Друштво математичара Србије
Републички семинар 2015.
Ниш, 17.-18. јануар

Инверзија-Симетрија у односу на круг

Аутор и реализатор радионице:
др Ђорђе Баралић, Математички Институт САНУ, Београд
e-mail: djbaralic@mi.sanu.ac.rs

Ово предавање је део пројектних активности пројекта **Примјена динамичког софтвера Cinderella у научно-техничким истражива-њима, математици и образовању** које подржава Министарство науке и технологије Републике Српске.

1 Дефиниција и основне особине

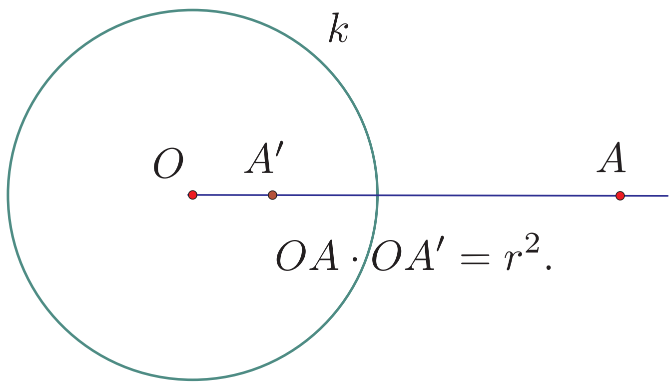
Нека је O фиксирана тачка у равни π и нека је $r > 0$ фиксирани позитивни реални број. Нека је $k = k(O, r)$ круг са центром у O и полупречником r.

Дефиниција 1.1. *Инверзија у односу на круг̄ k* је пресликавање

$$\phi_k : \pi \setminus \{O\} \to \pi \setminus \{O\},$$

које свакој тачки $A \in \pi \setminus \{O\}$ (Слика 1) додељује тачку $\phi_k(A) = A'$ на полуправој OA са почетком у O такву да је

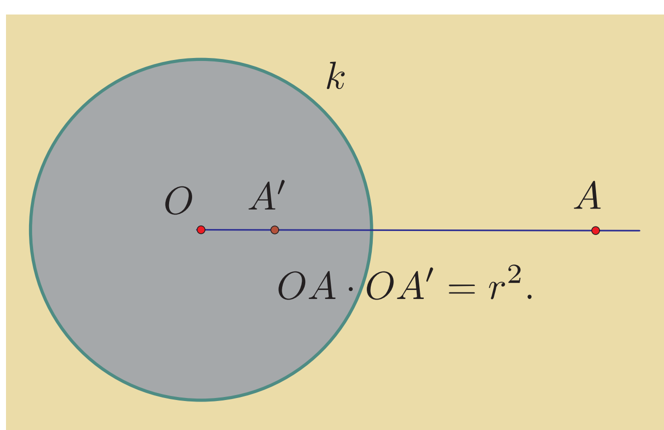
$$OA \cdot OA' = r^2.$$



Слика 1:

Круг k зовемо *круг̄ом инверзије*, а тачку O *ӣолом* или *ценӣром инверзије*. Уколико је круг k познат или га није потребно посебно нагласити, пресликавање кратко зовемо *инверзија*. У литератури се јавља много ознака за инверзију поред оног у дефиницији 1.1, као нпр. I_O^k, $I_{O,r}$, $\phi_{k(O,r)}$, φ_k и сл. За одређену ознаку је најбоље определити се у зависности од конкретне ситуације и особине инверзије коју ћемо користити.

Из дефиниције 1.1 је очигледно да важи следеће тврђење.



Слика 2:

Став 1.1. *Тачка A се слика у саму себе ӣри инверзији ϕ_k ако и само ако A лежи на круг̄у инверзије k.*

Заправо, услов из дефиниције 1.1 повлачи да ако је $OA \leq r$ тада је $OA' \geq r$, односно ако је $OA \geq r$ тада је $OA' \leq r$, Слика 2. Другим речима важи:

Став 1.2. *Инверзија слика унутрашњу област круга инверзије k у спољашњу и обратно.*

Једно од очигледних својстава инверзије је садржано у следећој теореми.

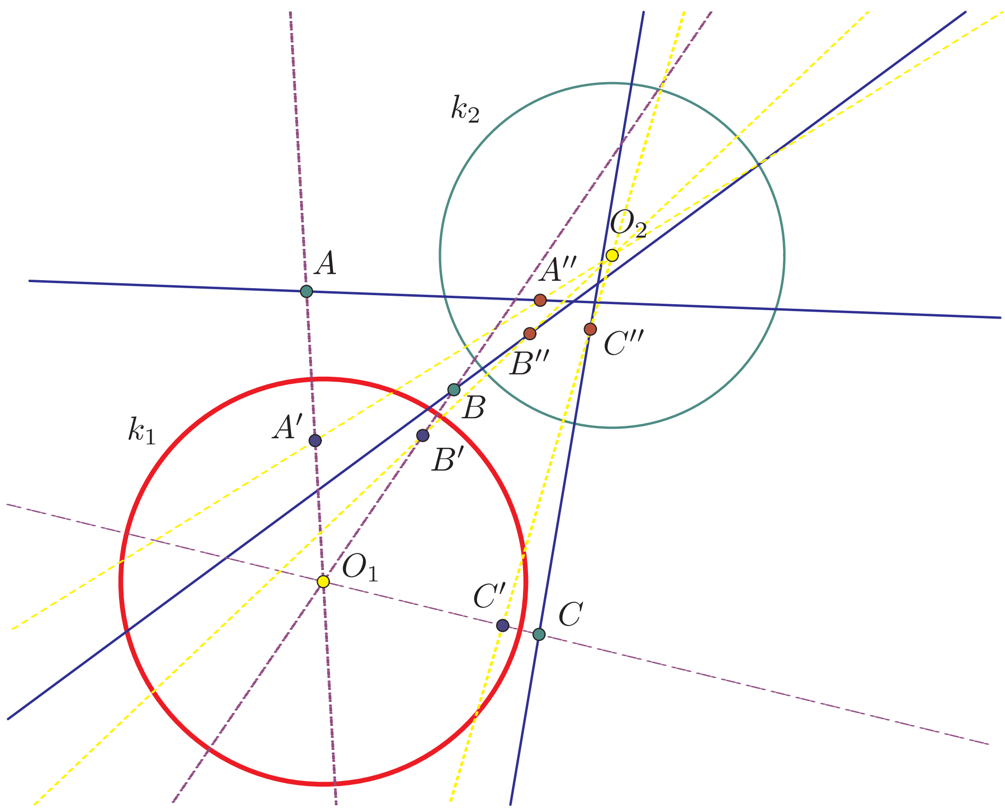
Теорема 1.1. *Инверзија је инволутивно пресликавање, тј. за сваку тачку $A \in \pi \setminus \{O\}$ важи:*

$$\phi_k(\phi_k(A)) = A.$$

Доказ. Нека је $\phi_k(A) = A'$ и $\phi_k(A') = A''$. Из дефиниције 1.1 инверзије следи да су тачке A, A' и A'' на истој полуправој OA и да важи

$$OA \cdot OA' = r^2 = OA' \cdot OA'',$$

одакле је јасно $OA = OA''$ и $A'' \equiv A$. $\square$



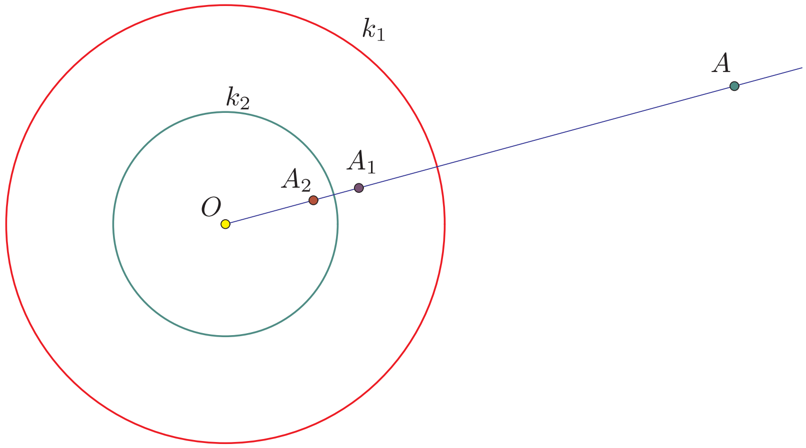
Слика 3:

Теорема 1.1 каже да је композиција инверзије са самом собом идентитично пресликавање. Она такође повлачи да је композиција било које две инверзије укључујући и оне са различитим круговима једна бијективна трансформација, али као што можемо приметити на Слици 3, овако добијена трансформција у општем слувају не мора бити инверзија у односу на неки нови круг. Ово закључујемо из чињенице да свака права које спаја тачку са њеном сликом при инверзији мора пролазити кроз пол инверзији, што праве које су нацртане пуном линијом на Слици 3 очигледно не испуњавају.

Ипак, у неким специјалним случајевима као што је Став 1.3 можемо одредити које тачно пресликавање даје композиција две инверзије.

Став 1.3. *Нека су ϕ_{k_1} и ϕ_{k_2} две инверзије у односу на два концентрична круга $k_1(O, r_1)$ и $k_2(O, r_2)$. Тада је композиција $\phi_{k_1} \circ \phi_{k_2}$ хомотетија са центром у полу обе инверзије O и коефицијентом $\frac{r_2^2}{r_1^2}$.*

Доказ. Нека је $A \in \pi \setminus \{O\}$ произвољна тачка. Нека је $\phi_{k_2}(A) = A_2$ и $\phi_{k_1} \circ \phi_{k_2}(A) = \phi_{k_1}(A_2) = A_1$, Слика 4. Тачке A, A_2, A_1 и O су очигледно колинеарне и припадају истој полуправој OA. Такође важе



Слика 4:

релације $OA \cdot OA_2 = r_2^2$ и $OA_2 \cdot OA_1 = r_1^2$. Њиховим дељењем се добија

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{r_2^2}{r_1^2},$$

одакле директно следи тврђење. $\square$

1.1 Конструкција слике тачке при инверзији

У односу на класичне симетрије у односу на тачку или праву, сам опис слике тачке при инверзији дат дефиницијом 1.1 делује геометријски немотивисано и потпуно је легитимно поставити питање *Како конструисати слику дате тачке при инверзији?*. Геометријско тумачење и решње овог проблема дајемо овде.

Нека је фиксиран круг $k(O, r)$ и нека је дата тачка A ван круга k. Нека су t_1 и t_2 тангенте из тачке A на круг k, а P_1 и P_2 на t_1 и t_2 редом, тачке додира ових тангенти са кругом k. Нека је A_1 пресечна тачка праве P_1P_2 и праве OA, Слика 5.

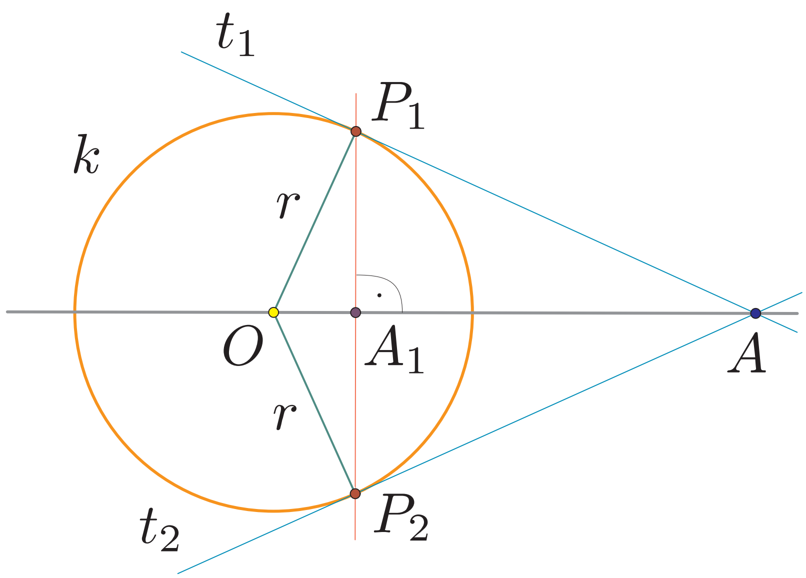
Став 1.4. *Права P_1P_2 је нормална на праву OA.*

Доказ. Како је $OP_1 = OP_2 = r$ и $AP_1 = AP_2$ као тангентне дужи, то тачке A и O леже на симетрали дужи P_1P_2, односно права AO је нормална на праву P_1P_2 као симетрала дужи P_1P_2. $\square$

Став 1.5. *Троуглови OP_1A и OA_1P_1 су слични.*

Доказ. $\triangle OP_1A$ и $\triangle OA_1P_1$ су правоугли троуглови (Став 1.4) са једним заједничким углом код темена O, па је $\triangle OP_1A \sim \triangle OA_1P_1$. $\square$

Последица 1. *Тачка A_1 је слика тачке A при инверзији у односу на круг k.*



Слика 5:

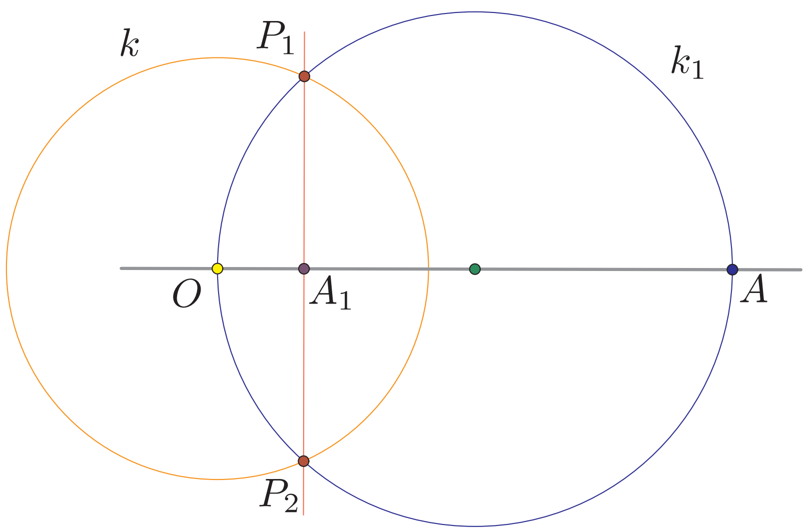
Доказ. Из сличности коју смо доказали у Ставу 1.5, добијамо $OP_1 : OA_1 = OA : OP_1$. Одавде је

$$OA \cdot OA_1 = {OP_1}^2 = r^2.$$

□

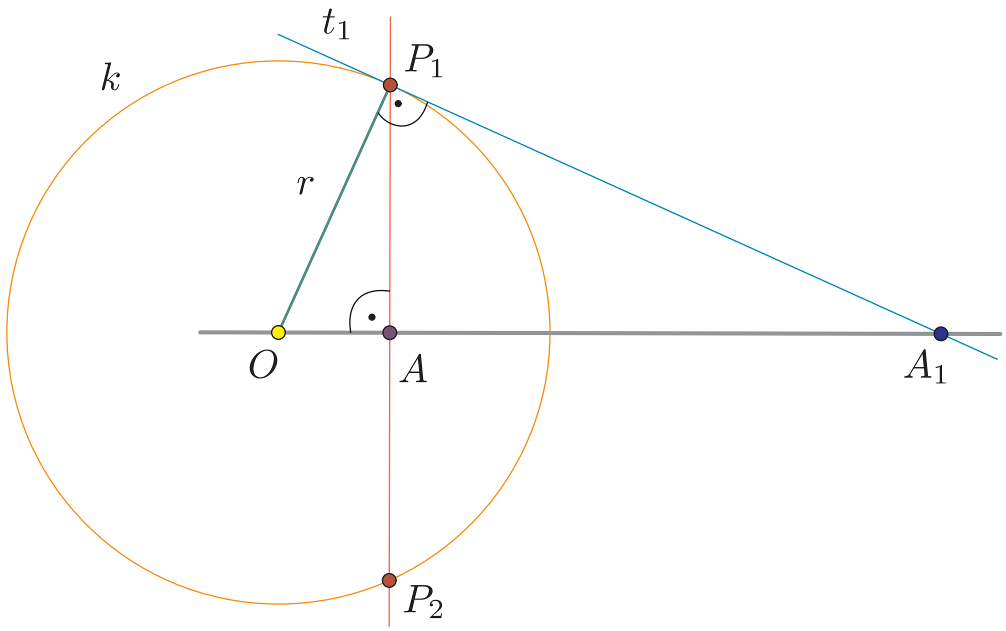
Права P_1P_2 се још назива и *полара тачке* A *у односу на круг* k. Претходно разматрање је заправо анализа и доказ геометријског начина да конструишемо слику при инвезији дате тачке. Из њега следи да:

- У случају да је тачка A ван круга k, најпре конструишемо круг k_1 са OP као пречником, Слика 6. Пресечне тачке P_1 и P_2 кругова k_1 и k спојимо и у пресеку праве P_1P_2 са OA добијамо тачку A_1 слику тачке A при инверзији у односу на k.



Слика 6:

- У случају да је тачка A ван круга k, најпре конструишемо нормалу на праву OA у тачки A, Слика 7. Нека је P_1 једна од пресечних тачака ове праве са кругом k и у њој конструшемо нормалу t_1 на полупречник OP_1. У пресеку ове нормале тј. тангенте t_1 круга k и праве OA налази се тачка A_1, слика тачке A при инверзији у односу на k.



Слика 7:

2 Слике правих и кругова при инверзији

У овом делу ћемо видети да слика праве у инверзији може бити права или круга, као да исто важи и за круг. Ова чињеница чини инверзију јако занимљивим пресликавањем, јер нам омогућава "исправљање кругова"и прелазак на геометријски мање сложенију ситуацију.

Теорема 2.1. *Права p која пролази кроз центар O инверзије ϕ_k слика се у саму себе.*

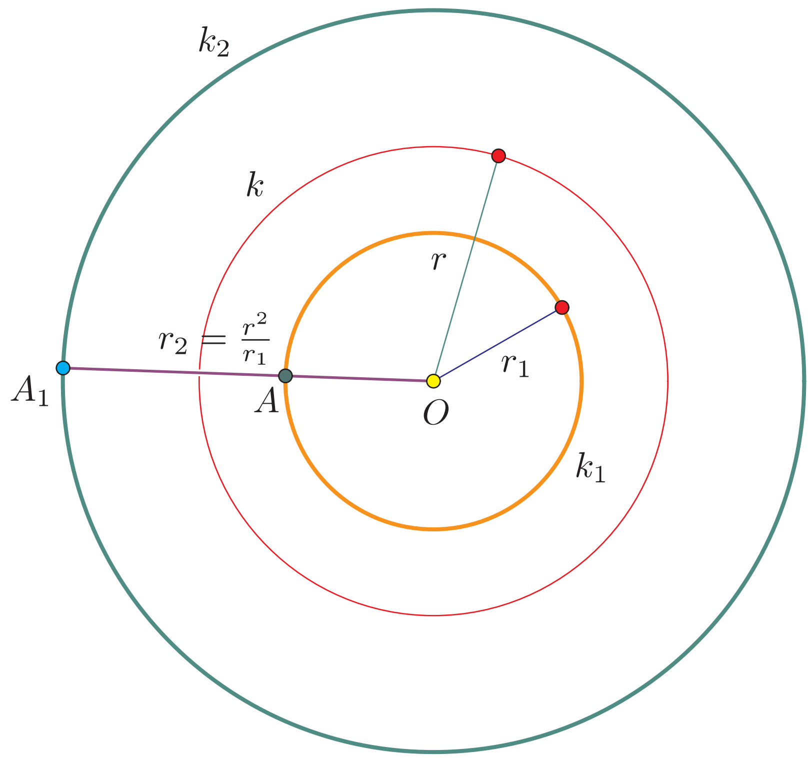
Доказ. Из дефиниције 1.1 је јасно да је $\phi_k(p \setminus \{O\}) \subseteq p \setminus \{O\}$. Из инволутивности (Теорема 1.1) је $p \setminus \{O\} = \phi_k(\phi_k(p \setminus \{O\})) \subseteq \phi_k(p \setminus \{O\})$. Дакле, $\phi_k(p \setminus \{O\}) = p \setminus \{O\}$. □

Теорема 2.2. *Круг концентричан са кругом k инверзије ϕ_k слика се у круг концентричан са кругом инверзије.*

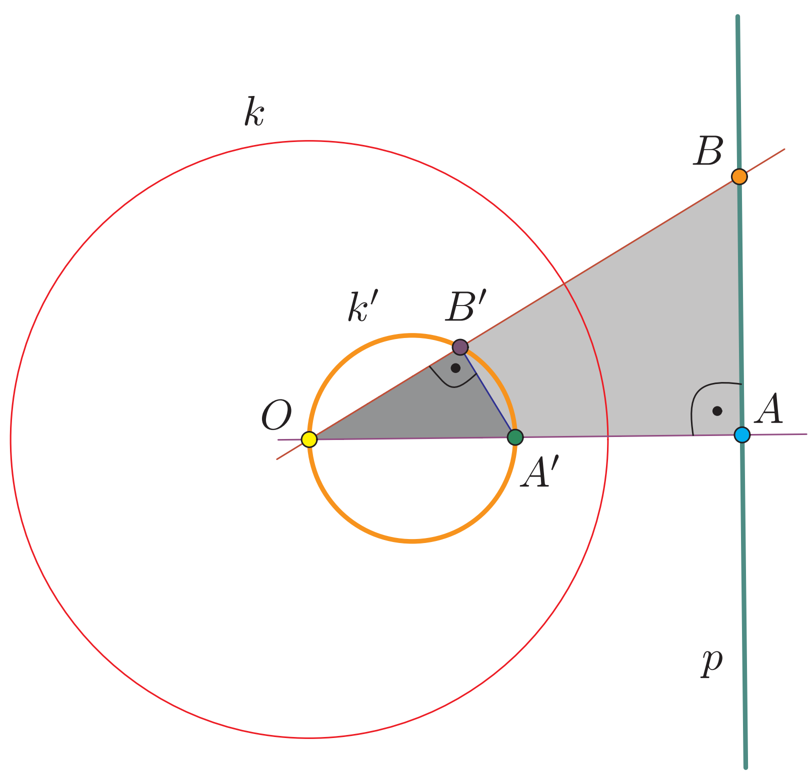
Доказ. Нека је r_1 полупречник круга k_1 чији је центар уједно и центар инверзије O. Нека је A произвољна тачка овог круга, Слика 8. Тада се по дефиницији 1.1 при инверзији ϕ_k слика у тачку A_1 такву да је $OA_1 = \frac{r^2}{r_1}$. Дакле, $\phi_k(k_1) \subseteq k_2$ где је k_2 круг са центром у O полупречника $r_2 = \frac{r^2}{r_1}$.

Аналогно је $\phi_k(k_2) \subseteq k_1$ па је по особини инволутивности (Теорема 1.1), $k_2 \subseteq \phi_k(k_1)$. Одавде је сада јасно $k_2 = \phi_k(k_1)$. □

Теорема 2.3. *Права p која не пролази кроз центар O инверзије ϕ_k слика се у круг који пролази кроз центар инверзије O.*



Слика 8:



Слика 9:

Доказ. Нека је A подножје нормале из тачке O на p, а A' њена слика при инверзији ϕ_k. Нека је B произвољна тачка праве p различита од A и B' њена слика при инверзији ϕ_k, Слика 9. Имамо да је

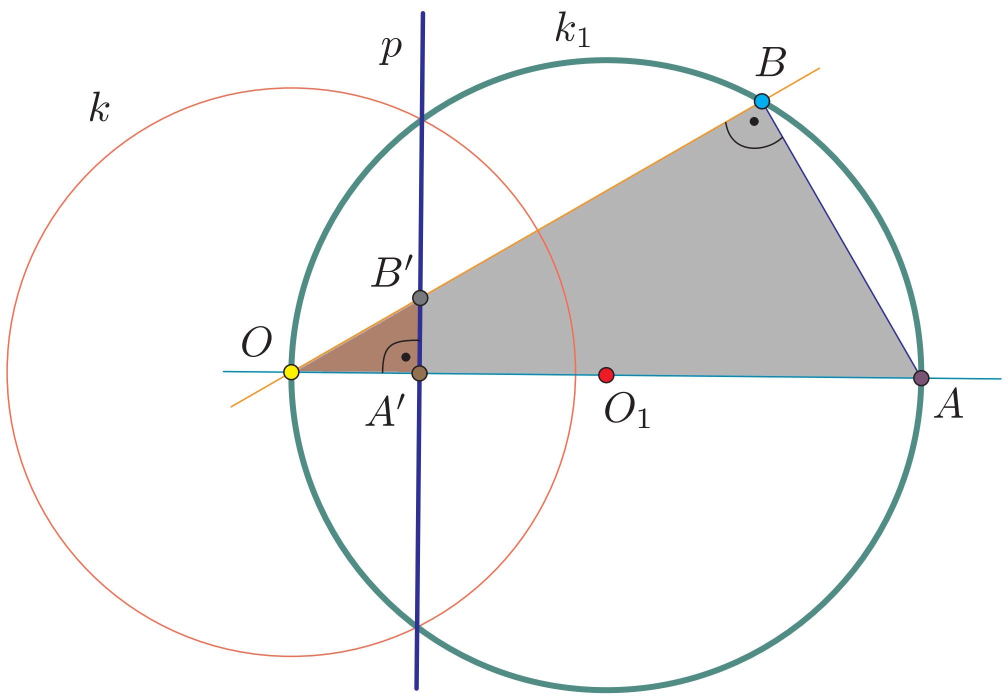
$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$, одакле је

$$OA : OB = OB' : OA'.$$

Како је и $\sphericalangle AOB = \sphericalangle B'OA'$ заједнички угао, то је $\triangle AOB = \triangle B'OA'$. Одавде је $\sphericalangle OB'A' = OAB = 90°$, па тачка B' лежи на кругу k' чији је пречник OA'. Дакле $\phi_k(p) \subseteq k' \setminus \{O\}$.

Аналогно доказујемо да је $\phi_k(k' \setminus \{O\}) \subseteq p$ па је по особини инволутивности (Теорема 1.1), $k' \setminus \{O\} \subseteq \phi_k(p)$. Одавде је сада јасно $k' \setminus \{O\} = \phi_k(p)$. □

Теорема 2.4. *Круг k_1 који пролази кроз центар O инверзије ϕ_k слика се у праву који пролази кроз центар инверзије O.*



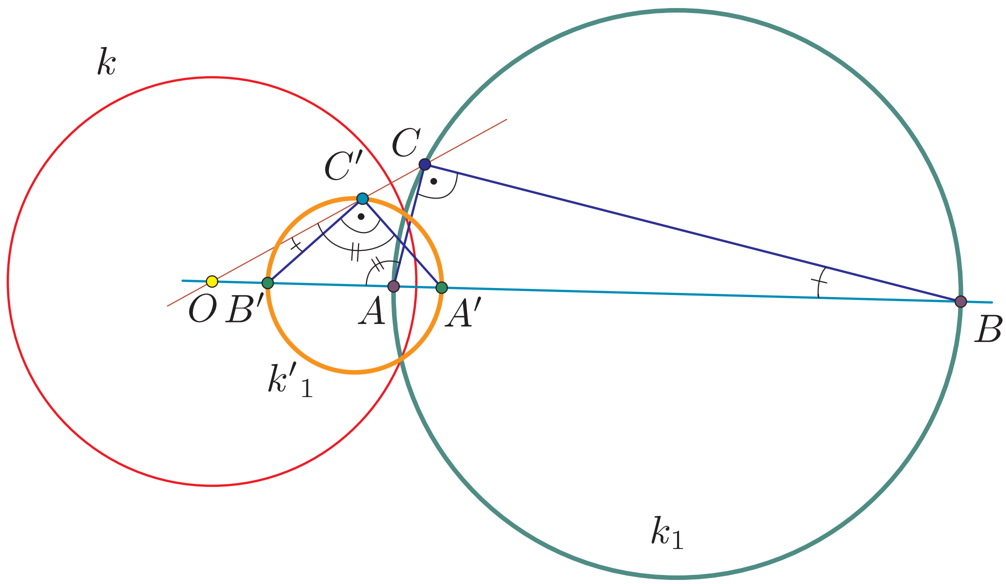
Слика 10:

Доказ. Нека је A друга пресечна тачка праве OO_1 где је O_1 центар круга k_1 и A' њена слика при инверзији ϕ_k. Нека је B произвољна тачка круга k_1 и B' њена слика при инверзији ϕ_k, Слика 10. Аналогно, као у доказу Теореме 2.3 добијамо да је $\sphericalangle OA'B' = 90°$, па је $\phi_k(k_1 \setminus \{O\}) \subseteq p$ где је p права кроз A' нормална на праву OO_1. Но, тада је према Теореми 2.3 је $\phi_k(p) = k_1 \setminus \{O\}$, а одавде је и $\phi_k(k_1 \setminus \{O\}) = p$. □

Теорема 2.5. *Круг k_1 који не пролази кроз центар O инверзије ϕ_k слика се у круг који не пролази кроз центар инверзије O.*

Доказ. Нека права која спаја центре O и O_1 кругова k и k_1 сече круг k_1 у тачкама A и B (не губећи на општости нека је A ближа тачки O). Нека су A' и B' слике тачака A и B при инверзији ϕ_k. Нека је C произвољна тачка круга k_1 и C' њена слика при инверзији, Слика 11. Имамо да је

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = r^2.$$



Слика 11:

Одавде следи да важи $OA' : OC' = OC : OA$ и $OB' : OC' = OC : OB$, а због углова $\sphericalangle C'OA' = \sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle C'OB' = \sphericalangle BOC$ следи да

$$\triangle AOC \sim \triangle C'OA' \text{ и } \triangle BOC \sim \triangle C'OB'.$$

Из ових сличности је $\sphericalangle OC'B' = \sphericalangle OBC$ и $\sphericalangle OC'A' = \sphericalangle OAC$. Зато је $\sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle OC'A' - \sphericalangle OC'B' = \sphericalangle OAC - \sphericalangle OBC = \sphericalangle ACB = 90°$, јер је AB пречник круга k_1. Дакле, $\phi_k(k_1) \subseteq k'_1$, где је k'_1 круг над пречником $A'B'$.

Аналогно се доказује да је $\phi_k(k'_1) \subseteq k_1$. Због особине инволутивности (Теорема 1.1), $k'_1 \subseteq \phi_k(k_1)$. Одавде је сада јасно $k'_1 = \phi_k(k_1)$. □

Центар круга се при инверзији не слика у центар одговарајућег круга. Ипак, важи да права која пролази кроз центар круга и његову слику при инверзији, пролази кроз центар те инверзије, што директно следи из теореме 2.5.

Став 2.1. *Нека је тачка C центар круга k_1 и C' њена слика при инверзији ϕ_k са центром у O. Нека су A и B пресечне тачке праве OC са кругом k_1, и A' и B' њене слике при инверзији. Тада важи*

$$A'C' : B'C' = OB : OA.$$

Доказ. C је центар дужи AB која је пречник круга $k_1(C, r_1)$. Из дефиниције 1.1 имамо да је

$$A'C' = OA' - OC' = \frac{r^2}{OA} - \frac{r^2}{OC} = \frac{r^2}{OA \cdot OC} \cdot (OC - OA) = \frac{r^2 \cdot r_1}{OA \cdot OC}.$$

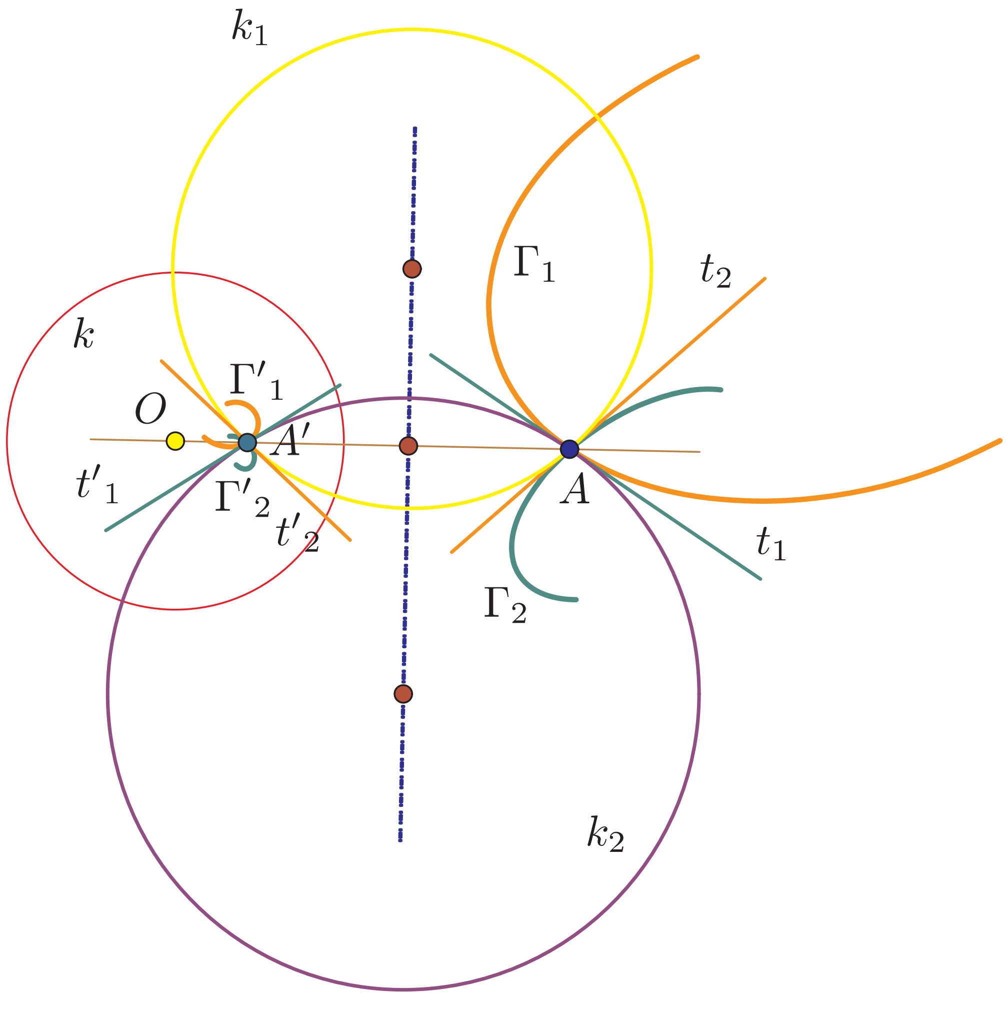
Аналогно, $B'C' = \frac{r^2 \cdot r_1}{OB \cdot OC}$, одакле следи тврђење задатка. □

3 Особина комфорности

У овом делу ћемо се детаљније позабавити једним од најважнијих својстава инверзије, а то да је она једно *комфорно пресликавање.* Строго дефинисање овог појма излази из оквира нашег разматрања, али можемо усвојити једну дескриптивну дефиницију да је то пресликавање које "чува углове". Да појаснимо, нека су Γ_1 и Γ_2 две *глатке криве*. Крива је глатка ако у свакој својој тачки има дефинисану тангенту. Примери глатких кривих су праве, криве другог реда, итд. Угао између две глатке криве је угао између њихових тангенти у заједничким тачкама.

Теорема 3.1. *Инверзија је комфорно пресликавање.*

Доказ. Нека се глатке криве Γ_1 и Γ_2 секу у тачки A и нека је A' њена слика при инверзији ϕ_k са центром у O. Нека су t_1 и t_2 тангенте у A на криве Γ_1 и Γ_2, редом, Слика 12. Тада постоје кругови k_1 и k_2 који пролазе кроз тачке A и A' такви да је t_1 тангента круга k_1 и t_2 тангента круга k_2. Имамо да се k_1 и Γ_1 тангирају, као и k_2 и Γ_2. Нека су Γ'_1 и Γ'_2 слике одговарајућих кривих при ϕ_k. Приметимо да је због особине потенције тачке O у односу на k_1, $\phi_k(k_1) = k_1$ и аналогно, $\phi_k(k_2) = k_2$. Дакле, круг k_1 тангира криву Γ'_1 у тачки A', тј. тангента t'_1 на Γ'_1 у тачки A' је заправо тангента круга k_1 у A'. Аналогно, тангента t'_2 на Γ'_2 у тачки A' је заправо тангента круга k_2 у A'. Али, при осној симетрији у односу на симетралу дужи AA' кругови k_1 и k_2 се сликају у сами себе, тачка A у A', а тангенте t_1 и t_2 редом у t'_1 и t'_2. Зато је $\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2) = \sphericalangle(t_1, t_2) = \sphericalangle(t'_1, t'_2) = \sphericalangle(\Gamma'_1, \Gamma'_2)$, што је и требало доказати. $\square$



Слика 12:

Претходна теорема је есенцијално својство инверзије. Она тврди да оно што се додиривало пре инверзије, додирује и у слици. Комбиновано са осталим особинама инверзије заправо нам омогућује да инверзију примењујемо у сложеним геометријским и конструктивним проблемима. Ово се највише односи на ситуације у којима је број кругова јако велики, па се применом инверзије одређени број њих преводи у праве.

3.1 Нормални кругови

Као што су нормалне праве од посебног интереса у геометрији, такав је случај и са круговима који образују угао од $90°$. Једноставним преформулисањем дефиниције угла две криве долазимо до једноставног критеријума за ортогоналност два круга:

Став 3.1. *Два круга су нормална уколико тангента у заједничкој тачки једног од њих пролази кроз центар другог круга.*

Следећа теорема је од посебне користи у практичним применама инверзије.

Теорема 3.2. *Нека је круг l нормалан на круг инверзије k. Тада се круг l слика у самог себе при инверзији у односу на ϕ_k.*

Став 3.2. *Нека су A' и B' слике тачака A и B при инверзији ϕ_k са центром у O при чему су O, A и B неколинеарне тачке. Тада тачке A, B, B' и A' припадају једном кругу l који је нормалан на k.*

4 Промена дужине дужи при инверзији

Теорема 4.1. *Нека су A' и B' слике тачака A и B при инверзији у односу на круг $k(O, r)$. Тада је*

$$A'B' = r^2 \cdot \frac{AB}{OA \cdot OB}.$$

5 Птоломејеве теореме

Теорема 5.1 (Прва Птоломејева теорема)**.** *У сваком четвороуглу $ABCD$ важи неједнакост*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD,$$

при чему знак једнакости важи ако и само ако је четвороугао $ABCD$ тетиван.

Доказ. Нека је $k(A, r)$ круг малог полупречника r (такав да су B, C и D у његовој спољашњости) и ϕ_k инверзија у односу на овај круг. Нека је $B' = \phi_k(B)$, $C' = \phi_k(C)$ и $D' = \phi_k(D)$, Слика 13. По неједнакости троугла важи

$$B'D' \leq B'C' + C'D'.$$

Користећи теорему 4.1 је

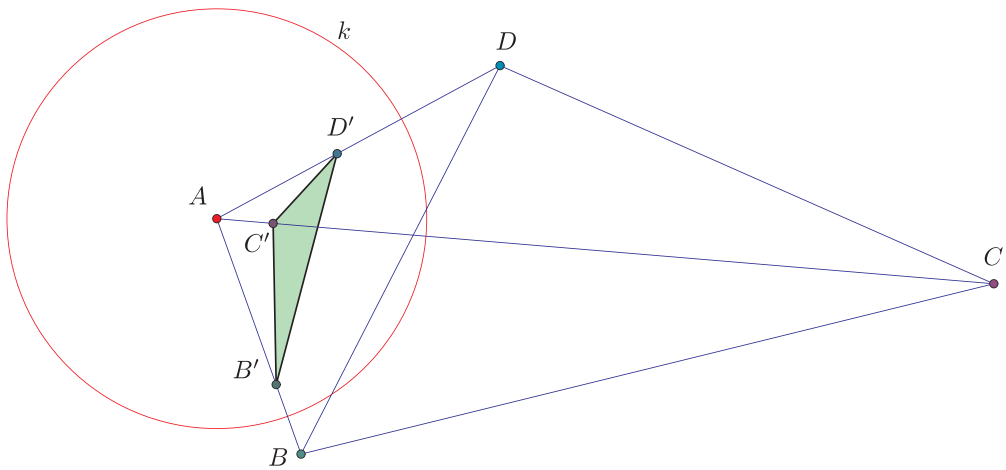
$$r^2 \cdot \frac{BD}{AD \cdot AB} \leq r^2 \cdot \frac{BC}{AB \cdot AC} + r^2 \cdot \frac{CD}{AC \cdot AD}.$$

Множећи последњу једнакост са $\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{r^2}$ добијамо тражену неједнакост.

Знак једнакости важи ако и само ако су B', C' и D' колинеарне тачке. Према теореми 2.4 тачке B', C' и D' су колинеарне ако и само ако су тачке A, B, C и D на једном кругу. □

Теорема 5.2 (Друга Птоломејева теорема)**.** *У тетивном Четвороугао $ABCD$ је тетиван ако и само ако важи*

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BA \cdot DA + BC \cdot DC}{AD \cdot CD + AB \cdot CB}.$$



Слика 13:

6 Специјалне инверзије

Лема 6.1. *Нека су k_1 и k_2 два круга једне равни без заједничких тачака. Постоји инверзија ψ која пресликава ова два круга у два концентрична круга.*

7 Примене инверзије

7.1 Аполонијеви проблеми и конструктивни задаци

Задатак 1. *Конструисати круг l који:*

1. *садржи три дате тачке A, B и C.*
2. *садржи две дате тачке A и B и додирује дату праву p.*
3. *садржи две дате тачке A и B и додирује дати круг k.*
4. *садржи дату тачку A и додирује две дате праве p и q.*
5. *садржи дату тачку A, дату праву p и дати круг k.*
6. *садржи дату тачку A и додирује два дата круга k_1 и k_2.*
7. *додирује три дате праве p, q и r.*
8. *додирује две дате праве p и q и круг k.*
9. *додирује дату праву p и два дата круга k_1 и k_2.*
10. *додирује три дата круга k_1, k_2 и k_3.*

Задатак 2. *Конструисати круг l који садржи две дате тачке A и B и нормалан је на дати круг k.*

Задатак 3. *Конструисати круг l који садржи дату тачку A, додирује дату праву p и са датим кругом k образује угао α.*

7.2 Класичне теореме

Теорема 7.1 (Брокарова теорема)**.** *Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао уписан у круг k са центром у O. Нека је $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap CD$ анд $R = AC \cap BD$. Нека су M и N тачке круга k такве да су PM и PN тангенте круга k. Тада важи*

1. *таче Q, M, R и N су колинеарне.*

2. *O је ортоцентар троугала PQR.*

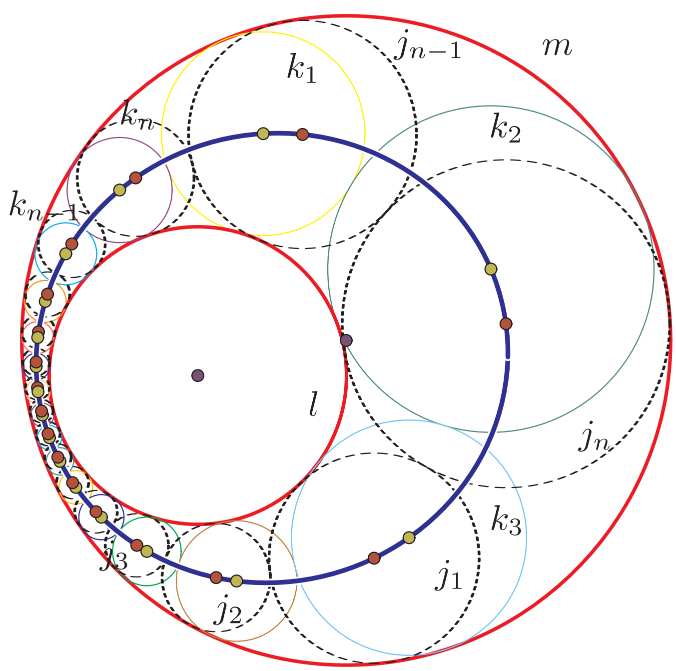
Теорема 7.2 (Фојербахова теорема)**.** *Ојлеров круг троугла ABC додиру је уписани круг k овог троугла и спођа уписане кругове троугла k_a, k_b и k_c у 4 Фојербахове тачке.*

Теорема 7.3 (Микелова теорема о шест кругова)**.** *Нека су k_1, k_2, k_3 и k_4 кругови једне равни такви да се k_1 и k_2 секу у тачкама A_1 и A_2, k_2 и k_3 у B_1 и B_2, k_3 и k_4 у C_1 и C_2 и k_4 и k_1 у D_1 и D_2. Нека су тачке A_1, B_1, C_1 и D_1 концикличне. Тада су тачке A_2, B_2, C_2 и D_2 концикличне или колинеарне.*

Теорема 7.4. *Нека су k_1, k_2, k_3 и k_4 кругови једне равни такви да се кругови k_1 и k_2 додирују у тачки A, кругови k_2 и k_3 у тачки B, кругови k_3 и k_4 у тачки C и кругови k_4 и k_1 у тачки D. Тада су тачке A, B, C и D колинеарне или концикличне.*

7.3 Штајнеров поризам

Теорема 7.5 (Штајнеров поризам)**.** *Нека је l круг у унутрашњости круга m. Претпоставимо да постоји низ кругова k_1, k_2, $\ldots$, k_n који додирују кругове l и m, при чему се свака два суседна круга у низу додирују, укључујући k_1 и k_n. Нека је j_1 произвољан круг који додирује l и m, и j_2, $\ldots$, j_n кругови који додирују l и m и сваки додирује претходни у низу. Тада се кругови j_1 и j_n додирују.*



Слика 14:

Задатак 4. *Центри штајнеровог низа кругова* $k_1, \ldots, k_n$ *који додирују кругове* k *и* l *припадају једној елипси чије су жиже центри кругова* l *и* m.

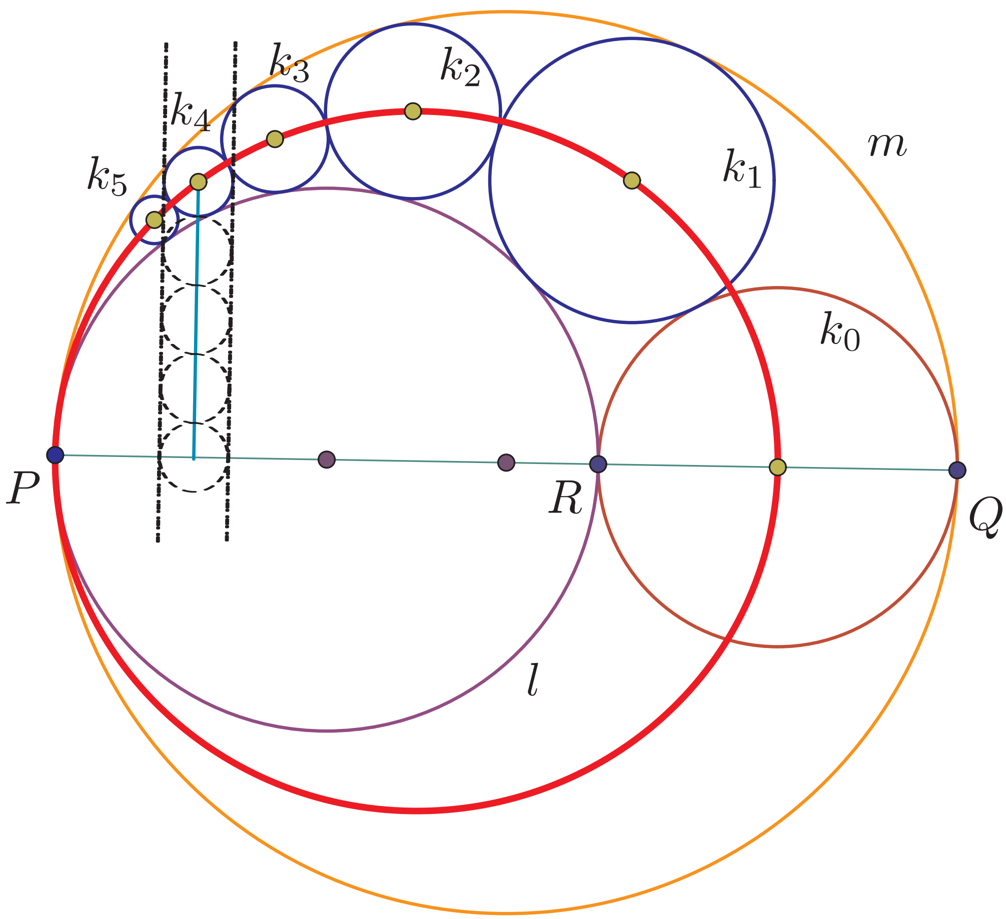
Задатак 5. *Нека је дат Штајнеров низ кругова* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *који додирују кругове* l *и* m. *Нека су* A_i *и* B_i *додирне тачке круга* k_i *са круговима* l *и* m. *Нека су праве* t_i *заједничке тангенте кругова* k_i *и* k_{i+1} *у додирним тачкама. Праве* A_iB_i *и тангенте* t_i *пролазе кроз заједничку тачку.*

7.4 Обућарски нож-арбелос

Теорема 7.6 (Папосова теорема)**.** *Нека су* P, Q *и* R *три колинеарне тачке такве да је* $P - R - Q$ *и нека су* m, l *и* k_0 *кругови над пречницима* PQ, PR *и* RQ *редом. Низ кругова* $k_0, k_1, k_2, \ldots$ *је такав да сваки круг* k_n, $n \geq 1$ *додирује кругове* m *и* l *и претходни члан низа круг* k_{n-1}. *Тада важи:*

1. *центри кругова* $k_0, k_1, k_2, \ldots$ *припадају једној елипси* $\mathcal{E}$ *чије су жиже центри кругова* m *и* l.

2. *растојање центра круга* k_n *од праве* PQ *је* n *пута веће од полупречника круга* k_n.



Слика 15:

Задатак 6. *Над дужима* AC, CB *и* CB *једне праве конструисани су кругови* k_1, k_2 *и* k. *У тачки* C *конструисана је нормала на праву* AB. *Кругови* l_1 *и* l_2 *налазе се са исте стране праве* AB, *додирују круг* k *и праву* p, *а круг* l_1 *додирује круг* k_1 *и круг* l_2 *додирује и круг* k_2. *Тада важи:*

1. *кругови l_1 и l_2 имају једнаке полупречнике.*

2. *заједничка тангента у тачки додира кругова k_2 и l_2, пролази кроз тачку A, док заједничка тангента у тачки додира кругова k_1 и l_1, пролази кроз тачку B.*

7.5 Разни задаци

Задатак 7. *Нека је P произвољна тачка на мањем луку A_1A_{2n+1} круга k описаног око правилног $(2n+1)$-тоугла, и d_1, d_2, $\ldots$, d_{2n+1} растојања тачке P од темена A_1, A_2, $\ldots$, A_{2n+1}, редом. Тада је*

$$d_1 + d_3 + \cdots + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + \cdots + d_{2n}.$$

Задатак 8. *Нека је P произвољна тачка на мањем луку A_1A_n круга k описаног око правилног n-тоугла, и d_1, d_2, $\ldots$, d_n растојања тачке P од темена A_1, A_2, $\ldots$, A_n, редом. Тада је*

$$\frac{1}{d_1d_n} = \frac{1}{d_1d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{n-1}d_n}.$$

Задатак 9. *Нека су A, B, C и D четири произвољне тачке у равни које нису колинеарне нити концикличне. Доказати да је угао између кругова описаних око троуглова ABC и ABD једнак углу описаним око троуглова CDA и CDB.*

Задатак 10. *Нека је шестоугао $ABCDEF$ уписан у круг са центром у O. Нека је k_1 круг који пролази кроз тачку O и средишта страница AB и DE, круг k_2 круг који пролази кроз тачку O и средишта страница BC и EF и k_3 круг који пролази кроз тачку O и средишта страница CD и FA.*

Задатак 11. *Кругови $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ и $k_3(O_3, r_3)$ се међусобно споља додирују. Нека су $k(M, m)$ и $l(N, n)$ кругови који додирују кругове k_1, k_2 и k_3. Тада је:*

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 4\sqrt{\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1r_2r_3}}.$$