Логаритамска функција – шта ће то мени?

Александра Равас
Јован Кнежевић
Нела Спасојевић

Републички семинар 2016.

о настави математике и рачунарства у основним и средњим школама

Београд, 14. фебруар 2016.

Кратка историја логаритама

Нисте ни свесни колико поезије се налази
у рачунању таблице логаритама.
Карл Фририх Гаус, својим ученицима

Зашто *логаритми*?

Многе области у којима су нумеричка израчунавања важна, попут астрономије, навигације, трговине, технологије и ратовања, одувек су постављале захтеве да се те рачунице обављају што брже и тачније. Ту растућу тражњу задовољила су четири значајна открића: индо-арапска нотација, децимални бројеви, логаритми, и савремене машине за рачунање. Најраније систематично разматрање децималних бројева може се наћи у утицајном тексту о аритметици Симона Стевина насловљеном са *Десета* (*La Disme*, 1585). Треће наведено откриће, које је у многоме штедело труд, био је изум Џона Непера који се појавио у његовој књижици из 1615 насловљеној са *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Опис дивне таблице логаритама*). Хенри Бригс је помогао усавршавању Неперовог проналаска и уложио је много труда и времена на конструисање прве таблице декадних логаритама.

Неперово откриће логаритама

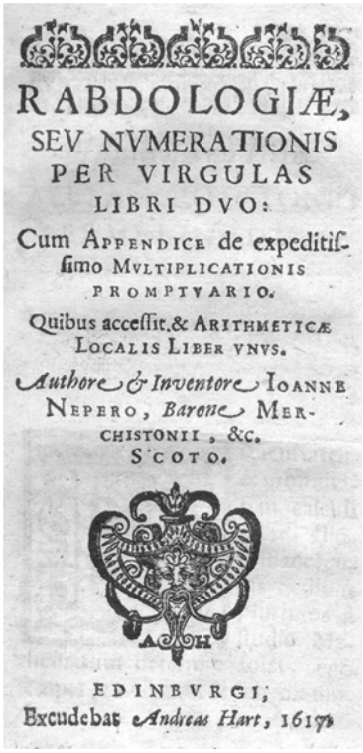
Људи који су изучавали и стварали математику током 16. и 17. века долазили су из разних струка и са разних друштвених положаја. Џон Непер, осми барон од Мерчистона, рођен 1. фебруара 1550. у време када је његов отац био шеснаестогодишњак, већи део свог живота провео је на велелепном породичном имању, у замку Мерчистон[1], близу Единбурга, у Шкотској, трошећи много енергије на политичке и религиозне расправе свог времена. Био је жесток противник католичанства и јавно се борио за начела Џона Нокса и Џејмса I. Као заговорник протестантизма, 1594. објавио је коментар на *Откровење Јованово* (под насловом *Plaine Discovery on the Whole Revelation of Saint John*) у коме је оштро напао Католичку цркву тврдећи да је римски папа уствари Антихрист. У коментару се налазило и „откриће“ да је Створитељ предложио да се крај света деси у периоду између 1688. и 1700. Његова верска расправа била је врло популарна, па је објављено чак 21 издање на више језика, од чега је најмање 10 издања објављено док је аутор био жив. Непер је сматрао да је то дело његов велики

[1] У коме је и преминуо, 4. априла 1617.

допринос човечанству, а чињеница је да је, управо захваљујући њему, а не својим математичким доприносима, постао врло познат у своје време.

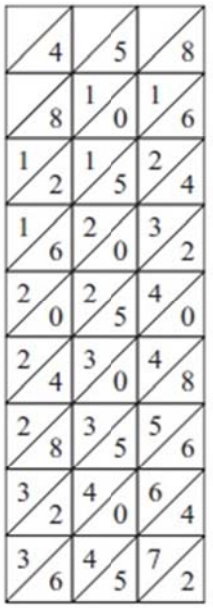
Поред тога, Непер је важио и за проналазача. Једна од његових практичних замисли је био уређај са хидрауличним навртњем и осовином која се окретала, а служио је за испумпавање воде из рудника угља. Попут Архимеда, и Непер је цртао различите направе које су могле да служе за одбрану његове отаџбине и вере у рату. Између осталог, међу нацртима тог деструктивног оружја могла су се наћи 2 типа огледала која би могла да униште непријатељски брод „на било којој задатој удаљености“, једна артиљеријска направа која би могла да „очисти простор од свих живих бића већих од једне стопе, а у пречнику од 4 миље око себе“, једна оклопна кочија са „ватреним устима“ која би „сејала смрт на све стране“ и „направе за пловидбу под водом“. Иако нису одмакле даље од идеје на папиру, лако је препознати да су вековима касније реализоване као машинка, тенк и подморница.

У сврху опуштања и одмора од политичких и религиозних полемика, Непер се занимао изучавањем математике и науке. Његови математички текстови су за главну тему имали практичност израчунавања. У књижици под насловом *Rabdologiae* (што долази од грчких речи *rabdos* и *logia*, у значењу штапић и колекција) из 1617. која је писана на латинском језику, и објављена у години Неперове смрти, уводе се штапићи помоћу којих је било могуће множити два броја механичким путем. Тај проналазак се често назива „Неперовим костима“ захваљујући енглеском преводу из 1667. у коме је реч *logia* погрешно протумачена и преведена као *logos* (говор): *Вештина пребројавања помоћу штапића који говоре: просто названих Неперовим костима*.


RABDOLOGIÆ,
SEV NVMERATIONIS
PER VIRGULAS
LIBRI DVO:
Cum APPENDICE de expeditissimo MVLTIPLICATIONIS PROMPTVARIO.
Quibus accessit, & ARITHMETICÆ LOCALIS LIBER VNVS.
Authore & Inventore IOANNE NEPERO, Barone MERCHISTONII, &c. SCOTO.
EDINBVRGI,
Excudebat Andreas Hart, 1617.

Неперови штапићи су се састојали од 10 правоугаоних дрвених или коштаних штапића који су били осмишљени тако да чине неку врсту таблице множења. Предња страна сваког штапића била је подељена на 9 квадрата. У први квадрат на врху била је угравирана конкретна цифра, а остали квадрати су садржавали њене производе редом са бројевима од 2 до 9. У ситуацијама када би тај

производ био двоцифрен, цифре би биле раздвојене дијагоналом, при чему је цифра десетица била смештена у горњем, левом троуглу. Последњи штапић који се користио као означивач редова, био је исписан римским бројевима од 1 до 9.



III $3 \cdot 458 = 1374$

VI $6 \cdot 458 = 2748$

Претпоставимо да је потребно помножити 458 са 36. Штапићи којима је на врху уписано 4, 5 и 8 би били поређани један до другог, заједно са означивачем редова. Посматрајући линију коју означава римски број 3, добија се резултат множења са тројком; десетице из сваког квадрата се преносе дијагонално доле и сабирају са јединицама из следећег квадрата са леве стране. У посматраном примеру, добијају се редом 4, 2+5, 1+2 и 1, односно цифре 4, 7, 3 и 1 производа 458 и 3 које су наведене у обрнутом редоследу; тачан производ је 1374. На потпуно исти начин се добија да је производ бројева 458 и 6 једнак 2748. Парцијални производи се на крају сабирају, при чему се води рачуна о њиховој месној вредности.

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 7 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 4 & \\ \hline 1 & 6 & 4 & 8 & 8 \end{array}$$

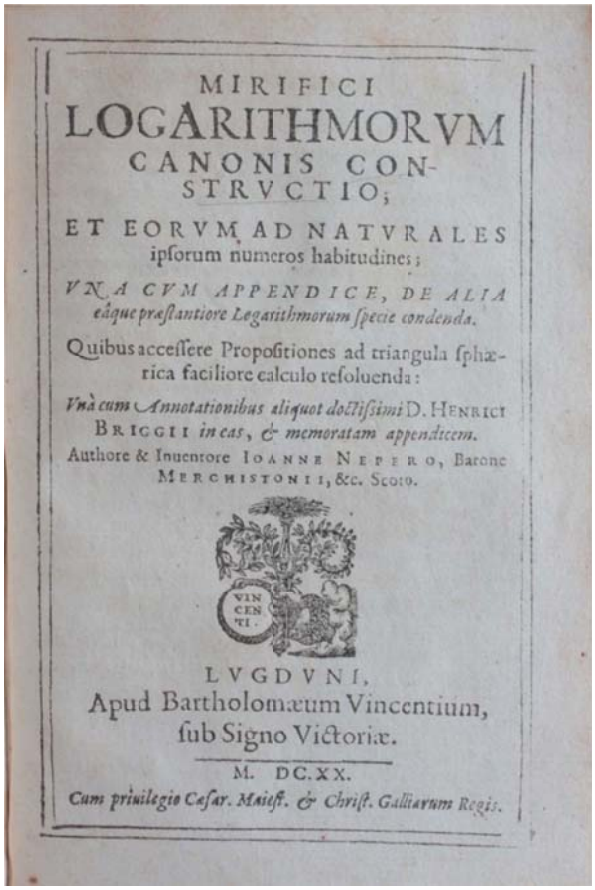
Захваљујући томе што је било могуће брзо доћи до парцијалних производа, Неперови штапићи су у суштини сводили процес множења на сабирање. Ова направа, коју су Неперови савременици јако ценили, данас је само историјски куриозитет.

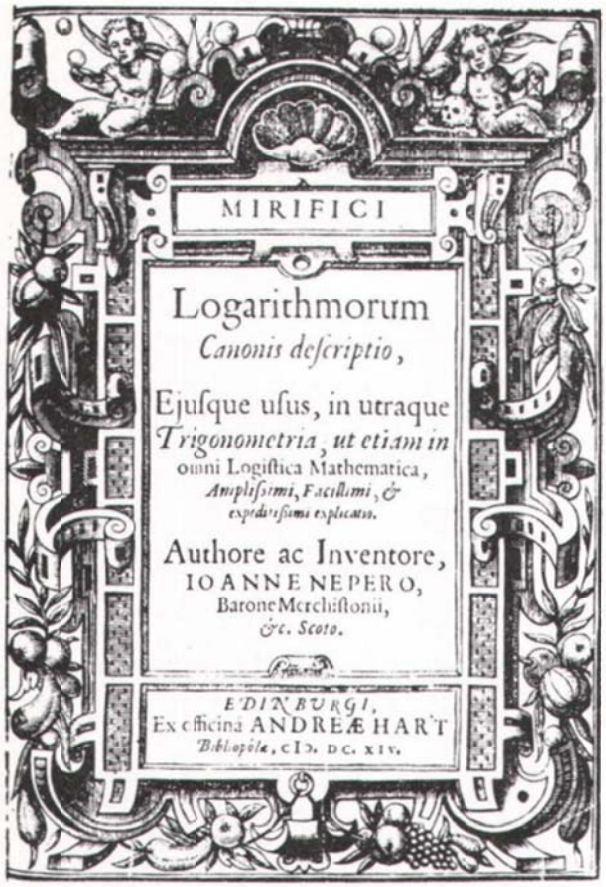
Нови покрет за олакшавање нумеричких калулација достигао је свој врхунац Неперовим открићем логаритама. Барон Молтон[2] је на уводном предавању поводом обележавања тристогодишњице објављивања *Описа* рекао:

[2] Џон Флечер Молтон, Барон Молтон, (18 новембар 1844 – 9. март 1921), енглески математичар, адвокат и судија.

Логаритми су се појавили као гром из ведра неба. Ниједно претходно достигнуће није довело до њиховог открића, указало на њега или најавило њихов долазак. Они стоје усамљени, нагло прекидајући ток људске мисли, и не позајмљујући ништа од дела других интелектуалаца нити следећи познате линије развоја математичке мисли.

Непер је потрошио пуних 20 година константно покушавајући да направи своје таблице, или „каноне“ како их је сам називао. Још 1594. астроном Тихо Брахе чуо је од Шкотланђанина који му је био гост, прве вести о сјајном поједностављивању вештине израчунавања. То монументално достигнуће напокон је откривено 1614. године у краткој књижици под насловом *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* која је имала 147 страна, од којих су 90 заузимале таблице. Није пуно времена изгубљено да се књига са латинског преведе на енглески, учинио је то Едвард Рајт, енглески математичар и картограф који је успут смањио број децимала у таблицама за једну цифру. Превод је објављен постхумно, и то под називом *Опис дивне таблице логаритама* (1616). Интересантно је да се реч „логаритам“ појављује на насловници, али се у тексту користи израз „вештачки број“. Три године након објављивања овог чувеног дела, изашла је и књига под насловом *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* која је написана пре *Описа*, а објавио ју је постхумно Неперов син Роберт. У њој је описан начин на који су конструисане таблице.


MIRIFICI
LOGARITHMORVM
CANONIS CONSTRVCTIO;
ET EORVM AD NATVRALES ipsorum numeros habitudines;
VNA CVM APPENDICE, DE ALIA eâque præstantiore Logarithmorum specie condenda.
Quibus accessere Propositiones ad triangula sphærica faciliore calculo resoluenda:
Vnà cum Annotationibus aliquot doctissimi D. HENRICI BRIGGII in eas, & memoratam appendicem.
Authore & Inuentore IOANNE NEPERO, Barone MERCHISTONII, &c. Scoto.
VIN CEN TI.
LVGDVNI,
Apud Bartholomæum Vincentium, sub Signo Victoriæ.
M. DC.XX.
Cum priuilegio Cæsar. Maiest. & Christ. Galliarum Regis.


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, & expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

Непер је радио на развоју логаритама у жељи да олакша напоре потребне за рачунице са веома великим бројевима које су биле споре и досадне. Био је упознат са делом *Arithmetica Integra* (1544)

Михаела Штифела, у коме је немачки алгебриста упоредо навео сукцесивне степене двојке и одговарајуће експоненте,

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

указавши на чињеницу да је збир два члана из (горњег) аритметичког низа био повезан са одговарајућим производом чланова (доњег) геометријског низа. Могуће да је то било довољно да Непер добије идеју о процесу који би заменио операције множења и дељења једноставнијим операцијама сабирања и одузимања. Са друге стране, постоје мишљења да је до свог открића дошао захваљујући релацији:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

Полазна идеја да се поједностави множење синуса је касније еволуирала и укључила и остале операције, и примену логаритама и на шири скуп бројева. Уосталом, као што је то приметио и барон Молтон, потпуно је неоснована тврдња да би се човек коме је на памет пала тако храбра идеја као што је израчунавање резултата множења употребом сабирања, непотребно ограничио само на синусе у својим разматрањима, уместо да покуша да уопшти своју теорију.

Неперове „дивне таблице“ биле су осмишљене за тригонометријске примене, пошто су давале вредности логаритама синуса углова између 30^0 и 90^0 у корацима од по једног минута. У његово доба обичај је био[3] да се синус угла α не посматра као однос, како ми то данас чинимо, већ као дужина половине тетиве над централним углом 2α у кругу довољно великог полупречника R; симболички записано, $\sin\alpha = \frac{1}{2}tetiva\ 2\alpha$. Непер је сматрао да би, узевши да је $\mathrm{R} = 10^7$ добио тачност од седам значајних цифара пре увођења разломљених бројева. Конкретно, узео је да је $\sin 90^0 = 10^7$, назвавши га „целим синусом“, пошто је то била највећа могућа вредност коју је синусна функција могла да има.

Непер је, без било какве сумње под утицајем Штифела, почео да упарује чланове геометријског низа са одговарајућим члановима аритметичког низа. Како би узастопни чланови геометријског низа били међусобно блиски, њихов количник мора бити близак јединици. Изабрао је да искористи 0,9999999, што би у савременој нотацији могло да се запише као $1-10^{-7}$, као заједнички однос. Затим је то помножио са 10^7 да би избегао рачунање са децималним бројевима. Следећи корак је био да одреди низ вредности:

$$10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{n}}, \mathrm{n} = 0, 1, 2, \cdots, 100.$$

Након што је прво користио израз „вештачки број“, Непер је касније почео да експонент *n* назива логаритмом броја $10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{n}}$. Изгледа да је његов ток размишљања при избору терминологије био следећи: $10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{n}}$ се изводи из 10^7 његовим узастопним множењем *n* пута изразом $1-10^{-7}$. Због тога се број *n*, дакле логаритам, може назвати или „бројем израза“ или „бројем који пребројава“, у зависности од тога како се преводи грчка реч *logos*, која у енглеском језику има неколико повезаних значења.

[3] А задржао се и неко време после Непера.

Ако ставимо да је $\mathrm{N} = 10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{n}}$, онда би Неперов логаритам броја *N* могли да означимо са $\mathrm{Nep.\log N = n}$. Онда је $\mathrm{Nep.\log 10^7 = 0}$; другим речима, $\mathrm{Nep.\log \sin 90^0 = 0}$, или, како то Непер каже, „ништа је логаритам пречника“. Такође је:

$$\mathrm{Nep.\log(1-10^{-7}) = Nap.\log 9999999 = 1},$$

$$\mathrm{Nep.\log(1-10^{-7})^2 = Nap.\log 9999998.0000001 = 2}, \text{ итд.}$$

Овде треба истаћи неколико занимљивих особина. Као прво, вредности $\mathrm{Nep.\log N}$ расту како се бројеви *N* (вредности синуса) смањују, што је потпуно супротно у односу на понашање логаритама какве данас користимо. Због тога што је уместо логаритма јединице изабрано да логаритам броја 10^7 буде једнак нули, позната правила која се користе при логаритамским рачуницама не могу се применити на Неперов систем. Конкретно, $\mathrm{Nep.\log MN}$ није једнак $\mathrm{Nep.\log M + Nep.\log N}$.

Штавише, једнакости $\mathrm{M} = 10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{m}}$, $\mathrm{N} = 10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{n}}$ и $1 = 10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{k}}$ повлаче следеће:

$$\mathrm{MN} = 10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{m+n}} \cdot 10^7 = 10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{m+n}} \cdot (1-10^{-7})^{-\mathrm{k}} = 10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{m+n-k}}$$

Одатле се добија да важи:

$$\mathrm{Nap.\log MN = m+n-k = Nap.\log M + Nap.\log N - Nap.\log 1}.$$

Али, стоји чињеница да је Непер свео проблем множења великих бројева на сабирање њихових логаритама, при чему се мора водити рачуна да је $\mathrm{Nap.\log 1 = 1611809}$.

Пошто није користио експоненте као олакшицу (та нотација је у његово време била новина) Непер је одредио свој геометријски низ помоћу интересантног ланца резоновања. Можемо то илустровати модерном симболиком уколико ставимо да је $\mathrm{N_n} = 10^7(1-10^{-7})^{\mathrm{n}}$. Лако се показује да је:

$$N_n = N_{n-1}(1-10^{-7}) = N_{n-1} - 10^{-7}N_{n-1}.$$

Пошто производ $10^{-7}N_{n-1}$ подразумева само померање децималног зареза, вредност N_n се добија уз врло мало труда помоћу вредности N_{n-1}. Непер је једноставно од сваког новодобијеног члана одузимао његов део који би одговарао 10^{-7} како би добио следећи члан низа, на пример:

$$\begin{array}{r}
10000000.0000000 \\
-1.0000000 \\
\hline
9999999.00000000 \\
-0.9999999 \\
\hline
9999998.0000001 \\
-0.9999998 \\
\hline
9999997.0000003
\end{array}$$

Оваква сукцесивна одузимања је понављао све док није стигао до стотог члана свог геометријског низа, за кога важи једнакост $N_{100} = 9999900{,}0004950$; због тога је логаритам овог последњег исписаног броја једнак 100.

Након што је дошао до логаритама основних бројева, још увек је преостало израдити логаритме свих преосталих бројева који су се налазили између, што није био једноставан посао. На овом месту нема довољно простора за детаљно објашњење, али треба нагласити да је, да би то урадио, Непер користио софистицирану и генијалну шему интерполације.

Требало би приметити још нешто. Наиме, нумеричка вредност израза $(1-10^{-7})^{10^7}$ је приближно једнака $1/e = \lim_{n\to\infty}(1-n^{-1})^n$. Због тога су Неперови логаритми у суштини систем логаритама за основу $1/e$, иако их он никад није посматрао на тај начин.

Бригсов допринос

Неперов *Опис* је био дочекан са великим одушевљењем, а посебно је у томе предњачио Хенри Бригс[4], који је у то време био професор геометрије на новооснованом лондонском колеџу Грешам. Касније, око 1620. постаће први професор астрономије на Оксфорду. Бригс је прочитао Неперову књижицу на латинском, и у писму свом пријатељу Џејмсу Ашеру, датираном на 10. март 1615. написао је да је

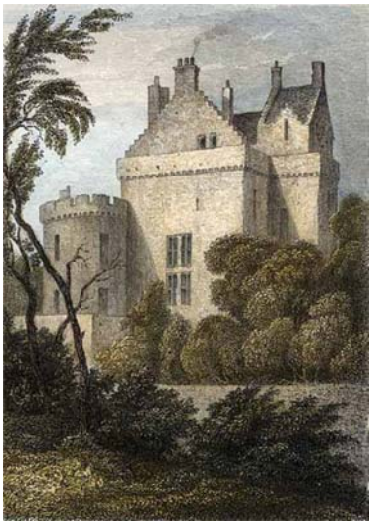
> ... у потпуности заузет племенитим изумом логаритама који су откривени у скорије време.

наставивши:-

> Напер, лорд од Маркинстона је упослио моју главу и моје руке својим новим и дивним логаритмима. Надам се да ћу га видети овог лета, уколико Бог то дозволи, јер никада нисам видео књигу која ме је више обрадовала или навела да се више чудим.

Чим се упознао са логаритмима, Бригс је почео да размишља о начину како се би се они могу побољшати и врло брзо је почео да држи предавања о логаритмима својим студентима.

> Лично сам изнео примедбу, током предавања која сам држао у Лондону студентима на колеџу Грешам, да би било много згодније да се 0 употреби као логаритам целог синуса ... У вези са тим одмах сам писао аутору.



Бригс се у лето 1615. упутио на напоран пут од Лондона до Единбурга. Логаритми су му се чинили толико новим и оригналним достигнућем да је пожурио у једномесечну посету Неперу у замку Мерчистон. Пут који би се данас могао прећи возом за 4 сата је за Бригса трајао најмање 4 дана вожње кочијом. То није био пут на који би се људи његовог времена лако одлучили, али је Бригс жарко желео да се сретне са Непером. Прича се да је тачно у тренутку када се Непер пожалио заједничком пријатељу како „господин Бригс неће ни доћи“, Бригс закуцао на капију. Два човека су зурила један у другог опхрвана емоцијама и без иједне речи пуних 15 минута! Тај сусрет је записао Вилијам Лили према казивању Џона Мара:

> Г. Бригс је навео тачан дан када ће се срести у Единбургу; али како се није појавио у назначено време, Мерчистон се уплашио да неће ни доћи. Десило се једног дана, баш у време када су Џон Мар и лорд Непер разговарали о г. Бригсу да је Мерчистон уздахнуо „Ох,

[4] Рођен фебруара 1561. у Ворливуду, у Јоркширу, близу места Халифакс у Енглеској. Умро 26. Јануара 1630. у Оксфорду.

Џоне, г. Бригс неће ни доћи, када се до сада није појавио“; у истом том тренутку неко је покуцао на капију, Џон Мар је потрчао да одговори и испоставило се да је, на његово велико задовољство, то управо био главом и брадом г. Бригс. Одвео је г. Бригса у одаје лорда Непера, где су провели скоро четврт сата, посматрајући са дивљењем један другог, пре него што је изговорена прва реч. На крају је г. Бригс проговорио, -„Господине, упутио сам се на ово дуго путовање са намером да вас лично упознам, и да сазнам захваљујући ком покретачу довитљивости или генијалности сте први дошли на идеју о овој врлој помоћи астрономији, тј. логаритмима; али, господине, након што сте их ви открили, питам се како их нико није открио пре вас, јер је то тако лако, сада када су нам познати.

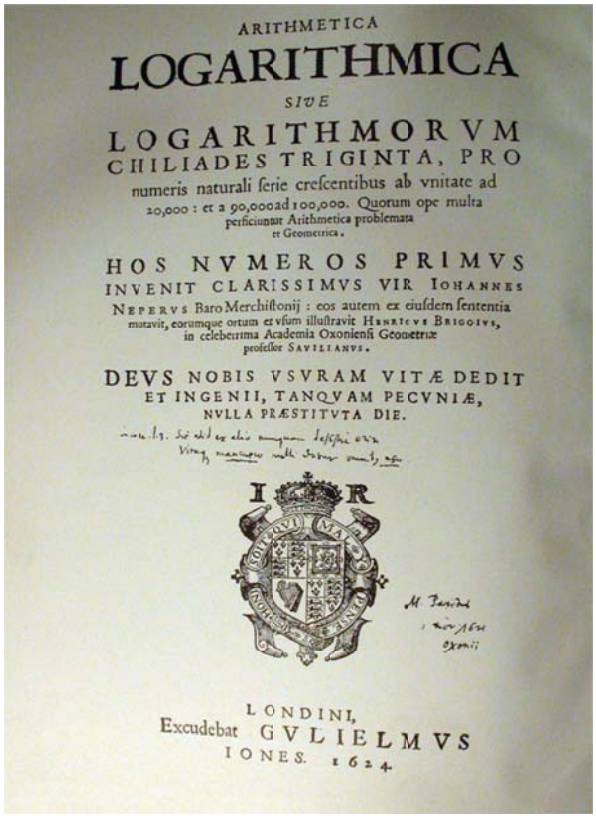
Бригс је напоменуо Неперу, у писму које му је послао пре њиховог сусрета, да би логаритми (у нашој терминологији) требало да имају основу 10, и почео је да саставља одговарајуће таблице. Непер је одговорио да је и сам дошао на ту идеју, али:

... није био у стању, због свог лошег здравља и неких других отежавајућих околности, да преузме обавезу састављања нових таблица.

При сусрету са Бригсом, Непер је предложио да би нове таблице требало да буду састављене уз претпоставке да је основа број 10 и да је логаритам јединице једнак нули, а логаритам броја 10 једнак јединици. Тиме би се добило да су логаритми свих бројева већих од јединице позитивни. Бригс је касније писао да је Непер предложио:

... да би 0 требало да буде логаритам јединице, а 10,000,000,000 логаритам целог синуса, за шта могу само да признам да је најзгодније.

И Бригс је заиста саставио такве таблице. Провео је месец дана са Непером при својој првој посети замку Мерчистон у лето 1615. Већ следеће године по други пут превалио далек пут од Лондона до Единбурга како би још једном посетио Непера, и допутовао би и трећи пут 1617, али је Непер преминуо почетком априла, пре планиране летње посете. Бригсова прва књига о логаритмима, под називом *Logarithmorum Chilias Prima* објављена је у Лондону 1617. У њој Бригс у предговору наводи да је Неперова скорашња смрт разлог за њено објављивање, тачније:


ARITHMETICA
LOGARITHMICA
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO
numeris naturali serie crescentibus ab vnitate ad
20,000 : et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa
perficiuntur Arithmetica problemata
et Geometrica.
HOS NVMEROS PRIMVS
INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES
NEPERVS Baro Merchistonij : eos autem ex eiusdem sententia
motavit, eorumque ortum et vsum illustravit HENRICVS BRIGGIVS,
in celeberrima Academia Oxoniensi Geometriæ
professor SAVILIANVS.
DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT
ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ,
NVLLA PRÆSTITVTA DIE.
LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS
IONES. 1624.

... за добро његових пријатеља и студената колеџа Грешам.

Бригсова *Логаритамска аритметика* (*Arithmetica Logarithmica*), штампана 1624. садржи логаритме првих 20.000 бројева, као и бројева између 90.000 и 100.000, и то на 14 децимала. У њој се налазе и таблице вредности синуса на 15 децимала, као и вредности за тангенс и секанс на 10 децимала. У овој књизи Бригс је напоменуо да би вредности за недостајуће бројеве могла да израчуна група људи и чак је понудио да обезбеди ишпартан папир посебно намењен у ту сврху.

Преостале недостајуће логаритме бројева између 20.000 и 90.000 израчунао је холандски геометар Језекил де Декер, а објавио 1628. холандски књижар и издавач Адријан Влак (1600-1666), заједно са Бригсовим резултатима, у делу које је скромно описао као друго издање књиге *Логаритамска аритметика.* Влакове таблице штампао је Џорџ Милер 1631. у Лондону, а њихово следеће комплетно издање се појавило 1713. у Пекингу.

На крају би требало споменути да је швајцарац Јобст Бурги[5] (1552-1632), дошао на идеју о логаритмима крајем осамдесетих година 16. века. Бургијеви рукописи чувају се у Пулковској опсерваторији Руске академије наука у близини Санкт Петерсбурга и сви су писани пре 1610, па је јасно да је своју теорију развио независно од Непера. Поред тога, Бурги је проблем решавао алгебарски, за разлику од Непера који му је пришао геометријски.

Међутим, Бургијеве таблице су, под насловом *Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen* објављене у Прагу тек 1620, пуних шест година након Неперовог *Описа*, и то под врло незгодним историјским околностима, при почетку Тридесетогодишњег рата[6], у време битке на Белој гори[7]. Тек неколико примерака Бургијеве књиге је сачувано, те је остала скоро непримећена. Саме таблице представљају списак антилогаритама са основом 1,0001. Логаритми су штампани црвеном бојом у првом реду и крајњој левој колони, а антилогаритми су штампани црном бојом, па Бурги логаритме назива црвеним бројевима (*Die rote Zahl*).

Терминологија

Реч *логаритам* је кованица настала употребом грчких речи *logos*, у значењу „пребројавање“, „однос“ и *arithmos*, у значењу „број“. Индо-европски корен грчке речи *logos* је *leg*, у значењу „сакупити“, док је за реч *arithmos* то *ar*, у значењу „спојити“, па реч логаритам два пута садржи у себи појам груписања.

Према Оксфордском енглеском речнику, „Непер не објашњава своје схватање значења речи логаритам. Обично се сматра да она треба да се преведе као „број који означава однос“, а то тумачење није неподесно, али није ни очигледно без додатног објашњења. Међутим, могуће је да је Непер употребио реч *logos* само у значењу „пребројавања“.“ У књизи *Constructio*, која је написана пре *Описа*, уместо термина логаритам, Непер је употребљавао фразу вештачки број. Реч логаритам је усвојио пре него што је објавио своје откриће.

Хенри Бригс је 1624. године увео реч *мантиса*. То је латински термин етруршчанског порекла, у оригиналном значењу „додавање“, „допуна“, „нешто што има мању вредност“ и писао се *mantisa*. У

[5] Jost Bürgi (понекад и Joost, Jobst; латинизирано презиме Burgius или Byrgius).

[6] Рат који је трајао од 1618. до 1648. године, и водио се највећим делом на територији данашње Немачке и Чешке. У њега су биле увучене највеће европске континенталне силе. Иако је од самог почетка имао карактер верског сукоба протестаната и католика, ривалство Хабзбурга и других сила имало је у њему централну улогу.

[7] Битка на Белој гори одиграла се 8. новембра 1620. То је прва велика, и одлучујућа битка Тридестогодишњег рата. Комбиноване царске и католичке снаге нанеле су тежак пораз војсци чешких протестаната и плаћеника.

16. веку писало се *mantissa* са значењем „додатак“, а Бригс га је вероватно и користио у том смислу. Валис у својој *Алгебри* (1685), користи исти термин у вези са децималним бројевима, али он није био општеприхваћен све док га није усвојио Ојлер у свом делу *Introductio in analysin infinitorum* (*Увод у анализу бесконачних величина*, 1748). Гаус је предложио да се користи као назив за разломљени део свих бројева. У 18. веку термин мантиса је постао општеприхваћен и појављује се у радовима многих аутора.

Термин *карактеристика* је 1624. године предложио Бригс, а може се наћи и у Влаковим таблицама из 1628. године. У првобитним таблицама штампане су и карактеристике, а тек у 18. веку прихваћен је обичај навођења само мантиса.

Литература

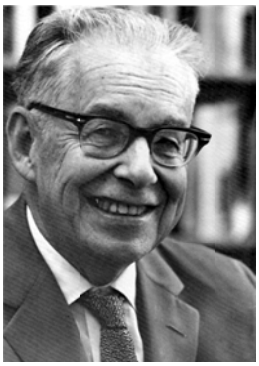
1. Дирк J. Стројк, *Кратак преглед историје математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1991.
2. Steven Schwartzman, *The Words of Mathematics, An Etymological Dictionary of Mathematical Terms Used in English*, MAA, Washington, 1994.
3. David M. Burton, *The History of Mathematics, AN INTRODUCTION*, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York, 2011.
4. Julian Havil, *John Napier, LIFE, LOGARITHMS, AND LEGACY*, Princeton University Press, New Jersey, 2014.
5. J. J. O'Connor и E. F. Robertson, *Henry Briggs* (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Briggs.html))

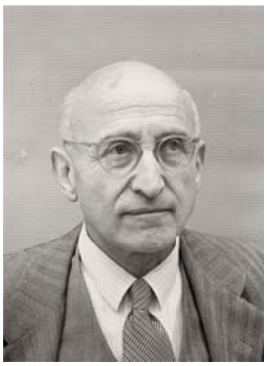
Примене логаритама

Основни разлог за употребу логаритама при изражавању јачине земљотреса и јачине звука лежи у намери да се бројеви који се појављују ограниче на употребљив опсег. На пример, уколико нека величина v може да има произвољну вредност из интервала од 10^{-100} (што се је безначајно мало) до 10^{100} (што је астрономски велико), онда је вредност $\log v$ у згоднијем интервалу $(-100,100)$.

Јачина земљотреса

Постоји више приступа којима се сеизмолошка очитавања конвертују у јединствену скалу која осликава јачину земљотреса. Најчешће је у употреби тзв. Рихтерова скала коју је дефинисао амерички сеизмолог и физичар Чарлс Франсис Рихтер (1900-1985) у чему му је помогао амерички сеизмолог немачког порекла Бено Гутенберг (1889-1960).





Рихтерова скала	Опис земљотреса	Последице деловања земљотреса	Учесталост појаве
испод 2.0	микро	Микропотреси, не осећају се.	око 8.000 дневно
2.0-2.9	мањи	У општем случају се не осете, али их сеизмографи бележе.	око 1.000 дневно
3.0-3.9		Често се осете, али ретко узрокују штету.	49.000 годишње (процена)
4.0-4.9	лагани	Приметно трескање покућства, присутни звуци трескања. Значајна оштећења су ретка.	6.200 годишње (процена)
5.0-5.9	умерени	Узрокују штету на слабијим грађевинама у руралним регијама, могућа мања штета код савремених зграда.	800 годишње
6.0-6.9	јаки	Могу изазвати штете у насељаним подручјима 160 km од епицентра.	120 годишње
7.0-7.9	велики	Узрокују озбиљну штету на великом подручју.	18 годишње
8.0-8.9	разарајући	Могу проузроковати велику штету и на 1.000 километара од епицентра.	1 годишње
9.0-9.9		Катастрофални земљотреси који уништавају већину објеката у кругу од неколико хиљада километара.	1 у 20 година
10.0+	епски	Никада нису забележени.	екстремно ретки (непознати)

Стандардни сеизмограф може да региструје земљотрес јачине веће од 2 степена Рихтерове скале, а, са друге стране, никада није забележен земљотрес који је био јачине веће од 9 степени по Рихтеровој скали. Само 6 земљотреса је имало јачину од 8,5 или више степени Рихтерове скале.

Како би се описало мерење употребом Рихтерове скале, најпре се уводи референтни земљотрес, односно земљотрес нултог нивоа на скали, а то је, по дефиницији, било који земљотрес чији би најјачи сеизмички талас на стандардном сеизмографу, који се налази на растојању од 100 километара од епицентра земљотреса, могао да се очита као 0,001 милиметар (1 микрон).

Јачина земљотреса M дата је формулом $M = \log\frac{a}{a_0} = \log a - \log a_0$, где је са a означена амплитуда највећег сеизмичког таласа посматраног земљотреса очитана на стандардном сеизмографу, док је a_0 амплитуда највећег сеизмичког таласа земљотреса нултог нивоа са истим епицентром, очитаног на истом сеизмографу.

Вредности за a_0 за различита растојања од епицентра су унапред израчунате, па је потребно само измерити a како би се одредила јачина посматраног земљотреса. Што је земљотрес јачи, то је већи количник амплитуда сеизмичких таласа a/a_0. Тај количник назива се јачином земљотреса.

- Земљотрес који је погодио Аљаску на Велики петак, 28. 3. 1964. био је јачине 8,5 степени по Рихтеровој скали. Скоро две деценије касније, 2. 5. 1983. јак земљотрес од 6,5 степени Рихтерове скале погодио је место Коалинга у Калифорнији. Колико пута је земљотрес на Аљасци био јачи од оног у Калифорнији?

$$\log\frac{a_A}{a_K} = \log\frac{a_A/a_0}{a_K/a_0} = \log a_A/a_0 - \log a_K/a_0 = 2 \rightarrow \frac{a_A}{a_K} = 10^2 = 100 \rightarrow a_A = 100a_K$$

- Понекад се наводи да је јачина земљотреса који је погодио Аљаску 1964. године била 8,4 степена Рихтерове скале. Одредити количник максималне амплитуде земљотреса јачине 8,4 степена у односу на земљотрес јачине 8,5 степени.

$$\log\frac{a_1}{a_2} = 8{,}4 - 8{,}5 = -0{,}1 \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = 10^{-0{,}1} \approx 0{,}79.$$

- Од 7 великих земљотреса који су погодили Иран током седамдесетих година двадесетог века, два (из априла 1972. и марта 1977.) су била јачине од приближно 6,9 степени Рихтерове скале. Одредити количник амплитуда највећих таласа тих земљотреса, ако се они упореде са земљотресом који је 1906. Погодио Сан Франциско, а био је јачине 8,3 степена Рихтерове скале.

$$\log\frac{a_I}{a_{SF}} = 6{,}9 - 8{,}3 = -1{,}4 \rightarrow \frac{a_I}{a_{SF}} = 10^{-1{,}4} \approx 0{,}04.$$

- Најјачи земљотреси свих времена су забележени на обали Еквадора и Колумбије 1906. и у Јапану 1933. Сва три су била јачине 8,9 степени Рихтерове скале. Одредити количник амплитуде највећег таласа земљотреса наведене јачине у односу на одговарајући талас земљотреса нултог нивоа.

$$\log\frac{a}{a_0} = 8{,}9 \rightarrow \frac{a}{a_0} = 10^{8{,}9} \approx 794.328.234{,}72.$$

- Земљотрес који је погодио Аљаску на Велики петак 1964. био је јачине 8,5 степени по Рихтеровој скали. Одредити количник амплитуда a/a_0.

$$\log\frac{a}{a_0} = 8{,}5 \rightarrow \frac{a}{a_0} = 10^{8{,}5} \approx 316.227.766{,}02.$$

- Уколико је земљотрес јачине 2 степена Рихтерове скале, одредити амплитуду његовог најјачег таласа на растојању од 100 km од епицентра.

$$\log\frac{a}{a_0} = 2 \rightarrow \frac{a}{a_0} = 100 \rightarrow a = 100 \cdot 0{,}001 = 0{,}1mm.$$

- Ако се амплитуда максималног сеизмичког таласа удвостручи, за колико ће се повећати јачина земљотреса?

$$a_1 = 2a \rightarrow M_1 = \log\frac{2a}{a_0} = \log 2 + \log\frac{a}{a_0} = 0{,}30103 + M.$$

- Претпоставимо да се сеизмограф налази на растојању од тачно 100 km од епицентра земљотреса. Одредити јачину земљотреса, уколико је највећа амплитуда сеизмичког таласа регистрованог апаратом 1 микрон, 1 милиметар, 1 центиметар.

1) $a = a_0 = 0{,}001mm \rightarrow M = 0;$
2) $a = 1mm, a_0 = 0{,}001mm \rightarrow M = \log\frac{1}{0{,}001} = 3;$
3) $a = 10mm, a_0 = 0{,}001mm \rightarrow M = \log\frac{10}{0{,}001} = 4.$

Нека је $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Посматрајмо функцију $y = a^x$.
Права $y = b$:

- сече график функције $y = a^x$ у тачно једној тачки ако је $a > 0$;
- нема заједничких тачака са графиком ако је $b \leq 0$.

Другим речима, за $(\forall b > 0)(\exists_1 x \in \mathbb{R}) \quad a^x = b$.

Дефиниција: Нека је $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Логаритам броја b за основу a је реалан број којим је потребно степеновати број a да би се добио позитиван број b. Означава се

$$\log_a b.$$

Како је експоненцијална функција бијективна, из

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Стога је логаритам позитивног броја b одређен и можемо увести одређену ознаку:

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x.$$

Број a се назива основа, а број b нумерус или логаритманд. За $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, важи

$$a^{\log_a b} = b.$$

Основна својства логаритама:
Ако важи $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, важи и:

1° $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

2° $\log_a x^n = n \log_a x$, $n \in \mathbb{R}$.

Та својства се изводе на следећи начин.

1° Ако је $\alpha = \log_a x$, $\beta = \log_a y$, имамо

$$a^{\log_a xy} = xy = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\log_a x + \log_b y}.$$

2° $a^{\log_a x^n} = x^n = (a^{\log_a x})^n = a^{n \log_a x}$.

Последице:

$$\log_a \frac{y}{x} = \log_a x - \log_a y;$$
$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

Примери:

1. $\log 3x = \log 3 + \log x$;
2. $\log(3 + x) = ?$;
3. $\log \dfrac{a^5 b^2 \sqrt[4]{c^3}}{x+1} = 5 \log a + 2 \log b + \dfrac{3}{4} \log c - \log(x+1)$;
4. Одредити $\log_6 3$ ако је $\log_6 4 = x$.

Решење: $\log_6 3 = \log_6 \frac{6}{2} = \log_6 6 - \log_6 2 = 1 - \log_6 4^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\log_6 4 = 1 - \frac{1}{2}x.$ $\square$

5. Одредити вредност израза $\log\frac{1}{4} + \log\frac{6}{5} - \log 30.$

Решење:

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{4} + \log\frac{6}{5} - \log 30 &= \log\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5} - \log 30 = \log\frac{3}{10} - \log 30\\ &= \log 3 - \log 10 - \log 3 - \log 10 = -2.\end{aligned}$$

$\square$

6. Одредити вредност израза $\log\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}.$

Решење:

$$\begin{aligned}\log\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} &= \log\sqrt{x\sqrt{\sqrt{x^2\cdot x}}} = \log\sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}\\ &= \log\sqrt{\sqrt[4]{x^4\cdot x^3}} = \log\sqrt[8]{x^7} = \frac{7}{8}\log x.\end{aligned}$$

$\square$

7. $\frac{5}{4}\log_3 81 + 3\log_{\frac{1}{2}} 16 - 2\log_2\frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27};$

8. $5^{3-\log_5 25} + 3^{2-\log_3 3} - 4^{4-\log_2 5} = 5^{3-2} + 3^{2-1} - \frac{4^4}{(2^{\log_2 5})^2} = -\frac{56}{25}.$

9. Израчунати:

   а) $\log\frac{4a^2\sqrt{7}}{5b^2\sqrt[3]{2}}$; б) $\log\sqrt[4]{\frac{3a^2}{5b^3c^7}}.$

10. Израчунати $\log x$ ако је $x = \frac{3a^2b}{c^2\sqrt[4]{dc^3}}.$

11. Израчунати $\log P$, ако је $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; .

12. $\log(a^2+b^2) + 2\log c$

13. $2\log a - 3\log(a^2+b^2)$

14. $\log_8\log_4\log_2 16$

15. $\log_2 8 - 2\log_6 3 - \log_6 4$

Примене основних својстава логаритама – вежбање

Својства логаритама:

- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a a = 1$;
- $\log_b a = \log_{b^n} a^n, \quad n \in \mathbb{N}$;
  Упутство: $\log_{b^n} a^n = \alpha \Rightarrow (b^n)^\alpha = a^n \Rightarrow b^\alpha = a$, $\alpha = \log_b a$.
- $\log_b a \cdot \log_a b = 1$;
  Упутство: $a^{\log_a b} = b$, $\log_b a^{\log_a b} = \log_b b$, $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a, b > 0,\ a, b \neq 1,\ x > 0,\ c \neq 1.$
  Упутство:
  $$\begin{aligned} a^{\log_a c} &= b^{\log_b c} \\ \log_a a^{\log_a c} &= \log_a b^{\log_b c} \\ \log_a c &= \log_b c \cdot \log_a b \\ \frac{\log_a c}{\log_b c} = \log_a b &\Rightarrow \frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b \end{aligned}$$
  $(a, b > 0,\ a, b \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1)$
- $\log_{a^s} b = \dfrac{1}{s} \log_a b, \quad s \neq 0,\ s \in \mathbb{R}.$
  Упутство: $\log_{a^s} x = \dfrac{1}{\log_x a^s} = \dfrac{1}{s \log_x a} = \dfrac{1}{s} \log_a x.$

Логаритамска функција и њен график

Нека је $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Функција $y = a^x$ је бијекција која пресликава $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^+$. Тада важи да је $\log_a y = \log_a a^x$, тј. $x = \log_a y$. Како је $f(x) = a^x$ бијекција и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, то постоји инверзна функција функције $f(x) = a^x$ и то је функција

$$f^{-1}(x) = \log_a x, \qquad f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$$

Нека је $a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$.

1° Посматрајмо функцију $y = a^x$, када $a \in (0, 1)$:

- Домен функције је $D_x = (-\infty, +\infty)$, а кодомен $D_y = (0, +\infty)$;
- Функција пресеца y-осу у тачки $(0, 1)$;
- Функција опада;
- Када $x \to +\infty$, права $y = 0$ је хоризонтална асимптота.

Њој инверзна функција на том интервалу је $f^{-1}(x) = \log_a x$. Њене особине су:

– Домен функције је $D_x = (0, +\infty)$, а кодомен $D_y = (-\infty, +\infty)$;
– Нула функције је тачка $(1, 0)$;
– Функција опада;
– Права $x = 0$ је вертикална асимптота са десне стране, тј. када $x \to 0 + 0$, $y \to +\infty$.

2° Посматрајмо функцију $y = a^x$, када $a \in (1, +\infty)$:

– Домен функције је $D_x = (-\infty, +\infty)$, а кодомен $D_y = (0, +\infty)$;
– Функција пресеца y-осу у тачки $(0, 1)$;
– Функција расте;
– Када $x \to -\infty$, права $y = 0$ је хоризонтална асимптота.

Њој инверзна функција на том интервалу је $f^{-1}(x) = \log_a x$. Њене особине су:

– Домен функције је $D_x = (0, +\infty)$, а кодомен $D_y = (-\infty, +\infty)$;
– Нула функције је тачка $(1, 0)$;
– Функција расте;
– Права $x = 0$ је вертикална асимптота са десне стране, тј. када $x \to 0 + 0$, $y \to -\infty$.

Примери:

1. У истом координатном систему конструисати графике функција $y = \log_2 x$, $y = \log_2(x - 3)$ и $y = \log_2(x + 2)$.

2. У истом координатном систему конструисати графике функција $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 3$.

3. У истом координатном систему конструисати графике функција $y = \log_2 x$, $y = \log_2 |x|$ и $y = |\log_2 |x||$.

4. У истом координатном систему конструисати графике функција:

   а) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$ и $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}(x - 1)\right|$;

   б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$, $y = \log_{\frac{1}{2}} |x - 1|$ и $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} |x - 1|\right|$.

5. Конструисати график функције $y = a^{\log_a x}$.

6. Конструисати график функције $y = ||\log_2 x - 3| - 2| - 1$.

7. Конструисати график функције $y = \dfrac{\log_2 x^2}{|\log_2 |x||}$.

Логаритамске једначине

Логаритамске једначине су једначине у којима се непозната јавља и под знаком логаритма. На пример, $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$, $x^{\log x}=0{,}1$, $\log_x 2=\dfrac{1}{2}$, итд.

Да бисмо могли правилно да их решавамо, потребно је да се подсетимо карактеристика логаритамске функције.

Израз $\log_{\varphi(x)} f(x)$ је дефинисан ако и само ако је $f(x)>0$, $\varphi(x)>0$ и $\varphi(x)\neq 1$.

Како решавати логаритамску једначину? – Потребно је:

1° утврдити област дефинисаности нумеруса и основе;

2° трансформисати једначину применом особина логаритамске функције на што једноставнији облик.

Најједноставнија логаритамска једначина је облика $\log_b f(x)=c$. Она се решава коришћењем дефиниције логаритма. Ако је $b>0$, $b\neq 1$ и $f(x)>0$, следи

$$\log_b f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=b^c.$$

На пример, $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)=-2$. Како је $\frac{1}{2}>0$ и $\dfrac{1}{2}\neq 0$, морамо утврдити да је $2x+1>0$. Очигледно,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2x+1 \Rightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Посматрајмо сада једначину облика $\log_b f(x)+\log_b \varphi(x)=c$. Ако је $b>0$, $b\neq 1$, $f(x)>0$ и $\varphi(x)>0$, имамо да је

$$\log_b f(x)+\log_b \varphi(x)=c \Leftrightarrow f(x)\cdot\varphi(x)=b^c.$$

На пример, $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2$. Мора бити $x-1>0$ и $x+2>0$, те је $x>1$. Имамо

$$\log_2(x-1)(x+2)=2 \Rightarrow x^2+x-2=4 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Код једначина облика $\log_b f(x)=\log_b \varphi(x)$ применићемо особину да је логаритамска функција ,,1-1", па је та једначина, ако су логаритми дефинисани, еквивалентна једначини $f(x)=\varphi(x)$.

$$b>0 \wedge b\neq 1 \Rightarrow \log_b f(x)=\log_b \varphi(x) \Leftrightarrow f(x)=\varphi(x) \wedge f(x)>0 \wedge \varphi(x)>0.$$

На пример,

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{2+x}{10}=\log_5 \frac{2}{x+1} &\Leftrightarrow \frac{2+x}{10}=\frac{2}{x+1} \wedge x>-2 \wedge x>-1\\ &\Leftrightarrow x^2+2x-18=0 \wedge x>-1\\ &\Leftrightarrow x=3 \wedge x>-1 \Leftrightarrow x=3.\end{aligned}$$

Сложеније логаритамске једначине се применом особина логаритама своде на основне типове. Неке од метода су:

1° довођење на заједничку основу;

2° метода замене;

3° логаритмовање једначине.

Примери:

1. Решити једначину $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$.

   Решење:

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7 &\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 x = 7\\ &\Leftrightarrow \frac{7}{4}\log_2 x = 7 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16.\end{aligned}$$

   □

2. Решити једначину $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2) = 2$.

   Решење: Нека је $\log_2(2^x+1) = t$. Имамо да је

$$\log_2(2^{x+1}+2) = \log_2((2^x+1)\cdot 2) = 1 + \log_2(2^x+1) = 1 + t.$$

   Дакле, једначина се своди на $t(t+1) = 2$, те су решења $t = -2$ и $t = 1$. Враћањем смене, утврђујемо да $2^x + 1 = \dfrac{1}{4}$ није решење, те је $2^x + 1 = 2$, тј. $x = 0$. □

3. Решити једначину $(\sqrt{x})^{\log_3 x - 1} = 3$.

   Решење: Мора бити $x > 0$ и $x \neq 1$. Имамо

$$\log_3(\sqrt{x})^{\log_3 x - 1} = \log_3 3.$$

   Дакле,

$$\frac{1}{2}(\log_3 x - 1)\cdot\log_3 x = \log_3 3,$$

   па увођењем смене $\log_3 x = t$, имамо

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

   Решења су $t = 2$ и $t = -1$. Враћањем смене, налазимо да су решења $x = 9$ и $x = \frac{1}{3}$. □

Логаритамске неједначине:

При решавању логаритамских неједначина користи се особина логаритамске функције да је она строго опадајућа за $0 < a < 1$, а строго растућа за $a > 1$. Другим речима:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \wedge 0 < a < 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x) \wedge f(x), g(x) > 0,$$

тј.

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \wedge a > 1 \Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge f(x), g(x) > 0.$$

Примери:

1. $\log_2 x > 0 \Leftrightarrow x > 1$;

2. $\log_2 x < -1 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$;

3. $\log_{\frac{1}{64}} x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in (0, 8)$;

4. Решити неједначину $\log_x 32 > 5$.

   Решење: За $x \in (0, 1)$, имамо $\log_x 32 > \log_x x^5 \Rightarrow 32 < x^5 \Rightarrow x < 2$, но то решење није у сагласности са условом $x \in (0, 1)$. За $x \in (1, +\infty)$, имамо $\log_x 32 > \log_x x^5 \Rightarrow 32 > x^5 \Rightarrow x < 2$, те је решење $x \in (1, 2)$. □

5. Решити неједначину $\log_x 125 < 3$.

   Решење: $x \in (0, 1)$, имамо $\log_x 125 < \log_x x^3 \Rightarrow 125 > x^3 \Rightarrow x < 5$, те је решење $x \in (0, 1)$. За $x \in (1, +\infty)$, имамо $\log_x 125 < \log_x x^3 \Rightarrow 125 < x^3 \Rightarrow x > 5$, те је решење и $x > 5$. Коначно решење неједначине је, дакле, $x \in (0, 1) \cup (5, +\infty)$ □

6. Решити неједначину $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_3 \dfrac{x+1}{x-1} \right) \geq 0$.

   Решење: Област дефинисаности је $D_x = (1, +\infty)$. Решење неједначине је интервал $x \in [2, +\infty)$. □

7. Решити неједначину $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_4 x > 1$.

   Решење: Област дефинисаности је $D_x = (0, +\infty)$. Решење неједначине је интервал $x \in \left(4^{\log_{0,8} 0,2}, +\infty\right)$. □

8. Решити неједначину $\log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - 4x + 3\right) \geq -3$.

9. Решити неједначину $\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_4(x^2 - 5)\right) > 0$.

10. Решити неједначину $\log_3(1 - x) < \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$.

11. Решити неједначину $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

Задаци за презентацију

1. Одредити $\log_{24} 2$ ако је $\log_{168} 3 = a$ и $\log_{168} 7 = b$.

Решење: Уочимо најпре да је $168 = 24 \cdot 7$. Трансформишимо логаритме са основом 168 на логаритме са основом 24. Имамо

$$\frac{\log_{24} 3}{\log_{24} 168} = a, \qquad \frac{\log_{24} 7}{\log_{24} 168} = b. \tag{1}$$

С обзиром да је $\log_{24} 168 = \log_{24}(24 \cdot 7) = 1 + \log_{24} 7$, једнакости постају

$$\frac{\log_{24} 3}{1 + \log_{24} 7} = a, \qquad \frac{\log_{24} 7}{1 + \log_{24} 7} = b.$$

Ове једнакости решавамо по $\log_{24} 7$ и $\log_{24} 3$, па налазимо

$$\log_{24} 7 = \frac{b}{-b+1}, \qquad \log_{24} 3 = \frac{a}{1-b}.$$

Напишимо другу једнакост у облику

$$\log_{24} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 24} = \frac{\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \frac{a}{1-b},$$

одакле је

$$\log_2 3 = \frac{3a}{1-b-a}. \tag{2}$$

Коначно, $\log_{24} 2$ пребацимо на основу 2, тј.

$$\log_{24} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 24} = \frac{1}{3 + \log_2 3},$$

тако да применом (2) налазимо

$$\log_{24} 2 = \frac{1}{3 + \frac{3a}{1-b-a}} = \frac{1-b-a}{3(1-b)}.$$

□

2. Упоредити бројеве $\log_{135} 675$ и $\log_{45} 75$.

Решење: Трансформишимо оба броја, како бисмо их упоредили.

$$\begin{aligned}
\log_{135} 675 &\ \rho\ \log_{45} 75 \\
\log_{135}(5 \cdot 135) &\ \rho\ \log_{45}(25 \cdot 3) \\
\log_{135} 5 + 1 &\ \rho\ \log_{45}(5^2 \cdot 3) \\
\frac{1}{\log_5(5 \cdot 27)} + 1 &\ \rho\ 2\log_{45} 5 + \log_{45} 3 \\
\frac{1}{1 + 3\log_5 3} + 1 &\ \rho\ \frac{2}{\log_5 5 + 2\log_5 3} + \frac{1}{\log_3 3^2 + \log_3 5} \\
\frac{1}{1 + 3\log_5 3} + 1 &\ \rho\ \frac{2}{1 + 2\log_5 3} + \frac{1}{2 + \frac{1}{\log_5 3}} \\
\frac{2 + 3\log_5 3}{1 + 3\log_5 3} &\ \rho\ \frac{2 + \log_5 3}{1 + 2\log_5 3} \\
\frac{2 + 3a}{1 + 3a} &\ \rho\ \frac{2 + a}{1 + 2a} \\
2 + 4a + 3a + 6a^2 &\ \rho\ 2 + a + 6a + 3a^2 \\
2 + 7a + 6a^2 &\ \rho\ 2 + 7a + 3a^2 \\
3a^2 &\ >\ 0
\end{aligned}$$

Јасно, број $\log_{135} 675$ је већи од броја $\log_{45} 75$. □

3. Доказати неједнакост

$$\log_{10}^2 9 + \log_{10}^2 11 > \log_{10} 98.$$

Решење: Применом неједнакости $(1+x)^2 > 1+2x$, $x \in \mathbb{R}$, имамо

$$\begin{aligned}\log_{10}^2 9 + \log_{10}^2 11 &= (1+\log_{10} 0{,}9)^2 + (1+\log_{10} 1{,}1)^2\\ &> 1 + 2\log_{10} 0{,}9 + 1 + 2\log_{10} 1{,}1\\ &= 1 + \log_{10} 0{,}81 + 1 + \log_{10} 1{,}21\\ &= \log_{10} 8{,}1 + \log_{10} 12{,}1\\ &= \log_{10}(8{,}1 \cdot 12{,}1)\\ &= \log_{10} 98{,}1 > \log_{10} 98.\end{aligned}$$

□

4. Доказати да за $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 3$ важи неједнакост

$$\log_n(n+1) < \log_{n-1} n.$$

Решење: Имамо да је

$$\log_n(n+1) = \log_n n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \log_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Како је

$$1 + \log_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \log_{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \log_{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right),$$

а притом је

$$1 + \log_{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 1 + \log_{n-1} \frac{n}{n-1} = 1 + \log_{n-1} n - 1 = \log_{n-1} n,$$

закључујемо да је

$$\log_n(n+1) < \log_{n-1} n.$$

□

5. Доказати да је $\log_{17} 71 > \sqrt[7]{17}$.

Решење: Потребно је показати да је $\sqrt[7]{17} < \frac{3}{2} < \log_{17} 71$. □

6. Доказати да је $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 4{,}4$.

Решење: Користећи однос између аритметичке и геометријске средине четири ненегативна броја, имамо да је

$$\begin{aligned}\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 &= 4 \cdot \sqrt[4]{\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8} = 4 \cdot \sqrt[4]{\log_4 8}\\ &= 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{2}} > 4 \cdot 1{,}1 = 4{,}4.\end{aligned}$$

□

7. Решити једначину

$$\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x + 2x - 6 = 0.$$

Решење: Дата једначина је еквивалентна следећим једначинама

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 6 + x(\log_2 x + 2) = 0,$$
$$(\log_2 x - 3)(\log_2 x + 2) + x(\log_2 x + 2) = 0,$$
$$(\log_2 x + 2)(\log_2 x - 3 + x) = 0.$$

Видимо да је

$$\log_2 x + 2 = 0 \qquad \text{или} \qquad \log_2 x - 3 + x = 0.$$

Решење прве једначине је очигледно $x = \frac{1}{4}$. Једно решење друге једначине је $x = 2$. Докажимо да је то и једино решење. Пошто дата једначина има смисла само ако је $x > 0$, посматраћемо два интервала:

$$0 < x < 2 \Rightarrow \log_2 x < 1 \Rightarrow \log_2 x + x < 3 \Rightarrow \log_2 x + x - 3 < 0;$$
$$2 < x \Rightarrow 1 < \log_2 x \Rightarrow 3 < \log_2 x + x \Rightarrow 0 < \log_2 x + x - 3.$$

Дакле, $x \neq 2 \Rightarrow \log_2 x + x - 3 \neq 0$.

Према томе, дата једначина има два решења: $x = \frac{1}{4}$ и $x = 2$. □

8. Ако је $x > 1$, решити једначину

$$2^{\log_3 x} + 3^{\log_x 2} = 4.$$

Решење: Како је

$$\log_x 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 x},$$

једначина се своди на

$$4 = 2^{\log_3 x} + 3^{\frac{\log_3 2}{\log_3 x}} \Rightarrow 4 = 2^{\log_3 x} + \left(3^{\log_3 2}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}},$$

одакле је

$$4 = 2^{\log_3 x} + 2^{\frac{1}{\log_3 x}}.$$

Ако уведемо смену $t = \log_3 x$ ($x > 1 \Rightarrow t > 0$), добијамо

$$4 = 2^t + 2^{\frac{1}{t}}.$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине, имамо

$$4 = 2^t + 2^{\frac{1}{t}} \geq 2\sqrt{2^t \cdot 2^{\frac{1}{t}}} = 2\sqrt{2^{t+\frac{1}{t}}} \geq 2\sqrt{2^2} = 4,$$

при чему смо употребили неједнакости $t + \frac{1}{t} \geq 2$. Према томе, важи знак једнакости у односу аритметичке и геометријске средине, тј.

$$2^t = 2^{\frac{1}{t}} \Rightarrow t = \frac{1}{t}.$$

Пошто је $t > 0$, једино решење ове једначине је $t = 1$. Коначно, из једначине $\log_3 x = t = 1$, налазимо $x = 3$, а то је једино решење задате једначине. □

9. Решити једначину

$$(5^x - 2^{x-2})^2 + 2\log_{10}(5^x + 2^{x-2}) = x.$$

Решење: Применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине

$$5^x + 2^{x-2} \geq 2\sqrt{5^x \cdot 2^{x-2}} = 10^{\frac{x}{2}},$$

одакле је

$$2\log_{10}\left(5^x + 2^{x-2}\right) \geq x, \qquad (*)$$

где знак једнакости важи ако и само ако је $5^x = 2^{x-2}$. Пошто је $\left(5^x - 2^{x-2}\right)^2 \geq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, тада на основу задате једначине и неједначине $(*)$ имамо

$$x = \left(5^x - 2^{x-2}\right)^2 + 2\log_{10}\left(5^x + 2^{x-2}\right) \geq x,$$

па одатле следује

$$\left(5^x - 2^{x-2}\right)^2 = 0 \qquad \text{и} \qquad 2\log_{10}\left(5^x + 2^{x-2}\right) = x,$$

а то је испуњено када је

$$5^x = 2^{x-2} \Rightarrow x\log_2 5 = x - 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{\log_2 5 - 1}.$$

□

10. За које вредности a једначина $\log_{x^2-1}(x+a) = 1$ нема решења?

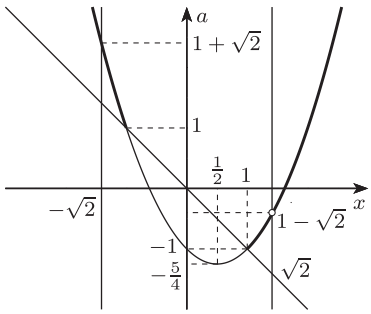
Решење: Да би пар бројева (x, a) задовољавао дату једначину, потребно је и довољно да буду испуњени услови

$$\begin{aligned} &x + a = x^2 - 1,\\ &x + a > 0,\\ &x^2 - 1 \neq 1. \end{aligned}$$

Тачке чије координате задовољавају услове су тачке параболе

$$a = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2},$$

које се налазе изнад праве $x + a = 0$, осим тачке са апсцисама $\pm\sqrt{2}$, тј. осим тачака $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ (сл. 13). Пројекције свих тих тачака на оси Oa попуњавају зрак $a > -1$, осим једне тачке $a = 1 - \sqrt{2}$.



Сл. 13

□

11. Решити неједначину

$$\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0.$$

Решење: Мора бити $2 - x > 0$, $2 - x \neq 1$, $x + 2 > 0$, $x + 3 > 0$, $x + 3 \neq 1$ и $3 - x > 0$, тј.

$$D_x = (-2, 1) \cup (1, 2).$$

Посматрајмо понашање логаритама:

	$x \in (-2, -1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, 2)$
$\log_{2-x}(x+2)$	$- - -$	$+ + +$	$- - -$
$\log_{x+3}(3-x)$	$+ + +$	$+ + +$	$+ + +$

Испитајмо знак првог чиниоца.
Ако је $x \in (-2, 1)$, тада је $2 - x > 1$ и $x + 2 \in (0, 3)$, па важи:

- ако је $x \in (-2, -1)$, онда је $x + 2 \in (0, 1)$, тј.

$$\log_{2-x}(x+2) < 0;$$

- ако је $x \in (-1,1)$, одна је $x+2 \in (1,3)$, тј.

$$\log_{2-x}(x+2) > 0.$$

Ако је $x \in (1,2)$, тада је $2-x \in (0,1)$, и $x+2 \in (3,4)$, тј.

$$\log_{2-x}(x+2) < 0.$$

Аналогно томе, испитајмо знак другог чинилаца.
Налазимо да за $x \in (-2,1)$ важи $x+3 \in (1,4)$ и $3-x \in (2,5)$, па је

$$\log_{3+x}(3-x) > 0,$$

односно да за $x \in (1,2)$ важи $x+3 \in (4,5)$ и $3-x \in (1,2)$, па је

$$\log_{3+x}(3-x) > 0.$$

Дакле, решење је $x \in (-2,-1] \cup (1,2)$. □

12. Решити једначину $\log_2\left(xy + \dfrac{1}{xy}\right) = 1 - (x+y-2)^2$.

Решење: Јасно је да је област дефинисаности $xy > 0$. Како је

$$xy + \frac{1}{xy} \geq 2,$$

имамо да је

$$\log_2\left(xy + \frac{1}{xy}\right) \geq 1.$$

Како је

$$1 - (x+y-2)^2 \leq 1$$

за свако x, y, очигледно је да једнакост може да важи само у случају када су лева и десна страна једнакости једнаке, а то ће бити случај за $xy = 1$ и $x+y = 2$, па је $x = y = 1$. □

13. Нека је M скуп свих вредности реалног параметра p таквих да једначина

$$\log(x^2 + 2px) - \log(8x - 6p - 3) = 0$$

има јединствено решење. Тада је:
(А) $M = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{22}\right] \cup \{1\}$; (Б) $M = \emptyset$; (В) $M = \{1, 13\}$; (Г) $M = \{1\}$;
(Д) $M = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{22}\right]$.
(Матурски испит Математичка гимназија 1997.)

Решење: Област дефинисаности једначине је

$$D_x = \left\{x \mid x^2 + 2px > 0 \wedge 8x - 6p - 3 > 0\right\}.$$

Једначину можемо написати у облику

$$\log(x^2 + 2px) = \log(8x - 6p - 3),$$

па је јасно да се она своди на квадратну једначину

$$x^2 + 2(p-4)x + 3(2p+1) = 0.$$

Постоје две могућности; једначина или има јединствено решење, или има два решења, а једно од та два решења не задовољава услов задатка.

У првом случају, анализирајући дискриминанту квадратне једначине, имамо да је

$$4(p-4)^2 - 12(2p+1) = 0,$$

тј. $p = 1$ или $p = 13$. Решење $p = 1$ нам, заменом у квадратну једначину, даје решење $x = 3$. Решење $p = 13$ нам даје $x = -9$, што отписујемо.

У другом случају, једначина има два решења ако је $p \in (-\infty, 1) \cup (13, +\infty)$.
Размотримо три случаја:

1° Ако је $p \in (13, +\infty)$, имамо да је

$$x^2 + 2px > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -2p) \cup (0, +\infty)$$

и

$$8x - 6p - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{3}{4}p + \frac{3}{8}, +\infty\right).$$

Ова два скупа немају пресек, јер је за $p > 13$ важи $x \in (-\infty, -26) \cup (0, +\infty)$ и $x \in \left(\frac{81}{8}, +\infty\right)$, а на интервалу $\left(\frac{81}{8}, +\infty\right)$ парабола и права неће имати заједничких тачака;

2° Ако је $p \in [0, 1)$, права $8x - 6p - 3$ и парабола $x^2 + 2px$ се секу у двема тачкама, тј. једначина има два решења;

3° Ако је $p \in (-\infty, 0)$, имамо да је

$$x^2 + 2px > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup (-2p, +\infty)$$

и

$$8x - 6p - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{3}{4}p + \frac{3}{8}, +\infty\right).$$

Да би једначина имала једно решење које задовољава услов, тачка пресека праве $y = \frac{6p+3}{8}$ мора бити између 0 и $-2p$. Ако би била лево од нуле, постојале би две тачке које испуњавају услов. Ако је $\frac{6p+3}{8} > -2p$, тада је $p > -\frac{3}{22}$ и тада постоје две пресечне тачке. Мора да буде $0 \leq \frac{6p+3}{8} \leq -2p$, па је $p \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{-3}{22}\right]$.

Дакле, тачан одговор је (А). □

14. Нека је S скуп свих реалних бројева x за које важи

$$\log_x \frac{62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} \geq 3.$$

Тада је за неке бројеве a, b, c, d, e, f, g ($a < b < c < d < e < f < g$), скуп S облика:
(А) $(a, b] \cup [c, d) \cup (d, e] \cup [f, g]$; (Б) $[a, b] \cup (c, d] \cup [e, f)$;
(В) $(a, b] \cup [c, d] \cup [e, f)$; (Г) $[a, b] \cup [c, d] \cup [e, +\infty)$; (Д) $(a, b] \cup [c, d)$.

Решење: Дата једначина има смисла ако је $x > 0$, $x \neq 1$ и $\frac{62x^2-35x+6}{35-6x} > 0$. Како је $62x^2 - 35x + 6 > 0$ за свако x, последња неједначина је испуњена ако је $35 - 6x > 0$, тј. $x < \frac{35}{6}$. Посматрајмо два случаја:

1° Ако је $0 < x < 1$, логаритамска једначина се своди на

$$\frac{62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} \leq x^3,$$

одакле је

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6. \tag{1}$$

Притом смо водили рачуна да је $35 - 6x > 0$. Једначина

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

је такозвана реципрочна једначина са симетричним коефицијентима. Ако ту једначину поделимо са x^2 имамо

$$6 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$$

Сменом $x + \frac{1}{x} = t$, налазимо да је

$$6(t^2 - 2) - 35t + 62 = 0,$$

тј. да је

$$6t^2 - 35t + 50 = 0.$$

Решења те једначине су $t_1 = \frac{10}{3}$ и $t_2 = \frac{5}{2}$, па враћањем смене имамо једначине

$$x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \qquad \text{и} \qquad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$$

Решења прве једначине су $x_1 = 3$ и $x_2 = \frac{1}{3}$, а решења друге једначине су $x_3 = \frac{1}{2}$ и $x_4 = 2$.

Дакле, једначина (1) је задовољена за $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ или $2 \leq x \leq 3$. Ове вредности x задовољавају и услове $x > 0$, $x \neq 1$ и $x < \frac{35}{6}$. Међутим, пошто је у овом случају $0 < x < 1$, решење логаритамске неједначине остаје

$$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

2° Ако је $x > 1$, логаритамска неједначине постаје

$$\frac{62x^2 - 35x + 6}{35 - 6x} \geq x^2,$$

тј.

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 \geq 0. \tag{2}$$

Сличним поступком налазимо да су решења неједначине (2)

$$x \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \quad x \geq 3,$$

а с обзиром на услове $x > 1$ и $x < \frac{35}{6}$, имамо $1 < x \leq 2$ и $3 \leq x < \frac{35}{6}$.

Дакле, решење логаритамске једначине је

$$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 1 < x \leq 2, \quad 3 \leq x < \frac{35}{6},$$

па је одговор (B). □

15. Одредити број решења једначине

$$\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x.$$

Решење: Уведимо функције

$$f_1(x) = \log_{\frac{1}{16}} x \qquad \text{и} \qquad f_2(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x.$$

Са k_1 и k_2 означимо криве одређене једначинама $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Тачке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ припадају пресецима k_1 и k_2, па су $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{4}$ решења задате једначине. Приметимо да су функције f_1 и f_2 узајамно инверзне. То значи да је крива k_1 симетрична кривој k_2 у односу на праву $y = x$ и обрнуто, па је права $y = x$ оса симетрије. Према томе, неке тачке пресека тих кривих припадају правој $y = x$. Апсцисе тачака пресека су решења једначине $\left(\frac{1}{16}\right)^x = x$. Ова једначина има једно решење, које налазимо нумеричким путем. Оно износи $x = 0{,}3642498898\ldots$.

Према томе, дата једначина има три решења. □

16. Решити једначину

$$\left(x - \log_{\frac{1}{2}} x\right)^{\log^2 2x - \log \frac{1}{5} x - 1} = 1.$$

Решење: Мора бити или $x - \log_{\frac{1}{2}} x = 1$, или $\log^2 2x - \log \frac{1}{5} x - 1 = 0$.

У случају да је $x - \log_{\frac{1}{2}} x = 1$, имамо да је

$$\log \frac{x}{2} = x - 1.$$

Графички можемо показати да та једначина нема решења.
У случају да је $\log^2 2x - \log \frac{1}{5}x - 1 = 0$, имамо да је

$$\log^2 2x - \log 2x = 0,$$

тј.

$$\log 2x(\log 2x - 1) = 0.$$

Очигледно, или је $2x = 1$, или је $2x = 10$, то јест, $x = \frac{1}{2}$ или $x = 5$. □

17. У равни Oxy шрафирати област

$$A = \left\{(x, y) \mid \log_x(\log_y x) > 0\right\}.$$

Решење: Имамо две могућности.

- I могућност: Ако је $x > 1$, тада је

$$\log_x(\log_y x) > 0 \Rightarrow \log_y x > 1 \Rightarrow \log_y x > \log_y y.$$

  Размотримо два случаја:

  1° $y > 1 \Rightarrow x > y$;
  2° $0 < y < 1 \Rightarrow x < y$. То је немогуће, јер је $x > 1$.

  Дакле, имамо $x > 1$, $y > 1$, $x > y$.

- II могућност: Ако је $0 < x < 1$, тада је

$$\log_x(\log_y x) > 0 \Rightarrow 0 < \log_y x < 1 \Rightarrow \log_y 1 < \log_y x < \log_y y.$$

  Имамо два случаја:

  1° $y > 1 \Rightarrow 1 < x < y$. То је немогуће, јер је $0 < x < 1$;
  2° $0 < y < 1 \Rightarrow 1 > x > y$.

  Према томе, имамо $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ и $x > y$.

Имајући обе могућности у виду, налазимо

$$A = \{(x, y) \mid x > 1, y > 1, x > y\} \cup \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, x > y\}.$$

□

18. Од свих парова реалних бројева (x, y), које задовољавају услов $\log_{x^2+y^2}(x + y) \geq 1$, наћи онај пар чији је y највећи.

Решење. Све тачке равни које задовољавају дату неједначину дефинисане су помоћу два система неједначина:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 > 1, \\ x + y \leq x^2 + y^2; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 < 1, \\ 0 < x + y \leq x^2 + y^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ако у другој од неједначина система (1) сматрамо y као параметар, добијамо неједначину по x:

$$x^2 - x + y^2 - y \leq 0. \tag{3}$$

Ова неједначина има решења само уз услов $D = 1 - 4(y^2 - y) \geq 0$, тј. ако је $4y^2 - 4y - 1 \leq 0$, чије је решење

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

Највећа вредност за y је, према томе, $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

За $y = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ неједначина (3) добија облик $x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$ чије је јединствено решење $x = \frac{1}{2}$. Притом је за тачку $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ и прва од неједначина система (1)

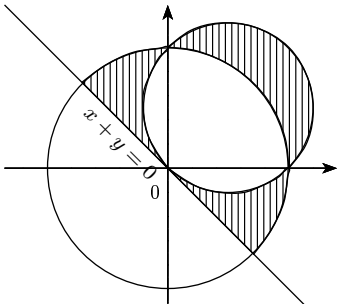
задовољена. За систем (2) имамо $y < 1$ па зато други систем не даје нова решења за највећи y.

Примедба. Једначина $x + y = x^2 + y^2$ дефинише круг

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

са полупречником $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и центром у тачки $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Користећи то, лако је одредити сва решења неједначине дате у задатку (сл. 9), тачка M има координате

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$



сл. 9

Стручне школе

1. На што више начина израчунати
$$2\log_3 9 + 3\log_9 81 - 4\log_2 8 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} + \log_5 1.$$

2. Написати број 3 као степен са основама 9, 5, 7 и 2.

3. Одредити знак бројева $\log_3 \frac{3}{4}$, $\log_3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ и $\log_3(\log_3 8)$.

4. Израчунати $\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_{\frac{1}{2}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} + \log_{\frac{1}{2}} 1$.

5. Одредити $\log p$ и $\log_a p$ ако је $p = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

6. Одредити $\log V$ и $\log_r V$ ако је $V = \dfrac{r^3\pi}{\sqrt{3}}$.

7. Ако је $p = \dfrac{ab}{2}$, одредити $\log_a p$, $\log_b p$ и $\log_2 p$.

8. Ако се зна да је $\log_{10} 2 = 0{,}30103$, одредити логаритам са основом 10 од бројева 4, 5, 8, 20, 32, 40, 50, 0,2, 0,04, 0,5, 0,8, 0,25.

9. Уз помоћ логаритамских таблица или дигитрона, одредити вредност израза
$$\sqrt[5]{\frac{2{,}13^3 \cdot 211}{5 \cdot 13{,}7}} - \frac{3{,}12^2 \cdot 17}{135{,}96}.$$

10. Нацртати графике следећих функција и испитати њихове особине:
$$\begin{array}{llll} y = \log_3 x, & y = \log_3 x + 2, & y = \log_3 x - 2, & y = \log_3(x+2), \\ y = \log_3(x-2), & y = \log_{\frac{1}{3}} x, & y = \log_{\frac{1}{3}} x + 2, & y = \log_{\frac{1}{3}} x - 2, \\ y = \log_{\frac{1}{3}}(x+2), & y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2). & & \end{array}$$

11. Одредити област дефинисаности и нуле функције $y = \log(x^2 - 3x)$.

12. Помоћу графика функције $y = \log_3 x$ одредити дуж чији мерни број дужине представља: а) $\log_3 5$; б) $\log_3 4{,}5$; в) $\log_3 3{,}75$.

13. Помоћу графика функције $y = \log_2 x$, показати да је:

    а) $\log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 3$; б) $\log_2 3 = \log_2 12 - \log_2 4$;

    в) $\log_2 9 = 2\log_2 3$; г) $\log_2 5 = \log_2 10 - 1$.

14. Помоћу графика функције $y = \log_3 x$ и $y = -x+4$, одредити приближне вредности променљиве x такве да је $\log_3 x = -x + 4$.

15. Одредити скуп вредности променљиве x такве да је:

    а) $\log_2(x+3) > 0$; б) $\log_2(x-4) > 0$;

    в) $\log_5(2x+3) < 0$; г) $\log_2 x < \log_2(8-x)$.

16. Одредити скуп вредности променљиве x за које је одређена функција:

а) $y = \log_3(2x-5)$; б) $y = \log_5 \dfrac{3-x}{-2}$; в) $y = \log_3 \dfrac{-1}{x+2}$;

г) $y = \log_2 3(x-5)$; д) $y = \dfrac{3}{\log x}$; ђ) $y = \log(-x)$;

е) $y = \log \dfrac{x}{x+1}$; ж) $y = \log|x|$; з) $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x+2)}$.

17. Решити једначину $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$.

18. Решити једначину $\log(2^{3x-2} - 2^{3x-3}) = \log(2^{3x-4} + 4)$.

19. Решити једначине:

а) $\dfrac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2$; б) $x^{\log x - 1} = 100$; в) $\dfrac{1}{5-\log x} + \dfrac{2}{1+\log x} = 1$;

г) $\log\sqrt{7x+5} + \dfrac{1}{2}\log(2x+7) = 1 + \log 4{,}5$;

д) $\log\left(\dfrac{1}{2} + x\right) = \log\dfrac{1}{2} - \log x$; ђ) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$.

20. Решити једначине:

а) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$; б) $\log_{x+1} a + \log_{ax} a = 0$;

в) $\log_x 10 + 2\log_{10x} 10 + 3\log_{100x} 10 = 0$; г) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$;

д) $\log_{3x} x - \log_3^2 x = \log_{3x} 3 - 1$; ђ) $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \dfrac{1}{\log_2 x - 6}$;

е) $2\log(x+3) = \log 12x$; ж) $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x+1) = 3$.

21. Ако је $0 < a < 1$, решити по x једначину $\log_a x > 6\log_x a - 1$.

22. Наћи све реалне бројеве за које је дефинисан логаритам

$$\log_{x^2-x-6}(x^2 + x - 6).$$

23. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} 3^x \cdot 2^y &= 576, \\ \log_2(y-x) &= 2. \end{aligned}$$

24. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} \log_y x - 3\log_x y &= 2, \\ \log_2 x &= 4 - \log_2 y. \end{aligned}$$

25. Доказати да су највеће вредности израза $(\log_5 6)^{\sin x}$ и $(\log_6 5)^{\cos x}$ међусобно једнаке.

26. У електротехници и акустици ниво снаге L је функција снаге P, мерене према референтној снази $P_0 = 10^{-12}$ W, мери се у децибелима и изражен је формулом $L = 10\log\dfrac{P}{P_0}$.

а) Ако је $P = Ru^2$, где је u електрични напон, а R отпор, доказати да два пута већем напону одговара за 8 dB већи ниво снаге;

б) Ако један звучник има ниво акустичне снаге 78 dB, показати да се укључивањем још једног таквог извора ниво снаге повећава на 81 dB;

в) Ако је горња граница нивоа снаге 91 dB, колико оваквих звучних извора може радити истовремено?

27. Доказати идентитет

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \cdots \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \frac{n-1}{n} \cdot (\log_x 2)^{-2}.$$

28. Одредити које од следећих функција су једнаке:

$$f_1(x) = 2\log_2 x, \quad f_2(x) = \log_2 x^2, \quad f_3(x) = 2\log_2 |x|, \quad f_4(x) = \frac{2}{\log_x 2}.$$

29. Одредити све рационалне бројеве r за које је $\log_2 r$ и сам рационалан.

30. Одредити сва реална решења једначине $19^x \cdot 89^{2-x^2} = 19 \cdot 89$.

31. Решити једначину $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

32. Одредити који од наведених исказа су тачни:

а) $\log(-2)(-3) = \log(-2) + \log(-3)$; б) $\log(-3)^2 = 2\log(-3)$;

в) $\log(-2)^4 = 2\log(-2)^2$; г) $\log \dfrac{-2}{-3} = \log 2 - \log 3$.

33. Доказати да је:

а) $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$;

б) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \dfrac{1}{3}$.

34. Одредити вредност реалног броја x тако да за комплексне бројеве $z_1 = \log(2x^2 + x + 1) + i \cdot 4^x$ и $z_2 = \log(x^2 + 1) + i(2^{x+1} - 3)$ важи $z_1 = \overline{z_2}$.

35. Израчунати $a^{\frac{\log\log a}{\log a}}$, ако је $a > 0$ и $a \neq 1$.

36. Решити једначине:

а) $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$; б) $5^{1+\log_4 x} + 5^{\log_{\frac{1}{4}} x - 1} = \dfrac{26}{5}$;

в) $9^{1+\log_3 x} + 3^{1+\log_3 x} = 210$; г) $(\log_{10} x)^2 - \log_{10} x^3 + 2 = 0$;

д) $\log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right) \cdot \log_3^2 x = 1$.

37. Ако су a, b и c реални параметри, решити једначине:

а) $\log_a^2 x + \log_x^2 a = 1$; б) $\log_x 2 \log_x^2 a + 1 = 0$;

в) $\log_{\sqrt{x}} a \log_{a^2} \dfrac{a^2 - 4}{2a - x} = 1$; г) $\log_a x + \log_b x + \log_c x = \log_{abc} x$;

д) $\log_2(x^2+2x-7) = \dfrac{1}{\log_{9-6x+x^2} 4}$;

ђ) $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$.

38. Решити неједначину:

а) $2^{(\log_{0,5} x)^2} + x^{\log_{0,5} x} > 2{,}5$; б) $3^{\log x+2} < 3^{\log x^2+5} - 2$;

в) $5^{\log_3 fx-2x} < 1$; г) $\left(\dfrac{2}{5}\right) \log_{0,25}(x^2-5x+8) \leq 2{,}5$;

д) $\log_x(x^3-x^2-2x) < 3$; ђ) $\log_{\frac{x}{5}}(x^2-8x+16) \geq 0$;

е) $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0$; ж) $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$.

39. Одредити n^3 ако је $\log_{4n} 40\sqrt{3} = \log_{3n} 45$.

40. Одредити $\dfrac{p}{q}$ ако је $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16}(p+q)$.