НЕЈЕДНАКОСТИ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

Зоран Каделбург

Београд, 14.02.2016.

Најпре приметимо да импликације

$$x < y \implies x^2 < y^2 \quad \text{односно} \quad x^2 < y^2 \implies x < y$$

не морају да важе. На пример, $-3 < 2$, али $(-3)^2 > 2^2$; такође, $2^2 < (-3)^2$, али $2 > -3$. Зато следеће извођење не прихватамо као доказ неједнакости између аритметичке и геометријске средине:

$$\begin{aligned}
\sqrt{xy} &\leqslant \frac{x+y}{2}\\
xy &\leqslant \frac{x^2+2xy+y^2}{4}\\
4xy &\leqslant x^2+2xy+y^2\\
0 &\leqslant x^2-2xy+y^2\\
0 &\leqslant (x-y)^2
\end{aligned}$$

Теорема 1. За произвољне $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ важи неједнакост

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

Притом једнакост важи ако и само ако је $x = y$.

Доказ.

$$\begin{aligned}
(x-y)^2 &\geqslant 0\\
x^2-2xy+y^2 &\geqslant 0\\
x^2+2xy+y^2 &\geqslant 4xy\\
\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &\geqslant xy.
\end{aligned}$$

Због $x, y \geqslant 0$ је $\dfrac{x+y}{2} \geqslant 0$ и $xy \geqslant 0$, па из претходног следи $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$. Једнакост важи само ако важи у првој од наведених неједнакости, тј. за $x = y$.

Задатак 1. Ако је $ab > 0$, доказати да је $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$.

Прво решење. Како је $ab > 0$, то је $\dfrac{a}{b} > 0$ и $\dfrac{b}{a} > 0$. Полазимо од очигледне неједнакости $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2 \geqslant 0$. Квадрирањем се добија $\dfrac{a}{b} - 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\sqrt{\dfrac{b}{a}} + \dfrac{b}{a} \geqslant 0$, а одатле $\dfrac{a}{b} - 2 + \dfrac{b}{a} \geqslant 0$, тј. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b$.

Друго решење. Применимо неједнакост аритметичке и геометријске средине на (позитивне) бројеве $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{b}{a}$. Добијамо

$$\frac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 1,$$

одакле следи дата неједнакост. Једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$, тј. $a = b$.

Задатак 2. Ако је $x + y > 0$, доказати да важи неједнакост

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leqslant \frac{x^3+y^3}{2}.$$

Решење. Дата неједнакост еквивалентна је, редом, следећим неједнакостима:

$$\begin{gathered}
x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \leqslant 4(x^3+y^3),\\
0 \leqslant 3x^3-3x^2y-3xy^2+3y^3,\\
0 \leqslant (x-y)(x^2-y^2),\\
0 \leqslant (x+y)(x-y)^2.
\end{gathered}$$

Последња неједнакост је, због $x+y>0$, увек тачна, па је тачна и њој еквивалентна полазна неједнакост. Једнакост важи ако и само ако је $x=y$.

Задатак 3. За $n \in \mathbf{N}$ доказати неједнакост

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leqslant \frac{2n-1}{n}.$$

Решење.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} &\leqslant 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\
&= 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\
&= 2-\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n}.
\end{aligned}$$

Једнакост важи за $n \in \{1,2,3\}$.

Теорема 2. Нека су x, y и z ненегативни бројеви. Тада важи неједнакост

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}.$$

Притом једнакост важи ако и само ако је $x=y=z$.

Први доказ. Уведимо смене $x=a^3$, $y=b^3$, $z=c^3$. За бројеве a, b, c важи неједнакост

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geqslant 0,$$

јер је она еквивалентна са

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

Помножимо сада ту неједнакост ненегативним бројем $a+b+c$. Коришћењем идентитета

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

после сређивања израза на левој страни добијамо $a^3+b^3+c^3-3abc \geqslant 0$, дакле

$$abc \leqslant \frac{a^3+b^3+c^3}{3},$$

или, узимајући у обзир да је $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$, $c=\sqrt[3]{z}$,

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}.$$

Тиме је неједнакост између средина доказана. Лако је проверити да једнакост заиста важи ако и само ако је $x=y=z$.

Други доказ. Докажимо најпре неједнакост између аритметичке и геометријске средине за *четири броја.* Наиме важи:

Ако су x, y, z и t ненегативни бројеви, тада је

$$\sqrt[4]{xyzt} \leqslant \frac{x+y+z+t}{4}, \tag{1}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $x=y=z=t$.

Заиста, ако неједнакост између аритметичке и геометријске средине за два броја применимо најпре на бројеве x, y и z, t а затим на бројеве $\dfrac{x+y}{2}$, $\dfrac{z+t}{2}$, добићемо

$$\sqrt[4]{xyzt}=\sqrt{\sqrt{xy}\,\sqrt{zt}}\leqslant\sqrt{\frac{x+y}{2}\cdot\frac{z+t}{2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{2}+\frac{z+t}{2}\right)=\frac{x+y+z+t}{4},$$

па је неједнакост (1) доказана. Једнакост важи ако и само ако важи у све три примене неједнакости за два броја, тј. $x=y$, $z=t$ и $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{z+t}{2}$, а лако се види да су та три услова заједно еквивалентна услову $x=y=z=t$.

Ставимо сада у неједнакости (1) $t=\dfrac{x+y+z}{3}$. Добијамо

$$\sqrt[4]{xyz\,\frac{x+y+z}{3}}\leqslant\frac{1}{4}\left(x+y+z+\frac{x+y+z}{3}\right)=\frac{x+y+z}{3}.$$

Претходна неједнакост се може еквивалентно записати као

$$(xyz)^{\frac{1}{4}}\leqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{1-\frac{1}{4}}=\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{3}{4}},$$

што степеновањем са $\dfrac{4}{3}$ даје управо неједнакост коју доказујемо. Да би важила једнакост, мора бити $x=y=z$.

Задатак 4. Доказати да за позитивне бројеве a, b и c важи неједнакост

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant a+b+c.$$

Решење. На позитивне бројеве $\dfrac{ab}{c}$ и $\dfrac{bc}{a}$ применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине,

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}}=2b.$$

На сличан начин се добија:

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}}=2c,$$
$$\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant 2\sqrt{\frac{ca}{b}\cdot\frac{ab}{c}}=2a.$$

Сабирањем последње три неједнакости добија се

$$2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\geqslant 2(a+b+c),$$

а одатле неједнакост која се доказује.

Једнакост важи ако и само ако важи у свакој од неједнакости које смо сабирали, тј. ако и само ако је $a=b=c$.

Задатак 5. Доказати да за x, y, $z\geqslant 0$ важи

$$(x+y+z)(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\geqslant 9\sqrt{xyz}.$$

Решење. Применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине најпре на бројеве x, y, z, а затим на (такође ненегативне) бројеве $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$. Добијамо:

$$x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[6]{x^2y^2z^2},$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{z}}=3\sqrt[6]{xyz}.$$

Ако помножимо ове две неједнакости, добијамо

$$(x+y+z)(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) \geqslant 9\sqrt[6]{x^2y^2z^2}\sqrt[6]{xyz} = 9\sqrt[6]{x^3y^3z^3} = 9\sqrt{xyz},$$

чиме смо доказали дату неједнакост. Једнакост важи ако и само ако је $x=y=z$.

Принцип регресивне индукције гласи:

Нека је $T(n)$ тврђење које зависи од природног броја n. Ако:

(1) $T(n)$ је тачан исказ за бесконачно много природних бројева n;

(2) за све природне бројеве $n>1$, $T(n) \implies T(n-1)$ је тачан исказ,

тада је тврђење $T(n)$ тачно за свако $n \in \mathbf{N}$.

Теорема 3. (Неједнакост између аритметичке и геометријске средине) За све природне бројеве n и све ненегативне реалне бројеве $a_1, a_2, \dots, a_n$ важи неједнакост

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Доказ. (Коши) (1) Најпре, математичком индукцијом по k, доказујемо да тврђење важи за све природне бројеве облика $n=2^k$, $k\in\mathbf{N}$.

($1'$) За $k=1$ ($n=2$) неједнакост $\dfrac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2}$ је еквивалентна са $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$ (и добро позната).

($1''$) Претпоставимо да тврђење важи за $n=2^k$, $k\geqslant 1$. Тада је

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}+\frac{a_{n+1}+\cdots+a_{2n}}{n}\right) \geqslant \\ &\geqslant \sqrt{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{a_{n+1}+\cdots+a_{2n}}{n}} \geqslant \sqrt{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\cdot\sqrt[n]{a_{n+1}\cdots a_{2n}}} = \\ &= \sqrt[2n]{a_1a_2\cdots a_{2n}}.\end{aligned}$$

Закључујемо да неједнакост важи за све $n\in\{2,2^2,2^3,\dots\}$.

(2) Претпоставимо сада да је неједнакост тачна за неки природни број n и изаберимо $a_n = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$. Тада је

$$\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+\dfrac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}},$$

одакле се добија

$$\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdots a_{n-1}}\cdot\sqrt[n]{\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}},$$

тј.

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{1-\frac{1}{n}} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdots a_{n-1}},$$

па је

$$\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}.$$

Тиме је регресивном индукцијом доказано да је дата неједнакост тачна за све природне бројеве n.

У датој неједнакости (за $n\geqslant 2$) једнакост важи ако и само ако је $a_1=a_2=\cdots=a_n$. $\triangle$

Последица. (Неједнакост између хармонијске и геометријске средине) За позитивне реалне бројеве $a_1, a_2, \dots, a_n$ важи неједнакост

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Једнакост (за $n\geqslant 2$) важи ако и само ако је $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Доказ. Применити АГ неједнакост на бројеве $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dots, \dfrac{1}{a_n}$.

Задатак 6. Доказати да за позитивне реалне бројеве $a_1, a_2, \dots, a_n$ важи

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Решење. Применом АХ-неједнакости добије се

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}},$$

одакле се непосредно добија тражена неједнакост. Једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Теорема 4. За произвољне реалне бројеве x, y и z важе неједнакости

$$\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $x = y$ (односно $x = y = z$).

Доказ. Доказаћемо само прву неједнакост – друга се доказује слично. Ако је збир $x + y$ негативан, неједнакост коју доказујемо очигледно важи. У противном, њеним квадрирањем се добија еквивалентна неједнакост

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2},$$

која се лако еквивалентно трансформише у тачну неједнакост $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Тиме је полазна неједнакост доказана. Једнакост важи ако и само ако важи у неједнакости $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, тј. за $x = y$.

Изрази који се јављају у досад уведеним неједнакостима најчешће се означавају словима A, G, H и K са индексом који указује на број променљивих:

$$H_2 = \frac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}, \quad G_2 = \sqrt{xy}, \quad A_2 = \frac{x+y}{2}, \quad K_2 = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

и слично за H_3, G_3, A_3 и K_3. Доказане теореме можемо тада кратко записати као

$$\begin{aligned} H_2 \leqslant G_2 \leqslant A_2 \leqslant K_2, \\ H_3 \leqslant G_3 \leqslant A_3 \leqslant K_3. \end{aligned}$$

Лако је наслутити како се ове релације могу уопштити.

Неједнакост задатка 2 је у ствари неједнакост између артиметичке и кубне средине за два броја:

$$A_2 \leqslant Q_2.$$

Задатак 7. Ако је $x + y + z = 6$, доказати да је $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 12$.

Решење. Применом неједнакости $A_3 \leqslant K_3$ се добија

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geqslant \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 = 4,$$

одакле следи закључак. Једнакост важи ако и само ако је $x = y = z = 2$.

Теорема 5. Нека су фиксирани позитивни бројеви $a_1, \dots, a_n$. За $s \in \mathbf{R}$ дефинишимо помоћу

$$M_s(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^s + \cdots + a_n^s}{n}\right)^{1/s}, & \text{за } s \neq 0, \\ \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}, & \text{за } s = 0, \end{cases}$$

средину реда $\boldsymbol{s}$ бројева $a_1, \dots, a_n$. Тада $M_s(a_1, \dots, a_n)$, као функција од s, има следеће особине:

(a) функција $M_s(a_1, \dots, a_n)$ је непрекидна у тачки $s = 0$;

(б) $\min(a_1,\ldots,a_n) \leqslant M_s(a_1,\ldots,a_n) \leqslant \max(a_1,\ldots,a_n)$ за свако s;

(в) ако бројеви $a_1, \ldots, a_n$ нису сви једнаки међу собом, функција $M_s(a_1,\ldots,a_n)$ је строго растућа функција од s;

(г) $\lim\limits_{s\to-\infty} M_s(a_1,\ldots,a_n) = \min(a_1,\ldots,a_n)$, $\lim\limits_{s\to+\infty} M_s(a_1,\ldots,a_n) = \max(a_1,\ldots,a_n)$.

Приметимо да је у овим ознакама $H_n(a_1,\ldots,a_n) = M_{-1}(a_1,\ldots,a_n)$, $G_n(a_1,\ldots,a_n) = M_0(a_1,\ldots,a_n)$, $A_n(a_1,\ldots,a_n) = M_1(a_1,\ldots,a_n)$ и $K_n(a_1,\ldots,a_n) = M_2(a_1,\ldots,a_n)$, те из овог примера следи да је

$$M_{-1} \leqslant M_0 \leqslant M_1 \leqslant M_2,$$

тј.

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant K_n.$$

Задаци

8. $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$, $a,b,c \in \mathbf{R}$.

9. $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geqslant 6abc$, $a,b,c \in \mathbf{R}$.

10. $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b) \geqslant 0$, $a,b,c \geqslant 0$.

11. $x^8+x^6-4x^4+x^2+1 \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}$.

12. Колика је најмања могућа вредност израза $A=(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)+3$, $x \in \mathbf{R}$?

13. $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, $a,b,c,d \geqslant 0$.

14. Ако је $a+b \geqslant 1$, доказати да је: (а) $a^4+b^4 \geqslant \dfrac{1}{8}$; (б) $a^8+b^8 \geqslant \dfrac{1}{128}$.

15. Ако су b и d позитивни и $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d}$, доказати да је $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a+c}{b+d} \leqslant \dfrac{c}{d}$.

16. $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$, $n>1$.

17. (а) $\dfrac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbf{N}$.

(б) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, $n \in \mathbf{N}$.

Задаци са такмичења

18. (СМО 2007) За позитивне реалне бројеве x, y и z важи да је $xyz=1$. Доказати да је

$$\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1} \leqslant 1.$$

19. (СМО 2008) Бројеве 1, 2, ... , 2008 распоредимо на 1004 домине, тако да се на свакој домини налазе тачно два броја. Ако производе бројева на доминама означимо са p_1, p_2, ... , p_{1004}, доказати неједнакост

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{1004}} \leqslant \frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+\cdots+\frac{1}{2008}.$$

20. (Државно 2009) Доказати да је $\dfrac{1}{2009} < \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2007}{2008} < \sqrt{\dfrac{1}{2009}}$.

21. (СМО 2009) За позитивне реалне бројеве x, y, z важи $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{1}{2}$. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2} < \frac{1}{3}.$$

22. (ЈБМО 2009) Нека су x, y и z реални бројеви такви да је $0<x,\ y,\ z<1$ и $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Доказати да је бар један од бројева $(1-x)y$, $(1-y)z$, $(1-z)x$ већи или једнак од $\dfrac{1}{4}$.

23. (СМО 2010) Нека су x и y бројеви из интервала $[1,2]$. Доказати да је

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \leqslant \frac{9}{2}.$$

24. (СМО 2010) Доказати следећу неједнакост за све позитивне реалне бројеве a, b и c:

$$\frac{a^2+2b^2+4c^2}{bc}+\frac{b^2+2c^2+4a^2}{ac}+\frac{c^2+2a^2+4b^2}{ab} \geqslant 21.$$

Када важи једнакост?

25. (СМО 2011) Одреди најмању вредност израза

$$S=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{abc}}$$

за позитивне реалне бројеве a, b и c са особином $a+b+c=1$.

26. (ЈБМО 2011) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви, такви да је $abc=1$. Доказати неједнакост

$$\begin{aligned}(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1) \geqslant \\ \geqslant 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1).\end{aligned}$$

27. (ЈБМО 2012) Нека су a,b,c позитивни реални бројеви такви да је $a+b+c=1$. Доказати да је

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+6 \geqslant 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right).$$

У ком случају важи једнакост?

28. (Државно за 7, 2013) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је апсолутна вредност разлике свака два мања од 2. Докажи да је

$$a+b+c<\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ac+1}.$$

29. (Државно за 8, 2013) Докажи да важи неједнакост

$$2013<\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\cdots+\frac{2013^2+1}{2013^2-1}<2013+\frac{1}{2}.$$

30. (СМО, 2013) Нека су a,b,c позитивни реални бројеви чији је збир једнак 1. Докажи да важи неједнакост

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c+ab}} \geqslant \frac{9}{2}.$$

Када важи једнакост?

31. (ЈБМО, 2013) Нека су a и b позитивни реални бројеви за које важи $ab \geqslant 1$. Доказати да је

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16.$$

32. (Државно за 8, 2014) Докажи да је вредност полинома $x^{12}-x^9+x^4-x+1$ позитивна за свако реално x.

33. (СМО, 2014) Доказати да за реалне бројеве a,b,c,d,e који припадају интервалу $[0,1]$ важи неједнакост

$$(1+a+b+c+d+e)^2 \geqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2).$$

Када важи једнакост?

34. (ЈБМО, 2014) Нека су a,b,c позитивни реални бројеви такви да је $abc=1$. Докажи да је

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geqslant 3(a+b+c+1).$$

Када важи једнакост?

35. (СМО, 2015) Доказати неједнакост
$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{2015^3}<\frac{5}{4}.$$

36. (ЈБМО, 2015) Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $a+b+c=3$. Одреди минималну вредност коју може имати израз
$$A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}.$$

Решења

18. Нека је
$$\begin{aligned}A&=\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1}\\&=\frac{2}{x^2+y^2+2x+2}+\frac{2}{y^2+z^2+2y+2}+\frac{2}{z^2+x^2+2z+2}.\end{aligned}$$
Како је $x^2+y^2\geqslant 2xy$, $y^2+z^2\geqslant 2yz$ и $z^2+x^2\geqslant 2zx$, то је
$$A\leqslant\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}.$$
Како је $\dfrac{1}{xy+x+1}\cdot\dfrac{z}{z}=\dfrac{z}{1+xz+z}$ и $\dfrac{1}{yz+y+1}\cdot\dfrac{xz}{zx}=\dfrac{zx}{zx+1+z}$, то је
$$A\leqslant\frac{z}{1+xz+z}+\frac{zx}{zx+1+z}+\frac{1}{zx+z+1}=1.$$
Једнакост важи за $x^2+y^2=2xy$, $y^2+z^2=2yz$, $z^2+x^2=2xz$, тј. за $x=y$, $y=z$ и $z=x$ односно за $x=y=z$.

19. Доказаћемо да је тражени збир највећи ако имамо домине са паровима бројева $(1,2)$, $(3,4)$, … , $(2007,2008)$. Претпоставимо да на две домине имамо парове (a,b) и (c,d) и да важи распоред $a>b$ и $c>d$. Не умањујући општост, претпоставимо да је a највећи међу бројевима $a,\ b,\ c,\ d$. Уколико извршимо замену бројева, имамо домине са паровима (a,c) и (b,d). Ако се збир свих реципрочних вредности повећава, тада важи неједнакост
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}<\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd}.$$
Сређивањем добијамо $ab+cd-ac-bd>0$, односно $(a-d)(b-c)<0$. Како је $a>d$, следи да b мора бити мање од c.

Понављањем овог поступка добијамо да је збир $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_{1004}}$ највећи када су бројеви на доминама узастопни и једнаки $(1,2)$, $(3,4)$, … , $(2007,2008)$. Зато је
$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{1004}}&\leqslant\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2007\cdot 2008}\\&=\cdots=\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+\cdots+\frac{1}{2008}.\end{aligned}$$

20. Нека је $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}$. Како је $\dfrac{n}{n+1}>\dfrac{n}{n+2}$, за свако n, то је $A>\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2009}=\dfrac{1}{2009}$, тј. $A>\dfrac{1}{2009}$.

Како је $\dfrac{n-1}{n}<\dfrac{n}{n+1}$, то је
$$A<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2008}{2009}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2008}{2009}\cdot\frac{1}{2009}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2009}.$$

Сада је $A^2 < \dfrac{1}{2009}$, тј. $A < \sqrt{\dfrac{1}{2009}}$, што је и требало доказати.

21. Из услова задатка следи да су бројеви x, y, z већи од 1. Доказаћемо неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2+1}.$$

Сређивањем добијамо еквивалентне неједнакости:

$$\begin{gathered} 2(x^3+2) - 3(x^2+1) > 0, \\ 2(x^3-1) - 3(x^2-1) > 0, \\ 2(x-1)(x^2+x+1) - 3(x-1)(x+1) > 0, \\ (x-1)(2x^2-x-1) > 0. \end{gathered}$$

Како је $x-1>0$ и $2x^2 = x^2+x^2 > x+1$, неједнакост је доказана.

Слично добијамо

$$\frac{1}{y^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y^2+1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{z^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z^2+1}.$$

Сабирањем доказаних неједнакости и коришћењем датог услова добијамо тражену неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2} + \frac{1}{y^3+2} + \frac{1}{z^3+2} < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

22. Претпоставимо, супротно тврђењу задатка, да је

$$(1-x)y < \frac{1}{4}, \quad (1-y)z < \frac{1}{4}, \quad (1-z)x < \frac{1}{4}.$$

Сабирајући ове три неједнакости добијамо

$$(1-x)y + (1-y)z + (1-z)x < \frac{3}{4} \tag{*}$$

Множећи ове три неједнакости (јер су све стране позитивне) добијамо

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{64}$$

и користећи услов задатка

$$xyz < \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad (1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{8}.$$

Развијајући израз на левој страни последње неједнакости добијамо

$$1 - (x+y+z) + xy + yz + zx < xyz + \frac{1}{8} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ово је еквивалентно са

$$-(x+y+z) + xy + yz + zx < -\frac{3}{4},$$

тј.

$$(1-x)y + (1-y)z + (1-z)x = x+y+z - (xy+yz+zx) > \frac{3}{4}.$$

Последња неједнакост је у контрадикцији са $(*)$ па је наша претпоставка погрешна и тврђење је доказано.

23. Како $x, y \in [1,2]$, то је $y \leqslant 2 \leqslant 2x$ и $x \leqslant 2 \leqslant 2y$. Сада је $(2x-y)(x-2y) \leqslant 0$ па је $2x^2 - 2y^2 \leqslant 5xy$, односно $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \leqslant \dfrac{5}{2}$. Непосредно добијамо да је $(x+y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \leqslant \dfrac{9}{2}$.

24. *Прво решење.* Ако прву од наредне три АГ неједнакости

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc, \quad ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant 3abc, \quad ac^2 + ba^2 + cb^2 \geqslant 3abc$$

помножимо са 1, другу са 2, а трећу са 4, и резултате саберемо, добијамо да је

$$(a^3+2ab^2+4ac^2)+(b^3+2bc^2+4ba^2)+(c^3+2ca^2+4cb^2)\geqslant 21abc.$$

Дељењем са $abc>0$ добија се неједнакост која се доказује. Једнакост важи ако и само ако важи у наведене три неједнакости, дакле ако и само ако је $a=b=c$.

Друго решење. Трансформишимо леву страну дате неједнакости и применимо АГ неједнакост за 21 број:

$$L=\frac{a^2}{bc}+\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}$$
$$+\frac{c^2}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\geqslant 21\sqrt[21]{\frac{a^8b^8c^8}{a^8b^8c^8}}=21.$$

25. Доказаћемо да је $S=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\dfrac{1}{\sqrt{abc}}\geqslant 4\sqrt{3}$, са једнакошћу ако и само ако је $a=b=c=\dfrac{1}{3}$. Применом АГ неједнакости следи $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geqslant 3\sqrt[6]{abc}$. Ако уведемо смену $t^6=abc$, потребно је показати следећу неједнакост

$$3t+\frac{1}{t^3}\geqslant 4\sqrt{3},$$

уз ограничење $t^2=\sqrt[3]{abc}\leqslant\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{1}{3}$. Сада применимо још једном АГ неједнакост:

$$3t+\frac{1}{t^3}=3t+\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{3t^3}\geqslant 4\sqrt[4]{3t\cdot\frac{1}{3t^3}\cdot\frac{1}{3t^3}\cdot\frac{1}{3t^3}}$$
$$=4\sqrt[4]{\frac{1}{3^2t^8}}=4\frac{1}{t^2\sqrt{3}}\geqslant 4\sqrt{3}.$$

26. Растављањем на чиниоце добијамо

$$a^5+a^4+a^3+a^2+a+1=a^3(a^2+a+1)+(a^2+a+1)=(a^2+a+1)(a^3+1).$$

Раставимо на сличан начин и преостала два чиниоца на левој страни. После скраћивања видимо да треба доказати неједнакост

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)\geqslant 8.$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо:

$$a^3+1\geqslant 2\sqrt{a^3},\quad b^3+1\geqslant 2\sqrt{b^3},\quad c^3+1\geqslant 2\sqrt{c^3}.$$

Множењем ове три неједнакости и применом услова $abc=1$ добијамо

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)\geqslant 8\sqrt{a^3b^3c^3}=1.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a=b=c=1$.

27. Замењујући $1-a$, $1-b$ и $1-c$ редом са $b+c$, $c+a$, $a+b$ на десној страни неједнакости, добијамо следећи низ еквивалентних неједнакости:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+6\geqslant 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\right),$$
$$\left(\frac{b+c}{a}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{b+c}{a}}+2\right)+\left(\frac{c+a}{b}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{c+a}{b}}+2\right)+\left(\frac{a+b}{c}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+b}{a}}+2\right)\geqslant 0,$$
$$\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c+a}{b}}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}-\sqrt{2}\right)^2\geqslant 0.$$

Како је последња једнакост тачна за све вредности a,b,c, важи и дата неједнакост. Једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=2$, што заједно са условом задатка $a+b+c=1$ даје $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

28. Како је $|a-b|<2$, то је $a^2-2ab+b^2<4$. Додавањем $4ab$ левој и десној страни једнакости добијамо $(a+b)^2<4(1+ab)$. Како су a, b и c позитивни реални бројеви, то је $a+b<2\sqrt{1+ab}$. Аналогно се добија да је и $b+c<2\sqrt{1+bc}$ и $a+c<2\sqrt{1+ac}$. Сабирањем ових неједнакости добијамо да је

$$2(a+b+c)<2(\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ac+1}),$$

односно, $a+b+c<\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ac+1}$.

29. $\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\cdots+\frac{2013^2+1}{2013^2-1}=\frac{2^2-1+2}{2^2-1}+\frac{3^2-1+2}{3^2-1}+\cdots+\frac{2013^2-1+2}{2013^2-1}=1+\frac{2}{2^2-1}+1+\frac{2}{3^2-1}+\cdots+1+\frac{2}{2013^2-1}=2012+\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{3^2-1}+\cdots+\frac{2}{2013^2-1}$. Како је $\frac{2}{n^2-1}=\frac{2}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$, следи да се добијени збир може представити у облику $2012+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2014}\right)$, па сређивањем добијамо да је вредност израза једнака

$$2012+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=2013+\frac{1}{2}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014},$$

одакле следи тражена неједнакост.

30. Приметимо да је $a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)=(1-c)(1-b)$. Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\sqrt{a+bc}=\sqrt{(1-b)(1-c)}\leqslant\frac{2-b-c}{2}=\frac{a+1}{2},$$

и слично за остала два израза. Применом неједнакости између аритметичке и хармонијске средине добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c+ab}}&\geqslant\frac{2}{a+1}+\frac{2}{b+1}+\frac{2}{c+1}\\&\geqslant\frac{2\cdot 9}{(a+1)+(b+1)+(c+1)}=\frac{2\cdot 9}{4}=\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a=b=c=\frac{1}{3}$.

31. *Прво решење.* Најпре, из $ab\geqslant 1$ следи да је $a+b\geqslant a+\frac{1}{a}\geqslant 2$. Даље је

$$\begin{aligned}a+2b+\frac{2}{a+1}&=b+(a+b)+\frac{2}{a+1}\geqslant b+2+\frac{2}{a+1}\\&=\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+1+\frac{2}{a+1}\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{(b+1)^2}{2(a+1)}},\end{aligned}$$

на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине. Аналогно се добија да је $b+2a+\frac{2}{b+1}\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{(a+1)^2}{2(b+1)}}$. Множећи добијене неједнакости, још једном примењујући А-Г неједнакост, као и претпоставку $ab\geqslant 1$, добијамо да важи

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right)\geqslant 16\sqrt[4]{\frac{(a+1)(b+1)}{4}}\geqslant 16\sqrt[4]{\frac{2\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{b}}{4}}=16\sqrt[8]{ab}\geqslant 16.$$

Друго решење. Из очигледне неједнакости $\frac{a+1}{2}+\frac{2}{a+1}\geqslant 2$, додајући обема странама израз $b+\frac{a-1}{2}$, добијамо $a+2b+\frac{2}{a+1}\geqslant\frac{a+3}{2}+2b$. Слично се изводи да је $b+2a+\frac{2}{b+1}\geqslant\frac{b+3}{2}+2a$. Множећи добијене неједнакости, користећи Коши-Шварцову неједнакост, као и претпоставку $ab\geqslant 1$, добијамо да је

$$\begin{aligned}\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right)&\geqslant\frac{a+3+4b}{2}\cdot\frac{b+3+4a}{2}\\&\geqslant\frac{(\sqrt{ab}+3+4\sqrt{ab})^2}{4}\geqslant\frac{64}{4}=16.\end{aligned}$$

32. Разликујемо три случаја: а) $x \leqslant 0$; б) $0 < x < 1$; в) $x \geqslant 1$.

а) За $x \leqslant 0$ важи $x^{12} \geqslant 0$, $-x^9 \geqslant 0$, $x^4 \geqslant 0$ и $-x \geqslant 0$, па је

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^{12} + (-x^9) + x^4 + (-x) + 1 \geqslant 1.$$

б) Важи $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^{12} + x^4(1 - x^5) + (1 - x)$. Како је за $0 < x < 1$: $1 - x^5 > 0$ и $1 - x > 0$, то је вредност полинома тада већа од 0.

в) Како је $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1$, то за $x \geqslant 1$ важи $x^3 - 1 \geqslant 0$, па је вредност полинома већа или једнака 1.

33. Како је $(1 + x)^2 \geqslant 4x$ за све $x \in \mathbf{R}$, то је

$$(1 + a + b + c + d + e)^2 \geqslant 4(a + b + c + d + e).$$

За $x \in [0, 1]$ важи $x \geqslant x^2$, па је

$$4(a + b + c + d + e) \geqslant 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2).$$

Из претходних једнакости следи неједнакост која се доказује.

Једнакост у првом случају важи само за $x = 1$, а у другом за $x \in \{0, 1\}$. Дакле, у датој неједнакости једнакост важи ако и само ако је један од бројева a, b, c, d, e једнак 1, а остали су једнаки 0.

34. Тврђење се може доказати на више начина. Један од могућих је следећи.

Применом познате неједнакости $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$ добија се да важи

$$\begin{aligned}
&\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \\
&\qquad \geqslant \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right) + \left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) + \left(c + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{b}\right) \\
&\qquad = ab + bc + ca + 3 + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + a + b + c.
\end{aligned}$$

Коришћењем А-Г неједнакости следи да је $ab + \dfrac{b}{a} \geqslant 2b$, $bc + \dfrac{c}{b} \geqslant 2c$ и $ca + \dfrac{a}{c} \geqslant 2a$, па се из претходног добија да је

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geqslant 2b + 2c + 2a + 3 + a + b + c = 3(a + b + c + 1).$$

Тиме је дата неједнакост доказана. Једнакост важи ако и само ако важи у неједнакостима које су примењене, тј. ако и само ако је $a = b = c = 1$.

35. Из очигледне неједнакости $k^2 - 1 < k^2$ следи $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k^2 - 1}$, а одатле

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k - 1} - \frac{1}{k + 1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(k - 1)k} - \frac{1}{k(k + 1)}\right].$$

Замењујући редом $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ и сабирајући добијене неједнакости добијамо

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \\
&\qquad < 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n - 1)n} - \frac{1}{n(n + 1)}\right] \\
&\qquad = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n + 1)}\right] < 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

за све $n \geqslant 2$.

36. Трансформишимо A као што следи:

$$A = \frac{2 - a^3}{a} + \frac{2 - b^3}{b} + \frac{2 - c^3}{c} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - a^2 - b^2 - c^2$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc} - (a^2+b^2+c^2) \\
&= 2 \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc} - ((a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)) \\
&= 2 \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc} - (9 - 2(ab+bc+ca)) \\
&= 2 \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc} + 2(ab+bc+ca) - 9 \\
&= 2(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{abc}+1\right) - 9.
\end{aligned}
$$

Користећи сада познату неједнакост $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$ са $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$, добијамо да је $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c) = 9abc$, односно

$$ab+bc+ca \geqslant 3\sqrt{abc}. \tag{1}$$

С друге стране, на основу АГ неједнакости, имамо да је

$$\frac{1}{abc}+1 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{abc}}. \tag{2}$$

Множење обеју страна неједнакости (1) и (2) даје

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{abc}+1\right) \geqslant 3\sqrt{abc}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{abc}} = 6.$$

Дакле, $A \geqslant 2\cdot 6 - 9 = 3$, а једнакост важи ако и само ако је $a = b = c = 1$. Значи, тражена минимална вредност је 3.

Теорема 6. (**Коши-Шварцова неједнакост**) За произвољне реалне бројеве $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ важи неједнакост

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Специјално, за $n = 3$, Коши-Шварцова неједнакост гласи:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Доказ изводимо за наведени специјалан случај $n = 3$ (у општем случају доказ је сличан). Посматрајмо квадратни трином

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + (a_3x + b_3)^2$$

који очигледно има особину да је $f(x) \geqslant 0$ за све $x \in \mathbf{R}$. Он се може записати у облику

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)x + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Како тај трином има позитиван коефицијент уз x^2 и већи је или једнак од нуле за све $x \in \mathbf{R}$, одговарајућа парабола не сече x-осу (може евентуално само да је додирује). Но, то значи да дискриминанта тог тринома не може бити позитивна, већ важи

$$D = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \leqslant 0,$$

што је еквивалентно неједнакости која се доказује.

Једнакост важи ако и само ако парабола $y = f(x)$ додирује x-осу, тј. ако постоји тачка x за коју је $f(x) = 0$. Но, то је могуће ако и само ако је $a_1x + b_1 = a_2x + b_2 = a_3x + b_3 = 0$, тј. $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

Наводимо једноставну геометријску интерпретацију Коши-Шварцове неједнакости и, посредно, алтернативни доказ. Наиме, ако ставимо $n = 3$, она се своди на

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

и представља неједнакост

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

за векторе $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Она је, када се узме у обзир дефиниција скаларног производа вектора као $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$ у ствари просто неједнакост $|\cos(\vec{a},\vec{b})| \leqslant 1$.

Задатак 37. Ако је $a^2+b^2+c^2=1$ и $x^2+y^2+z^2=1$, доказати да је $-1 \leqslant ax+by+cz \leqslant 1$.

Решење. Применом Коши-Шварцове неједнакости на бројеве $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$ и $b_1=x$, $b_2=y$, $b_3=z$ добија се да важи

$$|ax+by+cz| \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1,$$

одакле следи тврђење.

Задатак 38. Доказати да за позитивне бројеве a_1, a_2, … , a_n важи неједнакост

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Решење. Тврђење следи применом Коши-Шварцове неједнакости на бројеве $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, … , $\sqrt{a_n}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a_2}}$, … , $\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$. На други начин, можемо закључити да оно важи јер је еквивалентно неједнакости $H_n \leqslant A_n$ за n (в. задатак 6).

Задатак 39. Нека су x,y,z реални бројеви већи од 1 за које важи $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$. Доказати да је $\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$.

Решење. Из услова задатка следи да је $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{y-1}{y}+\dfrac{z-1}{z}=1$, па је неједнакост која се доказује еквивалентна са

$$(x+y+z)\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right) \geqslant (\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1})^2.$$

Ова неједнакост се добија применом Коши-Шварцове неједнакости на тројке $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$, односно $\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$, $\sqrt{\dfrac{y-1}{y}}$, $\sqrt{\dfrac{z-1}{z}}$. Једнакост важи ако и само ако је $x=y=z=\dfrac{3}{2}$.

Задатак 40. (ИМО'95) Ако је $a,b,c>0$ и $abc=1$, доказати неједнакост

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решење. Заменом $x=\dfrac{1}{a}$, $y=\dfrac{1}{b}$, $z=\dfrac{1}{c}$ (уз услов $xyz=1$) дата неједнакост се трансформише у

$$L \equiv \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Примењујући Коши-Шварцову неједнакост на бројеве $a_1=\sqrt{y+z}$, $a_2=\sqrt{z+x}$, $a_3=\sqrt{x+y}$, $b_1=\dfrac{x}{\sqrt{y+z}}$, $b_2=\dfrac{y}{\sqrt{z+x}}$, $b_3=\dfrac{z}{\sqrt{x+y}}$ добија се да је

$$(x+y+z)^2 \leqslant [(y+z)+(z+x)+(x+y)]\cdot L,$$

одакле је $L \geqslant \dfrac{x+y+z}{2} \geqslant \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\dfrac{3}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Каделбург, Д. Ђукић, М. Лукић, И. Матић, *Неједнакости* (друго издање), Друштво математичара Србије, св. 42, Београд, 2014.
2. И. Томић, *Неједнакости за ученике основних школа*, Круг, Београд, 1999.
3. *1100 задатака*, Друштво математичара Србије (друго издање), св. 54, Београд, 2016.