена 15 динара, 60 комада, и тако даље.
а) Изрази зависност понуде од цене (Математички модел). б) Представи графички
Потражња купаца за јајима је таква да се по цени од 10 динара прода 165 комада. Повећањем цене за 1 динар, број продатих јаја се смањује за 10. Потражња (број продатих јаја) (y) зависи од цене (x).
а) Изрази зависност потражње од цене (Математички модел) б) Представи графички

Флаута: Уочили смо: што је цев дужа, тон је дубљи, што је цев краћа, тон је виши
Придружујемо координате тачака, уочавамо линеарну зависност $y = kx + n$ висине тона (y) од дужине цеви (x).

Паскалов троугао:

Деоба ћелије. Тачке на кружници. Бацање новчића. Послужи се бомбонама!
Природни бројеви. Размножавање зечева.

ЛИТЕРАТУРА :

[1] Др Ратко Тошић: Решени задаци за младе математичаре - Научна књига - Београд -1990.
[2] Др С.Прешић , Др Б. Алимпић: Збирка задатака из математике, Свјетлост, Сарајево -1977.
[3] Др Владимир Стојановић: Математископ 3 – Научна књига – Брограd -1985.
[4] Борисав Симић: И то је математика – Епоха – Пожега – 2006.
[5] Борисав Симић: Занимљива математика – Епоха – Пожега - 2006.
[6] Иновације у настави математике; 7. Стручно-методички скуп, Пула 2011.
[7] Корелација математике са другим наставним предметима, 8.Стручно-методички скуп, Пула 2013.
[8] Група аутора:1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа, ДМС, Београд
[0] Зоран Ловрен , Милорад Шуковић: Нула линеарне функције;примене ЗУОВ - База знања, 2008
[10] Милорад Шуковић , Зоран Ловрен: Математичко моделирање. Линеарна функција, Ниш, 2008.
[11] Даринка Јаношевић, Никола Чепинац: Збирка задатака из планиметрије
[12] Ђ. Такачи, Д. Пешић, Ј. Татар: Процес математичког моделирања у настави математике
[13] Марковић З.: Математичко моделовање у математичком образовању IMO, III, Broj 4, 35-50
[14] Стјепановић И.: Математичко моделовање у основној школи IMO, IV, Broj 6, 25-29
[15] Миодраг Петковић: Атрактивна геометрија, Математископ, 2003.
[16] Учење математике преко модела из реалног живота, ОШ „Петро Кузмајк“ Руски Крстур,2011.