РЕПУБЛИЧКИ СЕМИНАР ДМС, Фебруар 2016

Проф. др Градимир Војводић, Нови Сад

ЧУДЕСНИ СВЕТ МАТЕМАТИКЕ

I ТАЈНА ПИСМА

Узмимо чисту белу хартију и пером нанесимо поруку користећи сок од лимуна уместо мастила.Када се осуши сок порука ће бити невидљива (кажемо-да је шифрована).Ако желимо да неко други прочита ту поруку морамо му рећи да загреје лист папира и порука ће се појавити (кажемо-да је дешифрована).

Потреба људи да размењују тајне поруке појављује се још пре нове ере. Занимљиви су поступци који потичу из Спарте 500 година пре нове ере, а којим су се преносиле тајне поруке. Код Римљана у доба Јулија Цезара (50 г. п.н.е.) извршена је мала промена тих поступака. У основи тих поступака било је померање слова абецеде из основног текста за неки задати циклус. Тако, у доба Цезара свако слово абецеде замењује се словом које је на трећем месту испред њега.

Значајно побољшање поступака за шифровање урадио је Италијански архитекта Леон Батиста Алберт 1466.г. Иначе, он је познат и по својим радвима о перспективи. У периоду између два светска рата, Немци су користећи резултате Артура Шербиуса, конструисали машину за шифровање - ЕНИГМА. Током II светског рата на поступку дешифровања само у Енглеској учествовало је преко 7000 људи, међу њима и Алан Тјуринг. Тјуринговим радовима из математике започела је ера рачунара.

Посебно ће бити дат поступак Г.С.Вернама из 1926.г. који до данас није проваљен, а који захева само познавање сабирања два природна броја по модулу два, и то само за бројеве 0 и 1.

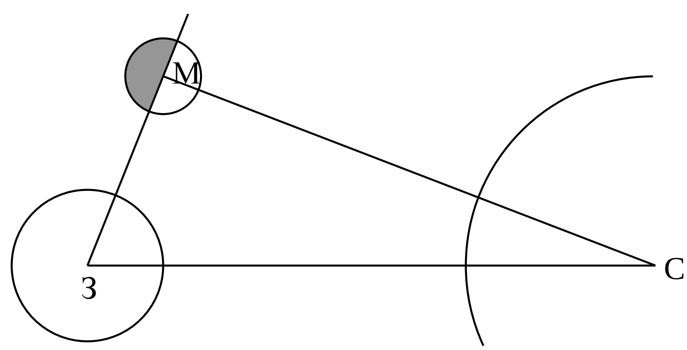
Биће речи и о неким савременим криптографским методама.

II ЧУДЕСНИ СВЕТ МАТЕМАТИКЕ

Антички научник Грк Аристарх (3 век п.н.е.) доказао је да је Сунце веће од Земље, а да при том није знао колики је полупречник Земље (много година касније то је доказао Ератостен).

Угао посматрања Сунца и Месеца од Земље је приближно исти $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$. Месец и Сунце на небу су привидно приближно исте величине.

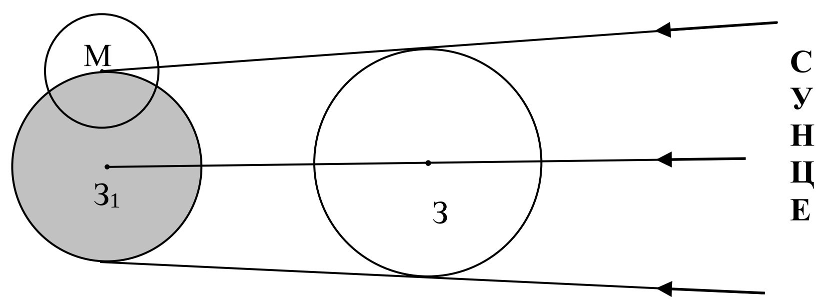
.



Аристарх је посматрао однос Сунца и Месеца и то у оним данима када се Месец види по дану.

Приметио је да се понекад види тачно једна половина Месеца са Земље. То се једино може видети када је угао ЗМС прав. Он је затим измерио угао МЗС и знајући да је збир углова у троуглу 180° одредио угао ЗСМ. Нацртао је троугао сличан троуглу ЗСМ и одредио однос страна $\frac{ЗС}{ЗМ} \approx 40$ (данас се зна да је тај однос приближно 385). То је значило да је Сунце 40 пута веће од Месеца (сетимо се да и Сунце и Месец имају приближно исти угао посматрања са Земље). Аристарх је даље посматрао залазак Месеца за сенку Земље.

.



Он је посматрањем утврдио да је однос сенке Земље З$_1$ и диска Месеца 2 : 1 (тј. Земља је два пута већа него Месец – данас се зна да је 3 пута већа). Дакле, како је Сунце 40 пута веће од Месеца и како је Земља 2 пута већа од Месеца следи да је Сунце 20 пута веће од Земље.

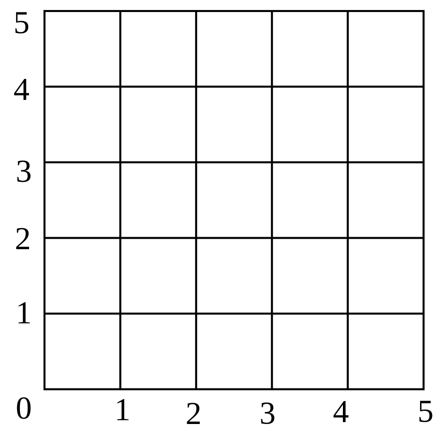
Аристарх је тада закључио да центар свемира није Земља него Сунце. Због тог учења био је протеран из Грчке, а његово учење је вековима било забрањено.

Занимљиви задаци

1. Три друга су кренула на излет. Први је понео 5 кромпира, други 3 кромпира, а трећи је забравио да понесе кромпир, већ је имао 8 динара. Другари су скували кромпире и договорили су се да трећи друг плати 8 динара као надокнаду за кромпир. У ком односу би прва двојица другара требало да поделе новац?
(О кромиру су писали писци, а сликали су га и сликари-Винсет ван Гог,Кромпири у жутој чинији,1888.)

2. Петар је желео да огради воћњак. У воћњаку ни једно стабло није више од 10 метара, а најниже стабло високо је 1 метар. Удаљеност између подножја било која два стабла мања је од разлике њихових висина. Да ли Петар може оградити воћњак са оградом кружног облика од жице чија је   дужина 32 метра?
(Овај задатак указује на изопермерijски проблем-да круг обухвата највећу површину од свих затворених кривих.Феничанска краљица Фиона тракама од волујске коже означила је будући град Картагину. Изопериmeрijски проблем је стриктно доказан тек средствима модерне математике-Ј.Шнајдер.)

3. Дата је квадратна целобројна мрежа у равни:
.



Може ли се конструисати једнакостраничан троугао чија се темена налазе у чворовима те мреже (у тачкама пресека линија које образују мрежу)?
(Овај задатак указује на ликове који се не могу приказати на монитору,а што проучава „компјутреска“ геометрија.)

4. Фабрика керамичких плочица прави плочице различитих облика: квадрата, једнакостраничних троуглова и правилних шестоуглова, којима се може обавити покривање пода. Да ли би се под могао покрити правилним петоугаоницима?

5. На равној пољани пободена су два штапа познатих дужина a и b. Сваки врх штапа повезан је канапом са подножјем другог штапа. У тачки пресека ова два канапа постављена је мета за гађање. Растојање између два штапа није познато. Треба наћи висину (h) мете од земље.

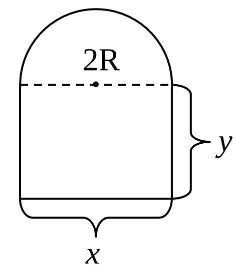
6. Дата је дуж AB. Предпоставимо да имате шестар чији је отвор сталан (не може се повећати ни смањити), а различит је од AB. Помоћу тог шестара конструисати једнакостраничан троугао чија ће страница бити AB. (Ово је задатак Н. Тартаља, XVI век., и о конструкцијама ограниченим средствима).

7. Нека је дата права ℓ и две тачке P и Q са исте стране праве ℓ. За коју тачку R која припада правој ℓ је PR + RQ најкраће растојање од P до Q. Ово је Херонов проблем (решавањем тог проблема решава се и задатак наћи најкраћи пут између два села P и Q и пута ℓ.Такође користи се у доказу изопериметријском проблему.)

8. Дата је површина *P* и страница *c* = PQ троугла. Међу свим таквим троугловима одредити онај за који је збир других двају страница *a* и *b* најмањи.(Такође овај задатак користи се у доказу изопериметријског проблема.)

9. Од свих правоугаоника датог обима највећу површину има квадрат. Докажи!

10. Треба изградити тунел (види слику) где је горњи део полукружног облика. Задата је површина пресека тунела P. Колико треба да износи ширина тунела *x* ($x = 2R$), а колика део висине *y* да обим тунела буде што мањи?



11. По целој ливади трава расте подједнако брзо и густо. Познато је да 10 крава поједе сву траву за 20 дана, а ако пасе 30 крава појешће сву траву за 4 дана. За колико дана ће 25 крава појести ту траву? (Ово је задатак И. Њутна.)

12. Два брода удаљена 70 *km*, почињу у истом тренутку да се крећу и сусретну. Први се креће брзином од 20 *km/h*, а други 15 *km/h*. У тренутку поласка бродова један галеб полеће од јеног брода и када стигне на други, галеб се одмах окрене и лети до првог. Када стигне до првог брода, поново се одмах окрене и лети до другог. Галеб лети на тај начин док се бродови не сусретну. Галеб лети брзином од 25 *km/h*. Колики је дуг пут прелетео галеб од момента поласка два брода па до њиховог сусрета?

III DUPLIKACIJA KOCKE

Uvod

Konstruktivni problemi su uvek bili u najomiljeniji predment u geometriji. Tradicionalno ograničavanje sprava pri rešavanju geomerijskih konstrukcija na šestar i lenjir, seže daleko u prošlost mada su Grci koristili i druge istrumente. Poznata geometrija Euklida (III vek prije nove ere) zasnivala se na geometrijskim konstrukcijama izvedenim samo lenjirom i šestarom, ravnopravnim u konstrukcijama. Pri tom lenjir može da se koristi samo kao instrument pomoću kojeg može da se konstruiše prava linija, ali kojom se ne mere dužine. Iako veliki broj konsrukcija se može izvesti ovim putem, još iz grčkog doba poznata su sledeća tri problema koja ne mogu da se reše ovim putem: **duplikacija (udvostručenje) kocke** – naći stranicu kocke čija će zapremina biti dva puta veća od zapremine date kocke; **trisekcija ugla –** naći trećinu datog ugla; **kvadratura kruga** – konstruisati kvadrat koji ima istu površinu kao dati krug.

Nerešeni problemi ovog tipa su podstakli jedno sasvim novo razmišljanje – *kako je moguće dokazati da neki problemi nemaju rešenja?* Odgovor je ležao u modernoj algebri i teoriji grupa. Problem rešavanja algebarskih jednačina datira odavno i dugo je bio centralni sadržaj algebre. Opisi rešavanja nekih jednostavnih algebarskih jednačina pojavljuje se još 2000 godina pre nove ere, na primer u Egiptu u doba Srednjeg carstva u Londonskom papirusu poznatom kao Ahmesova računica i na Vavilonskim pločicama u približno isto vreme. Vavilonci su znali da rešavaju kvadratne jednačine , dok su se rešavanjem jednačina trećeg i četvrtog stepena u XVI veku bavili Đirolamo Kardano (*Girolamo Cardano*), Nikolo Tartalja (*Nicolo Tartaglia*), Lodoviko Ferari (*Lodovico Ferrari*), Šipione del Fero (*Scipione del Ferro*) i mnogi drugi.

U algebri je dugo ostalo otvoreno pitanje o rešivosti algebarske jednačine preko radikala. Za algebarsku jednačinu reći ćemo da je rešiva radikalima ako njeni koreni mogu da se dobiju pomoću racionalnih operacija (sabiranje, oduzimanje, množenje i delenje) i pomoću operacije korenovanja, pri čemu se te operacije primjenjuju konačan broj puta na koeficjente ili na takve funkcije koeficjenata u kojima se javljaju samo pomenute operacije. Tako su kvadratna jednačina i jednačine trećeg i četvrtog stepena rešive radikalima. Bilo je za očekivati da su i jedančine petog i višeg stepene rešive na isti način, ali se ispostavilo da to nije moguće.

Prve osnove rešivosti algebarskih jednačina postavio je francuski matematičar Galoa (*E. Galois*) dovodeći rešivost algebarskih jednačina pomoću radikala u vezu sa teorijom grupa. Zahtev da se koreni algebarske jednačine $f(x)=0$ mogu izraziti pomoću koeficjenata te jednačine uz upotrebu racionalnih operacija i korenovanja iskazuje se kao zahtev da polje F bude sadržano u nekom polju radikala nad K. Kada je ovaj zahtev ispunjen kaže se da je data algebarska jednačina rešiva pomoću radikala. Galoa je utvrdio kriterijum rešivosti algebarskih jednačina koje se mogu rešavati samo pomoću radikala

Opšta algebarska jednačina

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0, \ (n > 4)$$

stepena većeg o četiri sa nezavisnim realnim koeficjentima $a_k \ (k = 0,1,2,\ldots,n)$ nije rešiva pomoću radikala. Mnogi veliki matematičari, kao na primer Ojler (*L. Euler*), su mislili da je to moguće, ali Rufini (*R. Ruffini*) i Abel (*N. Abel*) su to opovrgli početkom XIX veka. Ovde se ne radi o pitanju egzistencije rešenja algebarske jednačine stepena *n*. To je dokazao Gaus (*Gauss*) 1799. godine u svojoj doktorskoj tezi. Problem Abela i Rufinija je bio *da li se ova jednačina može rešiti pomoću radikala i korenovanja?* Put do rešenja ovog problema dovela je da razvitka moderne algebre i teorije grupa.

Rešavanje problema duplikacije kocke samo primenom lenjira i šestara

Jednostavnosti radi, pretpostavimo da je data kocka koja ima ivicu jedinične dužine. Zapremina te kocke će biti kubna jedinica. Znači , traži se ivica kocke čija je zapremina dva puta veća.

Proročica Orakla prorekla je Atinjanima „strašne“ događaje ako ne naprave oltar oblika kocke koji je duplo veće zapremine od postojećeg- mermerne kocke stranice jedan metar.

Dakle, problem se svodi na rešavanje jednačine trećeg stepena $x^3 = 2$. Pokazaćemo da da se ovaj problem **ne može rešiti samo primenom lenjira i šestara,** tj. da nule polinoma $p(x) = x^3 - 2$ nisu konstruktibilne.

IV MALO ISTORIJE

O TRIGONOMETRIJI

Reč trigonometrija je sastavljena od grčkih reči $\tau\rho\iota\gamma\omega\upsilon o\upsilon$ (trougao) i $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\tau\upsilon$ (mera). To pokazuje da se ova oblast matematike u početku bavila problemom merenja trougla. Odnosi između uglova i stranica trougla izraženi su pomoću trigonometrijskih funkcija (*sinus, kosinus, tangens i kotangens*).

Trigonometrijske funkcije su baza za opisivanje mnogih pojava i procesa u savremenoj nauci i tehnici.

Analitički zasnovana trigonometrija tokom devetnaestog veka ima široku primenu u mehanici, fizici i tehnici, naročito u proučavanju oscilatornog kretanja (npr. talasna kretanja u akustici, optici i elektromagnetici)

Dokazano je da se svako periodično kretanje može sa dovoljnom tačnošću predstaviti u vidu zbira prostih harmonijskih oscilacija, tj. oscilacija koje se matematički izražavaju formulom $y = a\sin(bx + c)$,

Značajnu ulogu u trigonometriji ima broj π, koji je u matematici poznat više od četiri hiljade godina. (Inače π je iracionalan broj i nije rešenje nijedne algebarske jednačine, pa je i transcedentan broj)

Vavilon i Egipat u kojima su hiljadama godina pre naše ere bile proučavane astronomija i astrologija u trgovačke ili religiozne svrhe, bili su osnov za prva trigonometrijska znanja. Takodje, neki podaci ukazuju na to da su i u drevnoj Indiji i Kini ta znanja takođe bila korišćena.

Vavilonci su uveli šesdesetični brojni sistem ,pa je današnja podela punog kruga na 360 stepeni, stepena na 60 minuta i minuta na 60 sekundi ostatak vavilonskog uticaja.

U Egiptu, poplave zemljišta u slivu reke Nila, nametale su, prema Herodotu, potrebu dobro razvijenog geometarskog merenja i geometrije. Koliko se već tada držalo do geometrijskih znanja pokazuju ne samo problemi iz "Ahmesove računice" (oko 1700. g. pre n.e.), nego i činjenica da je bilo uvedeno naročito činovničko zvanje državnih geometara, premerača zemljišta, ili kako su ih Grci nazivali "zatezači užeta". Tada se naime, prav ugao konstruisao zatezanjem užeta u obliku trougla sa stranama 3, 4, 5. Pominje se da su Egipćani za određivanje nagiba pri građenju piramida ili pri određivanju daljine broda na pučini, koristili veličinu zvanu $seqt$, koja je verovatno bila kosinus.

U Antičkoj Grčkoj sistematizuju se prikupljena znanja i otkrivaju nove činjenice i metode.

Tales iz Mileta (624-548 g. pre n.e.) živeo je i u Egiptu. Poznato je da je izmerio visinu piramide po senci. On je to postigao mereći senku piramida onda kada je "naša senka jednaka nama samima". Znao je da koristi sličnost trouglova i mogao je da odredi udaljenje broda od pristaništa Mileta.

Aristarh sa Samosa (270 g. pre n.e.) napisao je delo "*O razmerama rastojanja Zemlje, Sunca i Meseca*" u kojem je pokušao da odredi rastojanja i razmere posmatrajući uglove između pravca ka Suncu i ka Mesecu onda kad je osvetljena tačno polovina meseca koristeći činjenicu da onda Zemlja, Sunce i Mesec čine pravougli trougao.

Heron Aleksandrijski (I vek pre n.e.) u svom delu "O merenju polja", daje i formule:

$$\frac{ab}{h_c} = \frac{ac}{h_b} = \frac{bc}{h_a} = 2R$$

Hiparh iz Nikeje (160-125 g. pre n.e.) napisao je delo "*O tetivama kružnih lukova*" u 12 knjiga (nisu sačuvane), a u kojem je po prvi put navedena tablica tetiva sa uputstvima za primenu za rešavanje trougla i date osnove sferne trigonometrije

Klaudije Ptolomej, koji je živeo u Aleksandriji u drugom veku pre n.e., napisao je astronomski zbornik poznat pod arabljanskim nazivom "Almagest", u 13 knjiga u koji su ušli Hiparhovi rezultati, u kojem je Ptolomej dao svoj metod sračunavanja tetiva.

Grčki uticaj je ojačao nakon Aleksandra Makedonskog,i u Indiji, što se ogledalo u radovima matematičara Aryabhatta (476 g. n.e.) i Brahmagupta (598 g. n.e.), a posle njih Bhaskara (1114 g. n.e.). Indijski astronomi i matematičari prvi su primetili da umesto odnosa tetive i poluprečnika, koji su koristili grčki matematičari je podesnije koristiti odnos polutetive i poluprečnika. Time je prvi put upotrebljen odnos kojim se ustanovljuje funkcija *sinx*. a Evropljani prevodeći ga na latinski, nazvali *sinus*, što znači ulegnuće, udubljenje, nabor ili šupljina

Muhamed ibn Musa Alhvarizmi, čija je knjiga «*Aldžabr al-mukabale*» dala ime današnjoj algebri, sa Al-Batanom (oko 900 g. n.e.) dao je ponovo prerađene tablice Ptolomeja, ističući prednost upotrebe sinusa. Spomenimo i Al-Biruni (oko 1000 g. n.e.), a naročito Abul-Wafa (940 g. n.e.). Veoma su značajne tablice tangensa Abul Wafe.

U srednjem veku dolazi do zastoja u razvoju svih nauka . Dug period vremena pokriven je mrakom inkvizicije. Trigonometrija ne doživljava bolju sudbinu nego druge svetovne discipline koje crkva progoni ako joj ne služe. Posle dužeg vremena, vredno pomena je tek delo Johana Milera. On, oko 1464. piše delo "*De triangulis omnimodis*", koje sadrži rešenja nekih važnih problema ravne i sferne trigonometrije. Ovo delo bilo je objavljeno tek posle njegove smrti 1533. godine i bilo je od velikog značaja za dalji razvitak trigonometrije. Regiomontanusu se duguje i tablica tangensa. U novom veku, posle otkrivanja Amerike, nagli razvitak trgovine i industrije dao je pun podstrek novom razmahu nauke kojom više ni crkva nije mogla stati na put.Među matematičarima, čija su dela značajna za dalji razvoj trigonometrije, treba pomenuti Njutna (1642-1727), koji je prvi u delu "*De analisy per equationes numero terminorum infinitas*" izložio radove za sinus i kosinus,

Vijeta (1540-1603), je prvi upotrebljavao svih šest trigonometrijskih funkcija, Ojler (1707-1783) je uveo današnje oznake trigonometrijskih funkcija, uspostavio vezu između trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija uz upotrebu kompleksnih brojeva i dao izraze za sve trigonometrijske funkcije u obliku redova.

Leonald Ojler je koristio analitički pristup za trigonometrijske funkcije , ne vezujući ih nužno za trigonometrijsku kružnicu. On njihov argument shvata uopšteno kao realan broj, a ne isključivo kao ugao ili luk

Zasluge za razvoj sferne trigonometrije ima naš matematičar Ruđer Bošković (1711-1787), takođe i astronom, fizičar i filozof.

Posebnu važnost u sve široj primeni trigonometrijskih funkcija dali su redovi Furijea (1768-1830). Furije je trigonometrijskim polinomima i redovima prikazivao druge funkcije što u modernoj matematici, kako teorijskoj tako i u primenjenoj, ima ogroman značaj.

O LOGARITMIMA I EKSPONENCIJALNIM FUNKCIJAMA

Iz potreba nauke , naročito astronomije , dolazi do otrića logaritma. Iz praktičnih merenja dobijani su višecifreni brojevi sa kojima je računanje bilo teško .

Najstarije ideje logaritma mogu se naći kod velikog grčkog matematičara Arhimeda (*287-212 p.n.e.*), koji je uočio vezu izmedju članova aritmetičkog niza i geometrijskog niza za q=2

0	1	2	3	4	5	6	. . .
1	2	4	8	16	32	64	. . .

Da bi izračunali proizvod 4 .8 , dovoljno je sabrati brojeve 2 i 3 iz gornjeg niza , tj 2+3=5 ,i ispred broja 5 pročitati njegov odgovarajući broj (32).

U XV veku došlo se na ideju da se množenje svede na sabiranje a deljenje na oduzimanje.

Johan Verner (*Johan Werner 1468-1522)* nemački astronom i matematičar dolazi do jedne metode koja je nazvana prostaferesis . On proizvod trigonometrijskih funkcija pretvara u zbir.

Tim metodom služio se i danski astronom Tiho Brahe *(Tycho Brahe 1546-1601)*., u svojim računima.

Nikola Šike (*Nicolaus Chuqnet)* lekar iz Lina je množenje stepena istih osnova sveo na sabiranje eksponenata . Mihael Štifel (*Michael Stiefel)* upotrebio je i negativne eksponente .

Sa otkrićem decimalnih brojeva (oko 1600. god) dolazi do novih saznanja o logaritmima. Tu je doprinos dao škotski matematičar Džon Neper (*John Napier of Marchiston 1550- 1617)* . Od njega potiče naziv logaritam . Ova reč je nastala od grčkih reči *logos*(odnos) *aritmos*(broj).

Neper je sastavio i prve logaritamske tablice koje su izašle 1614. godine. Složena trigonometrijska izračunavanja su znatno uprošćena.

Osnova Neperove metode je u konstrukciji dva niza, od kojih je prvi geometrijski, a drugi aritmetički, a konstruisani su tako da članovi drugog niza budu logaritmi odgovarajućih članova prvog.

O pojmu logaritma znao je i Švajcarac Jost Birgi (*Jost Biirgi 1552-1632)*, i postupao slično Neperu.

Merkator (*Mercator Nikolaus Kauffman 1619-1687*) je definisao ln x putem integrala.

Značajno mesto u nalaženju logaritma imao je engleski matematičar Henri Brigs (*Henry Briggs 1556-1630*)

U XVIII veku posebno mesto pripada švajcarskom matematičaru Ojleru (*Euler , 1707-1783*). Ojler je godine 1748. objavio :”Uvod u infinitezimalnu analizu“ , u kojoj proučava funkcije , a naročito logaritamske i eksponencijalne , a bavi se i razvijanjem u redove i beskonačnim proizvodima.

Ojler dolazi do formule

$$e^{ix} = cosx + i\, sinx$$

Interesantno je da se u periodu XVIII i XIX vek logaritmi izračunavaju sa velikim brojem decimala . Nemački matematičar Karl Fridrih Gaus smatra da je manje značajan broj decimala , a da je znatno važnija procena granice tačnosti izračunatog algoritma i pri računanju odredjuje granicu tačnosti.

O PRIMENI GEOMETRIJE ZA REŠAVANJE KVADRATNE JEDNAČINE

Istorijski gledano geometrijske metode za rešavanje kvadratnih jednačina pojavile su se prve . One su interesantne učeniku jer povezuju različite oblasti matematike . Za njih su znali Vavilonci (oko 1500 godina p.n.e.).

Takodje ,poznavali su ih i antički Grci . Kako Grci nisu znali za negativne brojeve to su oni rešavali razne probleme koji se svode na kvadratne jednačine, a koje su imale bar jedno pozitivno rešenje. Tako Euklid u svojim “Elementima “ (300 p.n.e.) rešava jednačine oblika

(1) $x^2 + p x = q$ (2) $x^2 + q = p x$ (3) $x^2 = p x + q$

Gde su p,q pozitivni brojevi. Te metode bile su poznate i Arapskim matematičarima .

Tako Alhvarizmi rešava sledeći zadatak : “ Nadji broj čiji kvadrat , uvećan za svoju desetostruku vrednost daje broj 39 “ ($x^2 + 10\,x = 39$) Takodje , italijanski matematičar Kardano (XVI vek) rešava jednačinu $x^2 + p x = q$

Poznato je i rešenje Marina Getaldića (XVII vek) . On rešava jednačinu $x^2 + p x = q^2$

O MATEMATIČKOJ LOGICI

Ideja da je matematika deduktivna nauka počinje sa Talesom iz Mileta (624-545 p.n.e) . Prvu sistematizaciju znanja o logici dao je Aristotel (384-322 p.n.e)

Svakako , treba spomenuti i paradokse Epimenide (oko 600 p.n.e) i paradoks Zenona . Matematička logika zvanično se pominje u publikaciji iz 1847 Džordž

Bula (1815 1864) . Matematička analiza logike . Spomenimo De Morgana i njegove tautologije iz 1860. god. , kao i knjigu Dževonsa “Osnovne lekcije iz logike” . Takođe i N.Lobačevskog (1792-1856). Dijagrami Venea objavljeni su 1881. god. Takodje, poznata je i knjiga Luisa Kerola iz 1886. god. Krajem 19 veka Šreder uvodi algoritme u Logiku. Naslednici Šredera početkom 20. veka bili su Lovenhajm i Skolem . Spomenimo još Hilberta , zatim Rasela i Vajtheda (i njihovu knjigu “Principi Matematike” 1910-1913) kao i Fregea.

Ne smemo zaboraviti najveće ime 20 veka Kurt Gedela čiji su rezultati izmenili pogled na matematiku. Takođe treba spomenuti L.Brauera,A,Hejtinga,A.Tjurunga,A.Čerča,A.Malceva,A.Markova....

MALO LITERATURE
(http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/3972/PREDAVANJE_IZ_ALGEBRE.pdf?sequence=1
http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/3981)