ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Материјали за младе математичаре, св. 48

Павле Младеновић   Ђорђе Кртинић

МЕЂУНАРОДНЕ И БАЛКАНСКЕ МАТЕМАТИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ

1996 –2006. године

Б Е О Г Р А Д
2007

Аутори: *др Павле Младеновић*, професор Математичког факултета у Београду
мр Ђорђе Кртинић, асистент Математичког факултета у Београду

МЕЂУНАРОДНЕ И БАЛКАНСКЕ МАТЕМАТИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ 1996 –2006. године

Материјали за младе математичаре, свеска 48

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнеза Михаила 35/IV
`http://www.dms.org.yu/`, E-mail: `dms@matf.bg.ac.yu`

За издавача: *др Бранислав Поповић*

Рецензенти: *др Ратко Тошић*, професор ПМФ-а у Новом Саду
др Милош Арсеновић, професор Математичког факултета у Београду

Уредник: *др Зоран Каделбург*

Цртежи и слог: *аутори*

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.3)(079.1)

МЛАДЕНОВИЋ, Павле
Међународне и Балканске математичке олимпијаде : 1996–2006. године / Павле Младеновић, Ђорђе Кртинић ; [цртежи аутора]. – Београд : Друштво математичара Србије, 2007 (Ваљево : Alexandria). – 135 стр. : граф. прикази ; 24 cm. – (Материјали за младе математичаре / Друштво математичара Србије ; св. 48)

Тираж 1. 000.

ISBN 978-86-81453-64-3
1. Кртинић, Ђорђе

COBISS.SR–ID 137915148

ISBN: 978-86-81453-64-3

Тираж: 1000 примерака

Штампа: „Alexandria", Ваљево

Садржај

МЕЂУНАРОДНЕ И БАЛКАНСКЕ МАТЕМАТИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ

Међународна математичка олимпијада (ММО) одржава се сваке године, почевши од 1959. године. На првој ММО, која је одржана у Румунији, учествовало је седам социјалистичких земаља Источне Европе. Југославија је први пут учествовала на петој ММО, која је одржана 1963. године и отада је изостала само 1980., када ММО није ни одржана и 1993. и 1994., када наша екипа није учествовала због санкција уведених нашој земљи. Последњих година број учесника је већи од 90. Према устаљеној традицији ММО је дводневно такмичење, при чему сваког дана млади математичари средњошколци решавају по три задатка, а задаци се бирају из области алгебра, геометрија, теорија бројева и комбинаторика. Награђује се половина укупног броја такмичара, а однос првих, других и трећих награда је приближно 1:2:3. Иако се сада организују и друга међународна такмичења младих математичара, која су другачије конципирана, ММО је такмичење које по општем мишљењу ужива највећи углед. Балканска математичка олимпијада (БМО) одржава се од 1984. године, а Југославија је учесник овог такмичења од 1987. године.

У претходним издањима Друштва математичара Србије објављени су задаци са решењима и подаци о резултатима наших такмичара на свим ММО и БМО закључно са 1995-ом годином (свеске 11 и 32 едиције Материјали за младе математичаре). У овој књизи дајемо задатке, решења и резултате наших такмичара на ИМО и БМО које су одржане у периоду од 1996. до 2006. године. У овом периоду наша земља је наступала на овим такмичењима као СР Југославија и последњих година као Србија и Црна Гора (од ове 2007. године наша екипа наступаће под именом Србија).

Наши ученици су освојили велики број медаља. Пре навођења комплетног прегледа свих резултата поменимо посебно резултат Душана Ђукића, који је до сада наш најуспешнији такмичар. Душан је у периоду од 1997. до 1999. године освојио једну прву и две друге награде на ММО, односно две прве и једну трећу награду на БМО.

Душану дугујемо и захвалност, пошто је помогао ауторима у сакупљању материјала за ову књигу. Такође се захваљујемо и Владимиру Јанковићу, Војиславу Петровићу, Ратку Тошићу, Ђорђу Дугошији, Владимиру Балтићу, Владимиру Драговићу, Ивану Матићу, Николи Петровићу, чије смо чланке користили при изради ове књиге, Предрагу Јаничићу, чији је програм (GCLC) коришћен при изради слика, Владимиру Лазићу, Миливоју Лукићу, Александару Илићу, Марку Радовановићу, Милану Новаковићу, Александару Пејчеву, чија су решења коришћена (они су у овом периоду били такмичари), као и рецензентима Ратку Тошићу и Милошу Арсеновићу, који су пажљиво прочитали текст и помогли низом сугестија.

1996 (ИМО – Индија, БМО – Румунија)

Владимир Бранков	*Јелена Спасојевић*
Иван Вељковић	*Марко Стошић*
Ђорђе Милићевић	*Борис Шобот*

На ИМО су освојили:

Ђорђе Милићевић – другу награду;

Владимир Бранков и *Борис Шобот* – треће награде,

док је *Иван Вељковић* похваљен.

На БМО су освојили:

Ђорђе Милићевић – прву награду;

Марко Стошић – другу награду;

Владимир Бранков, *Иван Вељковић*, *Јелена Спасојевић* и *Борис Шобот* – треће награде.

1997 (ИМО – Аргентина, БМО – Грчка)

Иван Вељковић	*Јелена Спасојевић*
Душан Ђукић	*Раде Станојевић*
Никола Петровић	*Бранислав Цветковић*

На ИМО су освојили:

Душан Ђукић и *Никола Петровић* – друге награде;

Јелена Спасојевић, *Раде Станојевић* и *Бранислав Цветковић* – треће награде.

На БМО су освојили:

Никола Петровић и *Јелена Спасојевић* – друге награде;

Душан Ђукић и *Раде Станојевић* – треће награде, док су *Иван Вељковић* и и *Бранислав Цветковић* похваљени.

1998 (ИМО – Тајван (Република Кина), БМО – Кипар)

Предраг Глишић	*Никола Петровић*
Душан Ђукић	*Горан Предовић*
Исидора Милин	*Јелена Спасојевић*

На ИМО су освојили:

Предраг Глишић, *Душан Ђукић*, *Исидора Милин*, *Никола Петровић* и *Јелена Спасојевић* – друге награде,

док је *Горан Предовић* похваљен.

На БМО су освојили:

Душан Ђукић и *Горан Предовић* – прве награде;

Исидора Милин, *Никола Петровић* и *Јелена Спасојевић* – друге награде;

Предраг Глишић – трећу награду.

1999 (ИМО – Румунија, БМО – БЈР Македонија)

Предраг Глишић	*Исидора Милин*
Душан Ђукић	*Никола Петровић*
Иван Матић	*Раде Станојевић*

На ИМО су освојили:

Душан Ђукић – прву награду;

Предраг Глишић и *Иван Матић* – друге награде;

Исидора Милин, *Никола Петровић* и *Раде Станојевић* – треће награде.

На БМО екипа Југославије није учествовала.

2000 (ИМО – Јужна Кореја, БМО – Молдавија)

Ивана Божић	*Миливоје Лукић*
Тијана Костић	*Милош Поповић*
Владимир Лазић	*Томислав Радић*

На ИМО су освојили:

Миливоје Лукић – друга награда;

Тијана Костић, *Владимир Лазић* и *Томислав Радић* – треће награде.

На БМО су освојили:

Владимир Лазић – друга награда;

Тијана Костић, *Миливоје Лукић* и *Милош Поповић* – треће награде.

2001 (ИМО – САД, БМО – Југославија)

Екипа Југославије на ИМО и БМО се ове године разликовала. На ИМО екипу Југославије су представљали

Владимир Лазић *Марко Петковић*
Миливоје Лукић *Татјана Симчевић*
Јелена Милановић *Александар Суботић*

и освојили су:

Владимир Лазић – другу награду;

Миливоје Лукић, *Татјана Симчевић* и *Александар Суботић* – треће награде,

а на БМО:

Милан Кирћански *Карола Месарош*
Владимир Лазић *Милан Радојчић*
Миливоје Лукић *Татјана Симчевић*

и освојили су:

Владимир Лазић, *Миливоје Лукић* и *Татјана Симчевић* – друге награде;

Милан Кирћански, *Карола Месарош* и *Милан Радојчић* – треће награде.

2002 (ИМО – Шкотска (Велика Британија), БМО – Турска)

Екипа Југославије на ИМО и БМО се ове године разликовала. На ИМО екипу Југославије су представљали

Александар Илић *Јелена Милановић*
Дејан Колунџија *Маја Тасковић*
Миливоје Лукић *Никола Тодоровић*

и освојили су:

Миливоје Лукић – другу награду;

Александар Илић, *Дејан Колунџија*, *Јелена Милановић*, *Маја Тасковић* и *Никола Тодоровић* – треће награде,

а на БМО:

Александар Илић *Јелена Милановић*
Дејан Колунџија *Марко Петковић*
Миливоје Лукић *Милан Радојчић*

и освојили су:

Александар Илић и *Миливоје Лукић* – друге награде;

Дејан Колунџија, *Јелена Милановић* и *Марко Петковић* – треће награде.

2003 (ИМО – Јапан, БМО – Албанија)

Први пут екипа наступа под именом Србија и Црна Гора.

Александар Бранковић	*Милан Новаковић*
Александар Илић	*Александар Пејчев*
Јелена Милановић	*Марко Радовановић*

На ИМО су освојили:

Александар Илић, *Александар Пејчев* и *Марко Радовановић* – друге награде;

Јелена Милановић – трећу награду,

док су *Александар Бранковић* и *Милан Новаковић* похваљени.

На БМО су освојили:

Јелена Милановић – друга награда;

Александар Бранковић, *Александар Илић*, *Милан Новаковић*, *Александар Пејчев* и *Марко Радовановић* – треће награде.

2004 (ИМО – Грчка, БМО – Бугарска)

Ђорђе Баралић	*Марко Радовановић*
Милан Новаковић	*Урош Рајковић*
Александар Пејчев	*Петра Стојсављевић*

На ИМО су освојили:

Милан Новаковић и *Марко Радовановић* – друге награде;

Ђорђе Баралић, *Александар Пејчев* и *Урош Рајковић* – треће награде.

На БМО су освојили:

Марко Радовановић – друга награда;

Ђорђе Баралић, *Милан Новаковић*, *Александар Пејчев*, *Урош Рајковић* и *Петра Стојсављевић*– треће награде.

2005 (ИМО – Мексико, БМО – Румунија)

Екипа Србије и Црне Горе на ИМО и БМО се ове године разликовала. На ИМО екипу Србије и Црне Горе су представљали

Ђорђе Баралић	*Игор Кабиљо*
Бојан Башић	*Урош Рајковић*
Милош Ђорић	*Димитрије Филиповић*

и освојили су:

Бојан Башић, *Игор Кабиљо* и *Урош Рајковић* – треће награде,

док је *Милош Ђорић* похваљен,

а на БМО:

Ђорђе Баралић	*Урош Рајковић*
Милош Ђорић	*Петра Стојсављевић*
Игор Кабиљо	*Димитрије Филиповић*

и освојили су:

Ђорђе Баралић – другу награду;

Милош Ђорић, *Игор Кабиљо*, *Урош Рајковић* и *Петра Стојсављевић* – треће награде.

2006 (ИМО – Словенија, БМО – Кипар)

Марко Јевремовић	*Младен Радојевић*
Марија Јелић	*Маријана Смаилагић*
Игор Нинковић	*Александар Трокицић*

На ИМО су освојили:

Марко Јевремовић, *Марија Јелић*, *Младен Радојевић*, *Маријана Смаилагић* и *Александар Трокицић* – треће награде,

док је *Игор Нинковић* похваљен.

На БМО су освојили:

Марко Јевремовић – прву награду;

Маријана Смаилагић – другу награду;

Игор Нинковић, *Младен Радојевић* и *Александар Трокицић*– треће награде.

ЗАДАЦИ СА МЕЂУНАРОДНИХ МАТЕМАТИЧКИХ ОЛИМПИЈАДА

ИМО 1996

1. Нека је $ABCD$ правоугаона табла, $AB = 20$, $BC = 12$. Табла је разложена на 20×12 јединичних квадрата. Нека је r природан број. Новчић може да се премести из једног квадрата у други ако и само ако је растојање њихових центара једнако $\sqrt{r}$. Задатак је наћи низ премештања који преводи новчић из квадрата коме је A једно теме у квадрат коме је B једно теме.

(а) Доказати да се задатак не може извршити ако је r дељиво са 2 или 3.

(б) Доказати да се задатак може извршити ако је $r = 73$.

(в) Може ли се задатак извршити ако је $r = 97$?

(Финска)

2. Нека је P унутрашња тачка троугла ABC таква да је

$$\sphericalangle APB - \sphericalangle ACB = \sphericalangle APC - \sphericalangle ABC.$$

Нека су D, E центри кругова уписаних у троуглове APB, APC, редом. Доказати да се AP, BD и CE секу у једној тачки.

(Канада)

3. Нека је $\mathbb{N}_0$ скуп ненегативних целих бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такве да је

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

за све $m, n \in \mathbb{N}_0$.

(Румунија)

4. Природни бројеви a и b су такви да су бројеви $15a + 16b$ и $16a - 15b$ квадрати природних бројева. Наћи најмању могућу вредност коју може узети мањи од та два квадрата.

(Русија)

5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао, такав да је AB паралелно са ED, BC паралелно са FE и CD паралелно са AF. Нека R_A, R_C и R_E означавају полупречнике кругова описаних око троуглова FAB, BCD, DEF, редом, и нека O означава обим шестоугла. Доказати да је

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{O}{2}\,.$$

(Јерменија)

6. Нека су n, p, q природни бројеви такви да је $n > p + q$. Нека су $x_0, x_1, \ldots, x_n$ цели бројеви који задовољавају следеће услове:

(а) $x_0 = x_n = 0$;

(б) за сваки цео број i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, или је $x_i - x_{i-1} = p$ или је $x_i - x_{i-1} = -q$.

Доказати да постоји пар (i, j), где је $i < j$ и $(i, j) \neq (0, n)$, такав да је $x_i = x_j$.

(Француска)

ИМО 1997

1. Тачке са целим координатама у равни су темена јединичних квадрата. Квадрати су наизменично обојени црно и бело (као на шаховској табли). За сваки пар (m, n) природних бројева уочен је правоугли троугао чија темена имају целе координате и чије катете, дужина m и n, леже на страницама квадрата. Нека је S_1 укупна површина црног, а S_2 укупна површина белог дела троугла и нека је

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|.$$

(а) Израчунати $f(m, n)$ за све природне m и n исте парности.

(б) Доказати да је $f(m, n) \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot \max\{m, n\}$ за све m и n.

(в) Доказати да не постоји константа C таква да важи

$$f(m, n) < C \quad \text{за све } m \text{ и } n.$$

(Белорусија)

2. У троуглу ABC угао код темена A је најмањи. Нека је U унутрашња тачка лука између B и C описане кружнице троугла ABC који не садржи A. Симетрале дужи AB и AC секу праву AU у тачкама V и W, редом, а праве BV и CW се секу у T. Доказати да је

$$AU = TB + TC.$$

(Велика Британија)

3. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви који задовољавају услове:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1 \quad \text{и} \quad |x_i| \leqslant \frac{n+1}{2} \ \text{ за } \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказати да постоји пермутација $y_1, y_2, \ldots, y_n$ бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$, таква да је

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}\,.$$

(Русија)

4. Матрица $n \times n$ (квадратна таблица) чији су чланови елементи скупа $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ назива се *сребрна* матрица ако за свако $i = 1, 2, \ldots, n$, i-та врста и i-та колона заједно садрже све елементе из S. Доказати да:

(а) не постоји сребрна матрица за $n = 1997$;

(б) сребрне матрице постоје за бесконачно много вредности n.

(Иран)

5. Наћи све парове (a, b) природних бројева за које важи

$$a^{b^2} = b^a.$$

(Чешка)

6. За сваки природан број n нека $f(n)$ означава број представљања броја n у облику збира степена броја 2 са ненегативним целим експонентима. Репрезентације које се разликују само у редоследу њихових сабирака сматрају се истим. На пример, $f(4) = 4$, јер број 4 може бити представљен на следећа четири начина: 4, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$. Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 3$ важи

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

(Литванија)

ИМО 1998

1. У конвексном четвороуглу $ABCD$, дијагонале AC и BD су међусобно нормалне, а наспрамне странице AB и DC нису паралелне. Нека се тачка P, у којој се секу симетрале страница AB и DC, налази унутар четвороугла $ABCD$. Доказати да је $ABCD$ тетиван четвороугао ако и само ако троуглови ABP и CDP имају једнаке површине.

(Луксембург)

2. На такмичењу учествује a такмичара и b судија, при чему је $b \geqslant 3$ непаран природан број. Сваки судија оцењује сваког такмичара или са „прошао“ или са „пао“. Нека је k број такав да се за сваку двојицу судија њихове оцене поклапају код највише k такмичара. Доказати да је

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}\,.$$

(Индија)

3. За сваки природан број n нека је $d(n)$ број природних делилаца броја n (укључујући 1 и сам број n). Одредити све природне бројеве k такве да за неко n важи

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

(Белорусија)

4. Одредити све парове (a, b) природних бројева такве да је број $a^2b + a + b$ дељив са $ab^2 + b + 7$.

(Велика Британија)

5. Нека је I центар уписане кружнице троугла ABC. Нека уписана кружница додирује странице BC, CA и AB у тачкама K, L и M, редом. Права која садржи тачку B и паралелна је са LK сече праве LM и LK редом у тачкама R и S. Доказати да је $\sphericalangle RIS$ оштар.

(Украјина)

6. Одредити најмању могућну вредност броја $f(1998)$, где је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква да важи

$$f(t^2 f(s)) = s \cdot (f(t))^2,$$

за све s и t из $\mathbb{N}$.

(Бугарска)

ИМО 1999

1. Одредити све коначне скупове S тачака у равни, које садрже бар три тачке и задовољавају следећи услов:

за сваке две различите тачке A и B из S, симетрала дужи AB је оса симетрије скупа S.

(Естонија)

2. Нека је $n \geqslant 2$ природан број.

(a) Одредити најмању константу C, тако да неједнакост

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j)^2 \leqslant C\Bigg(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\Bigg)^4$$

важи за све реалне бројеве $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$.

(б) За ту константу C одредити када важи једнакост.

(Пољска)

3. Квадратна табла $n \times n$, где је n паран природан број, је подељена на n^2 јединичних квадрата. Два различита јединична квадрата на табли су *суседна* ако имају заједничку страницу.

Означено је N јединичних квадрата тако да је сваки јединични квадрат (означен или неозначен) суседан са бар једним означеним квадратом.

Одредити најмању могућу вредност броја N.

(Белорусија)

4. Одредити све парове (n, p) природних бројева за које важи:

(а) p је прост број;

(б) $n \leqslant 2p$;

(в) број $(p-1)^n + 1$ је дељив са n^{p-1}.

(Тајван)

5. Кружнице Γ_1 и Γ_2 налазе се унутар кружнице Γ и додирују Γ у различитим тачкама M и N, редом. Кружница Γ_1 пролази кроз центар кружнице Γ_2. Права која садржи две тачке пресека кружница Γ_1 и Γ_2 сече Γ у тачкама A и B. Праве MA и MB секу Γ_1 у C и D, редом.

Доказати да је права CD тангента кружнице Γ_2.

(Русија)

6. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

за све $x, y \in R$.

(Јапан)

ИМО 2000

1. Кружнице Γ_1 и Γ_2 секу се у тачкама M и N. Нека права AB тангира кружнице Γ_1 и Γ_2 у A и B, редом, тако да је тачка M ближа правој AB него што је тачка N. Нека права која садржи тачку M и паралелна је правој AB други пут сече кружницу Γ_1 у тачки C, а кружницу Γ_2 у тачки D. Праве CA и DB секу се у тачки E, праве AN и CD у тачки P, праве BN и CD у тачки Q. Доказати да је $EP = EQ$.

(Русија)

2. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да је

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

(САД)

3. Нека је $n \geqslant 2$ природан број. На хоризонталној правој налази се n бува које нису све у истој тачки.
За позитиван број λ *потез* се дефинише на следећи начин:

бирају се две буве, које се налазе у произвољним тачкама A и B, при чему је тачка A лево од B;

бува из тачке A скаче у тачку C, која се на датој правој налази десно од B, тако да је $\dfrac{BC}{AB} = \lambda$.
Одредити све вредности λ, тако да за сваку тачку M на датој правој и произвољан почетни распоред n бува, постоји коначан низ потеза после којих се све буве нађу десно од тачке M.

(Белорусија)

4. Мађионичар има 100 карата нумерисаних бројевима од 1 до 100. Он ставља све карте у три кутије - црвену, белу и плаву, тако да свака кутија садржи бар једну карту.

Гледалац из публике прво бира две кутије, а затим бира по једну карту из сваке од њих и саопштава збир бројева на изабраним картама. Знајући тај збир мађионичар одређује кутију из које није бирана карта.

На колико начина мађионичар може да распореди карте у кутије, тако да овај трик увек буде успешан (две расподеле карата су различите ако бар једна карта није оба пута стављена у исту кутију)?

(Мађарска)

5. Да ли постоји природан број n који је дељив са тачно 2000 различитих простих бројева, такав да је број $2^n + 1$ дељив са n?

(Русија)

6. Нека су AH_1, BH_2, CH_3 висине оштроуглог троугла ABC. Уписана кружница у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB у тачкама T_1, T_2, T_3, редом. Нека су праве l_1, l_2, l_3 симетричне правим H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 у односу на праве T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2, редом.

Доказати да праве l_1, l_2, l_3 одређују троугао чија темена припадају кружници уписаној у троугао ABC.

(Русија)

ИМО 2001

1. Нека је ABC оштроугли троугао и O центар његове описане кружнице. Нека је P подножје висине из A на страницу BC. Ако је $\sphericalangle BCA \geqslant \sphericalangle ABC + 30^\circ$, доказати да је $\sphericalangle CAB + \sphericalangle COP < 90^\circ$.

(Јужна Кореја)

2. Доказати да је

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$$

за све позитивне бројеве a, b, c.

(Јужна Кореја)

3. На математичком такмичењу учествовали су 21 дечак и 21 девојчица. Свако од њих решио је највише 6 задатака. За сваког дечака и сваку девојчицу постоји бар један задатак који су обоје решили. Доказати да постоји задатак који су решили бар три дечака и бар три девојчице.

(Немачка)

4. Нека је n непаран природан број већи од 1 и нека су $k_1, k_2, \ldots, k_n$ цели бројеви. За сваку пермутацију $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ нека је

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Доказати да постоје пермутације b и c, $b \neq c$, такве да је $n!$ делилац броја $S(b) - S(c)$.

(Канада)

5. У троуглу ABC важи $\sphericalangle CAB = 60^\circ$. Симетрала угла $\sphericalangle BAC$ сече страницу BC у тачки P, а симетрала угла $\sphericalangle ABC$ сече страницу CA у тачки Q. Ако је $AB + BP = AQ + QB$, наћи углове троугла ABC?

(Израел)

6. Нека су a, b, c, d природни бројеви, такви да је $a > b > c > d$ и

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Доказати да $ab + cd$ није прост број.

(Бугарска)

ИМО 2002

1. Нека је n природан број и T скуп тачака (x, y) у равни таквих да су x и y ненегативни цели бројеви и $x + y < n$. Свака тачка скупа T обојена је црвено или плаво. Ако је тачка (x, y) обојена црвено, такве су и све тачке (x', y') скупа T за које је истовремено $x' \leqslant x$ и $y' \leqslant y$. Скуп од n плавих тачака назива се X-*скуп* ако имају различите x-координате, а скуп од n плавих тачака назива се Y-*скуп* ако имају различите y-координате. Доказати да је број X-скупова једнак броју Y-скупова.

(Колумбија)

2. Нека је BC пречник кружнице k чији је центар O, A тачка на k таква да је $0^\circ < \sphericalangle AOB < 120^\circ$, а D средиште лука AB кружнице k који не садржи тачку C. Нека права која садржи тачку O и која је паралелна са DA сече праву AC у J. Нека симетрала дужи OA сече k у E и F. Доказати да је J центар кружнице уписане у троугао CEF.

(Јужна Кореја)

3. Одредити све парове (m, n) природних бројева $(m, n \geqslant 3)$, тако да је

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

природан број за бесконачно много природних бројева a.

(Румунија)

4. Нека је $n > 1$ природан број и нека су $d_1, d_2, \ldots, d_k$ сви позитивни делиоци броја n, при чему је

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Нека је $D = \sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{i+1}$.

(а) Доказати да је $D < n^2$.

(б) Одредити све n за које је D делитељ од n^2.

(Румунија)

5. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(z)) = f(xy - zt) + f(xt + yz),$$

за све реалне x, y, z, t.

(Индија)

6. Нека су $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(n \geqslant 3)$ кружнице полупречника 1 у равни. Нека су центри тих кружница $O_1, O_2, \ldots, O_n$, редом. Ако ниједна права нема заједничких тачака са више од две уочене кружнице, доказати да је

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{O_iO_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}\,.$$

(Украјина)

ИМО 2003

1. Нека је A подскуп скупа $S=\{1,2,\ldots,1\,000\,000\}$ који садржи тачно 101 елемент. Доказати да постоје бројеви $t_1,t_2,\ldots,t_{100}$ из S такви да су скупови

$$A_j=\{x+t_j \mid x\in A\} \quad \text{за} \quad j=1,2,\ldots,100$$

по паровима дисјунктни.

(Бразил)

2. Одредити све парове (a,b) природних бројева такве да је

$$\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$$

природан број.

(Бугарска)

3. За сваки пар наспрамних страница конвексног шестоугла важи:

растојање између њихових средишта једнако је производу броја $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и збира њихових дужина.

Доказати да су сви углови тог шестоугла једнаки (конвексан шестоугао $ABCDEF$ има три пара наспрамних страница: AB и DE, BC и EF, CD и FA).

(Пољска)

4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Нека су P, Q и R подножја нормала из тачке D на праве BC, CA и AB, редом. Доказати да је $PQ=QR$ ако и само ако се симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ секу на правој AC.

(Финска)

5. Нека је n природан број и $x_1,x_2,\ldots,x_n$ реални бројеви такви да је $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n$.

(a) Доказати да је

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2 \leqslant \frac{2(n^2-1)}{3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2\,.$$

(б) Доказати да једнакост важи ако и само ако је $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аритметичка прогресија.

(Ирска)

6. Нека је p прост број. Доказати да постоји прост број q такав да број $n^p - p$ није дељив са q за сваки цео број n.

(Француска)

ИМО 2004

1. Нека је ABC оштроугли троугао, такав да је $AB \neq AC$. Кружница чији је пречник BC сече странице AB и AC у тачкама M и N, редом. Нека је O средиште странице BC. Симетрале углова $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle MON$ секу се у тачки R. Доказати да кружнице описане око троуглова BMR и CNR имају заједничку тачку која припада страници BC.

(Румунија)

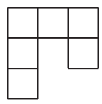
2. Одредити све полиноме $P(x)$ са реалним коефицијентима који задовољавају

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2 \cdot P(a+b+c)$$

за све реалне бројеве a, b, c за које је $ab + bc + ca = 0$.

(Јужна Кореја)

3. Нека је *кука* фигура састављена од шест јединичних квадрата, као на слици



или ма која фигура добијена од ове фигуре применом ротација и осних симетрија. Одредити све правоугаонике $m \times n$ који се могу покрити кукама тако да важи:

(а) правоугаоник је покривен без празнина и без преклапања;

(б) ни један део куке није изван правоугаоника.

(Естонија)

4. Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Нека су $t_1, t_2, \ldots, t_n$ позитивни реални бројеви такви да је

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Доказати да су t_i, t_j, t_k дужине страница троугла, за све i, j, k за које је $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

(Јужна Кореја)

5. У конвексном четвороуглу $ABCD$ дијагонала BD није симетрала нити угла $\sphericalangle ABC$ нити угла $\sphericalangle CDA$. Тачка P, која се налази унутар четвороугла $ABCD$, је таква да је

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA \quad \text{и} \quad \sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA.$$

Доказати да је $ABCD$ тетивни четвороугао ако и само ако је $AP = CP$.

(Пољска)

6. Природан број назива се *алтернирајући* ако су сваке две суседне цифре у његовом декадном запису различите парности.

Одредити све природне бројеве n за које постоји алтернирајући број дељив са n.

(Иран)

ИМО 2005

1. На страницама једнакостраничног троугла ABC изабрано је шест тачака: A_1, A_2 на BC, B_1, B_2 на CA и C_1, C_2 на AB. Ове тачке су темена конвексног шестоугла $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ чије странице имају једнаке дужине. Доказати да се праве A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 секу у једној тачки.

(Румунија)

2. Нека је $(a_n)_{n\geqslant 1}$ низ целих бројева који има бесконачно много како позитивних тако и негативних чланова. Познато је да за сваки природан број n, бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дају n различитих остатака при дељењу са n. Доказати да се сваки цео број појављује у овом низу тачно једном.

(Холандија)

3. Нека су x, y и z позитивни реални бројеви такви да је $xyz \geqslant 1$. Доказати да је

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0\,.$$

(Јужна Кореја)

4. Нека је низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \text{ за } n \geqslant 1.$$

Одредити све природне бројеве који су узајамно прости са сваким чланом овог низа.

(Пољска)

5. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао чије су странице BC и AD једнаке и нису паралелне. Нека су E и F унутрашње тачке страница BC и AD, редом, такве да је $BE = DF$. Праве AC и BD секу се у P, праве BD и EF секу се у Q, праве EF и AC секу се у R. Размотримо троуглове PQR који се добијају за све такве тачке E и F. Доказати да све описане кружнице ових троуглова имају заједничку тачку различиту од P.

(Пољска)

6. На математичком такмичењу учесницима је дато 6 задатака. Показало се да је сваки пар задатака решило више од $\frac{2}{5}$ учесника и да нико није решио свих 6 задатака. Доказати да постоје најмање два учесника таква да је сваки од њих решио тачно 5 задатака.

(Румунија)

ИМО 2006

1. Нека је S центар уписане кружнице троугла ABC. Нека је P унутрашња тачка троугла за коју важи

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Доказати да важи $AP \geqslant AS$, при чему једнакост важи ако и само ако је $P \equiv S$.

(Јужна Кореја)

2. Нека је P правилан 2006-тоугаоник. Дијагонала P се назива *добра* ако дели границу P на делове који садрже непаран број страница P. Странице P су *добре*.

Нека је P са 2003 дијагонале подељен на троуглове (тако да никоје две дијагонале немају заједничку тачку у унутрашњости P). Одредити највећи могући број једнакокраких троуглова који имају две добре стране и који се појављују у некој подели.

(Србија)

3. Одредити најмањи број M тако да

$$\left|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)\right| \leqslant M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

важи за све реалне a, b, c.

(Ирска)

4. У $\mathbb{Z}^2$ решити једначину $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.

(САД)

5. Нека је P полином степена $n > 1$ са целобројним коефицијентима и k природан број. Нека је $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, где се P примењује

k пута. Доказати да једначина $Q(x) = x$ нема више од n целобројних решења.

(Румунија)

6. Свакој страници b конвексног полигона P придружена је највећа површина троугла који је садржан у P и чија је једна страница b. Доказати да збир свих површина придружених страницама полигона P није мањи од двоструке површине полигона P.

(Србија)

ЗАДАЦИ СА БАЛКАНСКИХ МАТЕМАТИЧКИХ ОЛИМПИЈАДА

БМО 1996

1. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC. Ако је R полупречник описане, а r уписане кружнице троугла ABC, доказати да је

$$OT \leqslant \sqrt{R(R-2r)}\,.$$

(Грчка)

2. Нека је $p > 5$ прост број и $X = \{p - n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Доказати да X садржи два различита елемента x, y тако да је $x \neq 1$ и $x \mid y$.

(Албанија)

3. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао. Нека су M, N, P, Q, R средишта страница AB, BC, CD, DE, EA, редом. Ако се дужи AP, BQ, CR, DM секу у једној тачки, доказати да и дуж EN садржи ту тачку.

(Југославија)

4. Доказати да постоји подскуп A скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{1996} - 1\}$ који има следеће особине:

(а) $1 \in A$ и $2^{1996} - 1 \in A$;

(б) сваки елемент из $A \setminus \{1\}$ је збир два (не обавезно различита) елемента из A;

(в) A нема више од 2012 елемената.

(Румунија)

БМО 1997

1. Нека је O унутрашња тачка конвексног четвороугла $ABCD$, таква да је

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2 \cdot P(ABCD),$$

где $P(ABCD)$ означава површину четвороугла $ABCD$. Доказати да је $ABCD$ квадрат са центром O.

(Југославија)

2. Нека је $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ колекција подскупова скупа S који има n ($n \geqslant 2$) елемената. Ако за свака два елемента $x, y \in S$ постоји подскуп $A_i \in \mathcal{A}$, такав да A_i садржи тачно један од елемената x, y, доказати да је $n \leqslant 2^k$.

(Југославија)

3. Нека су Γ, C_1 и C_2 кружнице у равни. Кружнице C_1 и C_2 изнутра додирују кружницу Γ у тачкама B и C, редом, а саме се споља додирују у тачки D. Нека је A једна од тачака у којој заједничка унутрашња тангента кружница C_1 и C_2 сече Γ и нека су K и L друге тачке пресека правих AB и AC са кружницама C_1 и C_2, редом. Ако су M и N друге тачке пресека праве BC са кружницама C_1 и C_2, редом, доказати да се праве AD, KM и LN секу у једној тачки.

(Грчка)

4. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f\left(xf(x) + f(y)\right) = \left(f(x)\right)^2 + y.$$

(Бугарска)

БМО 1998

1. Одредити број различитих чланова низа $\left(\left[\dfrac{k^2}{1998}\right]\right)_{k=1}^{1997}$, где $[x]$ означава цео део броја x.

(Грчка)

2. Нека је $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ и нека су $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n+1}$ реални бројеви. Доказати да важи

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \ldots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} < \sqrt[n]{a_1 - a_2 + \ldots - a_{2n} + a_{2n+1}}\,.$$

(Румунија)

3. Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих тачака троугла ABC без једне унутрашње тачке (троугао садржи своју ивицу). Доказати да се $\mathcal{S}$ може представити као унија дисјунктних дужи (дуж садржи своје крајње тачке).

(Југославија)

4. Доказати да једначина $y^2 = x^5 - 4$ нема целобројних решења.

(Бугарска)

БМО 1999

1. Нека је D средиште краћег лука BC кружнице описане око оштроуглог троугла ABC. Нека су E и F тачке симетричне са D у односу на дуж BC и у односу на центар описане кружнице, редом. Нека је K средиште дужи EA.

(а) Доказати да кружница која садржи средишта ивица троугла ABC садржи K.

(б) Доказати да је права која садржи K и средиште дужи BC нормална на AF.

(Турска)

2. Нека је p непаран прост број, такав да $3 \mid p-2$. Доказати да је највише $p-1$ члан скупа $\left\{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant x, y \leqslant p-1\right\}$ дељив са p.

(Бугарска)

3. Нека су M, N и P пројекције тежишта оштроуглог троугла ABC на странице AB, BC и CA, редом. Доказати да важи

$$\frac{4}{27} < \frac{P(MNP)}{P(ABC)} \leqslant \frac{1}{4},$$

где су $P(MNP)$ и $P(ABC)$ површине троуглова MNP и ABC, редом.

(Албанија)

4. Нека је $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ низ ненегативних целих бројева, тако да је за свако $k \geqslant 0$ број чланова низа не већих од k коначан (нека је тај број y_k). Доказати да за све природне m, n важи

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \geqslant (n+1)(m+1).$$

(Румунија)

БМО 2000

1. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y.$$

(Албанија)

2. Нека је ABC разнострани оштроугли троугао и E унутрашња тачка тежишне линије AD ($D \in BC$). Нека је тачка F нормална пројекција тачке E на праву BC, M унутрашња тачка дужи EF, а N и P нормалне пројекције тачке M на праве AC и AB, редом. Доказати да праве које садрже симетрале углова PMN и PEN немају заједничких тачака.

(БЈР Македонија)

3. Наћи највећи број правоугаоника димензија $1 \times 10\sqrt{2}$ које је могуће добити од правоугаоника димензија 50×90, ако је дозвољено сечење по правама паралелним ивицама датог правоугаоника.

(Југославија)

4. Природан број r се назива *степен* ако се може приказати у облику $r = t^s$, где су t и s природни, $s, t \geqslant 2$. Доказати да за сваки природан број n постоји скуп природних бројева A, који задовољава следеће услове:

(а) A има n елемената;

(б) сви елементи скупа A су степени;

(в) за све $r_1, r_2, \dots r_k$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$ из A, број $\dfrac{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}{k}$ је степен.

(Румунија)

БМО 2001

1. Нека је n природан број. Ако су a и b природни бројеви већи од 1, тако да је $ab = 2^n - 1$, доказати да је број $ab - (a - b) - 1$ облика $k \cdot 2^{2m}$, где је k непаран природан, а m природан број.

(Кипар)

2. Доказати да је конвексни петоугао који задовољава услове:

(а) сви унутрашњи углови су подударни;

(б) дужине свих страница су рационални бројеви;

правилан.

(Молдавија)

3. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви, такви да је $a + b + c \geqslant abc$. Доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant abc\sqrt{3}$.

(Румунија)

4. Коцка димензија $3 \times 3 \times 3$ је подељена на 27 подударних јединичних ћелија у облику коцке. Једна од добијених ћелија је празна, док се у свакој од преосталих налази јединична коцка означена једним од бројева $1, 2, \dots, 26$ (сваки од ових бројева је додељен тачно једној коцки). Дозвољено је преместити јединичну коцку у суседну празну ћелију (две ћелије су суседне ако имају заједничку страну). Да ли се, помоћу коначно много дозвољених потеза, јединичне коцке могу распоредити тако да коцке означене бројевима k и $27-k$ замене места, за свако $k \in \{1, 2, \ldots, 13\}$?

(Бугарска)

БМО 2002

1. Неки парови скупа од n тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 4)$ су међусобно повезани дужима, тако да је свака тачка повезана са бар још три уочене тачке. Доказати да постоји $k \geqslant 2$ и различите тачке $X_1, X_2, \ldots, X_{2k} \in \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, тако да су тачке X_i и X_{i+1} повезане за свако i $(1 \leqslant i \leqslant 2k)$, где је $X_{2k+1} \equiv X_1$.

(Југославија)

2. Низ $(a_n)_{n \geqslant 1}$ је дефинисан са

$$a_1 = 20, a_2 = 30, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \text{ за } n \geqslant 1.$$

Одредити све природне n за које је $1 + 5a_n a_{n+1}$ потпун квадрат.

(Бугарска)

3. Кружнице C_1 и C_2 различитих полупречника се секу у тачкама A и B. Нека су заједничке тангенте ових кружница MN и ST $(M, S \in C_1, N, T \in C_2)$. Доказати да ортоцентри троуглова AMN, AST, BMN и BST чине темена правоугаоника.

(Румунија)

4. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такве да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$2n + 1 \leqslant f(f(n)) + f(n) \leqslant 2n + 2002.$$

(Румунија)

БМО 2003

1. Да ли постоји скуп B, који се састоји од 4004 природна броја, такав да за сваки његов подскуп A, који има 2003 елемента, важи да збир елемената скупа A није дељив са 2003?

(БЈР Македонија)

2. Нека је ABC троугао, такав да важи $|AB| \neq |AC|$. Нека је D тачка пресека тангенте на описану кружницу троугла ABC у тачки A и праве BC. Нека су E и F тачке на симетралама дужи AB и AC, редом, такве да су BE и CF нормалне на BC. Доказати да су тачке D, E и F колинеарне.

(Румунија)

3. Наћи све функције $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ које задовољавају следеће услове:
(а) $f(x+y)-yf(x)-xf(y)=f(x)f(y)-x-y+xy$ за све $x,y\in\mathbb{Q}$;
(б) $f(x)=2f(x+1)+2+x$ за свако $x\in\mathbb{Q}$;
(в) $f(1)+1>0$.

(Кипар)

4. Нека су m и n узајамно прости непарни природни бројеви. Правоугаоник $ABCD$, такав да је $|AB|=m$ и $|AD|=n$, подељен је на mn јединичних квадрата. Означимо са $A_1, A_2, \ldots, A_k$ узастопне пресечне тачке дијагонале AC са страницама јединичних квадрата ($A_1=A, A_k=C$). Доказати да важи

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}|A_jA_{j+1}| = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}\ .$$

(Бугарска)

БМО 2004

1. Низ реалних бројева $(a_n)_{n\geqslant 0}$ задовољава релацију

$$a_{m+n}+a_{m-n}-m+n-1=\frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$$

за све $m,n\in\mathbb{N}$, $m\geqslant n$. Ако је $a_1=3$ наћи a_{2004}.

(Кипар)

2. У скупу простих бројева решити

$$x^y-y^x=xy^2-19.$$

(Албанија)

3. Нека је O унутрашња тачка оштроуглог троугла ABC. Кружнице са центрима у средиштима страница троугла ABC, који пролазе тачку O, међусобно се секу у тачкама K, L и M, различитим од O. Доказати да је O центар уписане кружнице троугла KLM ако и само ако је O центар описане кружнице око троугла ABC.

(Румунија)

4. Раван је подељена на области коначним бројем правих, од којих никоје три не пролазе кроз исту тачку. Две области се називају *суседним* уколико је њихова заједничка граница дуж, полуправа или права. Потребно је у свакој области уписати цео број тако да важи:

(а) производ бројева из суседних области је мањи од њиховог збира;

(б) збир свих бројева са сваке стране произвољне праве једнак је нули.

Доказати да је то могуће ако и само ако нису све праве паралелне.

(Србија и Црна Гора)

БМО 2005

1. Нека је ABC оштроугли троугао чија уписана кружница додирује странице AB и AC у тачкама D и E, редом. Нека су X и Y тачке пресека симетрала углова код темена C и B са правом DE, редом, и нека је Z средиште дужи BC. Доказати да је троугао XYZ једнакостраничан ако и само ако је $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

(Грчка, Румунија)

2. Наћи све просте бројеве p за које је број $p^2 - p + 1$ куб природног броја.

(Албанија)

3. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати да важи

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}\,.$$

Када важи једнакост?

(Србија и Црна Гора)

4. Нека је $n \geqslant 2$ природан број и $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ скуп који не садржи два елемента таква да један дели други и који не садржи два елемента који су узајамно прости. Који је највећи могући број елемената скупа S?

(Молдавија)

БМО 2006

1. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви. Доказати да је

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geqslant \frac{3}{1+abc}\,.$$

(Грчка)

2. Нека права m сече странице AB и AC троугла ABC у тачкама D и F, редом, а продужетак странице BC у тачки E, тако да је C између B

и E. Праве паралелне са m кроз A, B, C секу по други пут кружницу описану око $\triangle ABC$ у тачкама A_1, B_1, C_1, редом. Доказати да се праве A_1E, B_1F и C_1D секу у једној тачки.

(Грчка)

3. Одредити све тројке (m, n, p) позитивних рационалних бројева, тако да су бројеви $m + \dfrac{1}{np}$, $n + \dfrac{1}{pm}$ и $p + \dfrac{1}{mn}$ цели.

(Румунија)

4. Нека је m природан број. Одредити све природне бројеве a, тако да је низ $(a_n)_{n \geqslant 0}$, дефинисан са $a_0 = a$ и

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{ако} \quad 2 \mid a_n \\ a_n + m, & \text{ако} \quad 2 \nmid a_n \end{cases}$$

за $n \geqslant 0$, периодичан (почевши од 0-тог члана).

(Бугарска)

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА МЕЂУНАРОДНИХ МАТЕМАТИЧКИХ ОЛИМПИЈАДА

ИМО '96.1

Нека је $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 19,\ 0 \leqslant y \leqslant 11\}$. Задатак је доћи из $(0, 0)$ у $(19, 0)$ преко тачка из $\mathcal{A}$, тако да је сваки потез облика $(x, y) \to (x + a, y + b)$, где је $a, b \in \mathbb{Z}$ и $a^2 + b^2 = r$.

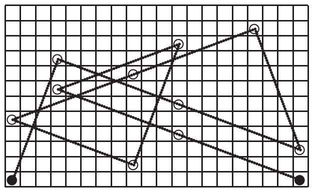
(а) Ако је r парно, $a+b$ је парно ако и само ако је парно и $a^2 + b^2 = r$, $a, b \in \mathbb{Z}$ (јер $a^2 \equiv a \pmod 2$). Зато се парност $x + y$ после потеза не мења, па се не може доћи у $(19, 0)$ из $(0, 0)$.

Ако $3 \mid r$, тада су a и b дељиви са 3, па, ако се у (x, y) може доћи из $(0, 0)$, мора бити $3 \mid x$. Пошто $3 \nmid 19$, не може се доћи у $(19, 0)$ из $(0, 0)$.

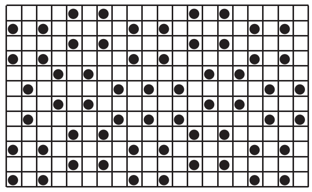
(б) Како је $r = 73 = 8^2 + 3^2$ (ово разлагање на квадрате је и јединствено), сваки потез је облика или $(x, y) \to (x \pm 8, y \pm 3)$ или $(x, y) \to (x \pm 3, y \pm 8)$. То је могуће нпр. на следећи начин $(0, 0) \to (3, 8) \to (11, 5) \to (19, 2) \to (16, 10) \to (8, 7) \to (0, 4) \to (8, 1) \to (11, 9) \to (3, 6) \to (11, 3) \to (19, 0)$ (видети слику 2).

(в) Важи $97 = 9^2 + 4^2$ (ово разлагање на квадрате је и јединствено), па су дозвољени потези облика $(x, y) \to (x \pm 9, y \pm 4)$ и $(x, y) \to (x \pm 4, y \pm 9)$. Нека је $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}, \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$, где је $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathcal{A} \mid 4 \leqslant y \leqslant 7\}$. Тада се потезима облика $(x, y) \to (x \pm 9, y \pm 4)$ прелази из $\mathcal{B}$ у $\mathcal{C}$, и обрнуто, док се потезима облика $(x, y) \to (x \pm 4, y \pm 9)$ може доћи само из $\mathcal{C}$ у $\mathcal{C}$. Како сваки потез облика $(x, y) \to (x \pm 9, y \pm 4)$ мења парност x, да би се дошло из $(0, 0)$ у $(19, 0)$ мора се извршити непаран број оваквих потеза. Са друге стране, непарним бројем оваквих потеза, кренувши из $\mathcal{C}$, мора се завршити у $\mathcal{B}$, што је контрадикција, јер тачка $(19, 0)$ није у $\mathcal{B}$. Дакле, у овом случају није могуће извршити задатак.

Напомена. Део (в) се може решити и описивањем свих поља у које се може доћи кренувши из $(0, 0)$. Та поља су приказана на слици 3.



Слика 2.



Слика 3.

ИМО '96.2

Нека су X, Y, Z подножја нормала из P на BC, CA, AB, редом. Из тетивних четвороуглива $AZPY$, $BXPZ$ и $CYPX$ следи да је $\sphericalangle XZY = \sphericalangle APB - \sphericalangle ACB$ и да је $XY = PC \cdot \sin \sphericalangle ACB$. Из прве везе следи да је $\triangle XYZ$ једнакокраки, тј. да је $XY = XZ$, а из друге да је $PB \cdot \sin \sphericalangle ABC = PC \cdot \sin \sphericalangle ACB$. Дакле, $\dfrac{AB}{PB} = \dfrac{AC}{PC}$, одакле следи да симетрале BD и CD углова $\sphericalangle ABP$ и $\sphericalangle ACP$ деле дуж AP у истом односу, тј. конкурентне су са AP.

Друго решење. Нека су X, Y, Z тачке пресека правих AP, BP, CP са осисаним кругом троугла ABC, редом. Као и у првом решењу је $XY = XZ$. Ако је $AP \cdot PX = BP \cdot PY = CP \cdot PZ = k$, из сличности $\triangle APC$ и $\triangle ZPX$ следи

$$\frac{AC}{XZ} = \frac{AP}{PZ} = \frac{AP \cdot CP}{k},$$

тј., $XZ = \dfrac{k \cdot AC \cdot BP}{AP \cdot BP \cdot CP}$. Следи да је $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{PC}{PB}$.

Треће решење. Нека је $\overline{Q}$ слика произвољне тачке Q инверзијом са центром у A и полупречником r. Дати услов постаје $\sphericalangle \overline{BCP} = \sphericalangle \overline{CBP}$, тј., $\overline{BP} = \overline{PC}$. Међутим

$$\overline{PB} = \frac{r^2}{AP \cdot AB} \cdot PB\,,$$

па важи $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{PC}{PB}$.

ИМО ’96.3

За $m = n = 0$ се добија $f(0) = 0$, одакле је $f(f(n)) = f(n)$ за све $n \in \mathbb{N}_0$, па је дата једначина еквивалентна са

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n), \qquad f(0) = 0\,.$$

Једно њено решење је $(\forall x)\ f(x) = 0$. Нека f није идентички једнака нули. Постоји фиксна тачка функције f (нпр. све тачке у слици функције f су такве). Нека је a најмања ненула фиксна тачка функције f. Индукцијом следи да су и тачке облика ka, $k \in \mathbb{N}$ фиксне тачке. Нека је $b = ka + i$ фиксна тачка, где је $0 < i < a$. Тада је

$$b = f(b) = f(ka + i) = f(i + f(ka)) = f(i) + f(ka) = f(i) + ka;\,,$$

па је $f(i) = i$. Следи $i = 0$, тј. све фиксне тачке ове функције су облика ka, $k \in \mathbb{N}$.

Како је слика функције f скуп њених фиксних тачака, следи да је $f(i) = an_i$, за $i = 0, 1, \ldots, a-1$ и неке целе $n_i \geqslant 0$ и $n_0 = 0$.

Нека је $n = ka + i$ природан број, где је $0 \leqslant i < a$. Из дате функционалне једначине следи

$$f(n) = f(ka + i) = f(i) + ka = (n_i + k)a.$$

Дакле, сем нула функције, ово су једине могућности за решења дате једначине. Заменом $m = ka + i$, $n = la + j$ се добија

$$\begin{aligned} f(m + f(n)) &= f(ka + i + f(la + j)) = f((k + l + n_j)a + i) \\ &= (k + l + n_j + n_i)a = f(m) + f(n), \end{aligned}$$

па она то и јесу.

ИМО ’96.4

Нека је $15a + 16b = x^2$ и $16a - 15b = y^2$ за $x, y \in \mathbb{N}$. Тада је

$$x^4 + y^4 = (15a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2).$$

Дакле, важи $481 = 13 \cdot 37 \mid x^4 + y^4$.

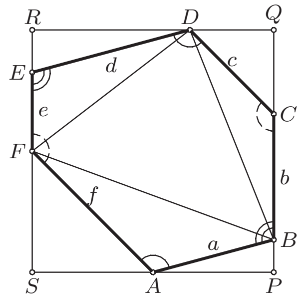
> *Лема.* Нека $p \mid x^4 + y^4$, где су $x, y \in \mathbb{Z}$ и p непаран прост број, такав да $p \not\equiv 1 \pmod 8$. Тада $p \mid x$ и $p \mid y$.
>
> *Доказ.* Пошто $p \mid x^8 - y^8$ и, по малој Фермаовој теореми, $p \mid x^{p-1} - y^{p-1}$, следи да $p \mid x^d - y^d$, где је $d = (p-1, 8)$. Међутим, $d \neq 8$, па $d \mid 4$, одакле следи да $p \mid x^4 - y^4$, тј. $p \mid 2y^4$ и $p \mid 2x^4$, односно $p \mid y$ и $p \mid x$.

Из претходне леме следи да $13 \mid x, y$ и $37 \mid x, y$, па су x и y дељиви са 481, тј. сваки од њих је не мањи од 481.

Са друге стране, могуће је да је $x = y = 481$ (за $a = 31 \cdot 481$ и $b = 481$).

ИМО '96.5

Нека су a, b, c, d, e и f дужине страница AB, BC, CD, DE, EF FA, редом.



Слика 4.

Из услова задатка следи да је $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ и $\sphericalangle C = \sphericalangle F$. Нека су PQ и RS праве кроз A и D, редом, нормалне на BC и EF, редом ($P, R \in BC$, $Q, S \in EF$). Тада је $BF \geqslant PQ = RS$, па важи $2BF \geqslant PQ + RS$, тј.

$$2BF \geqslant (a \sin B + f \sin C) + (c \sin C + d \sin B),$$

и, слично,

$$2BD \geqslant (c \sin A + b \sin B) + (e \sin B + f \sin A),$$
$$2DF \geqslant (e \sin C + d \sin A) + (a \sin A + b \sin C).$$

Из синусне теореме примењене на троуглове FAD, BCD и DEF следи:

$$R_A = \frac{BF}{2 \sin A}, \qquad R_C = \frac{BD}{2 \sin C}, \qquad R_E = \frac{DF}{2 \sin E},$$

што са предходним даје:

$$\begin{aligned} R_A + R_C + R_E &\geqslant \frac{1}{4} \cdot a \cdot \left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B} \right) + \frac{1}{4} \cdot b \cdot \left(\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin C} \right) + \dots \\ &\geqslant \frac{1}{2} \cdot (a + b + \dots) = \frac{O}{2}. \end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 120^\circ$ и $FB \perp BC$, $DB \perp DE$, $FD \perp FA$, тј. ако и само ако је шетоугао $ABCDEF$ правилан.

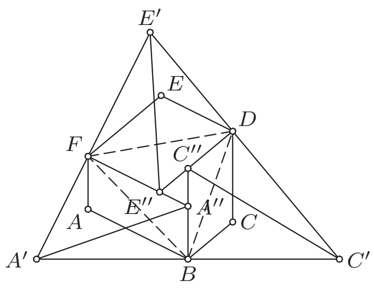
Друго решење. Нека су тачке A'', C'', E'' такве да су четвороуглови $ABA''F$, $CDC''B$ и $EFE''D$ паралелограми (видети слику 5.). Тада су тачке A'', C'', B колинеарне, а слично важи и за тројке C'', E'', B и E'', A'', F. Нека је A' пресек нормала кроз F и B на FA'' и BA'', редом, и нека су C' и E' аналогно дефинисане. Пошто је четвороугао $A'FA''B$ тетиван, са пречником $A'A''$, и како је $\triangle FA''B \cong \triangle BAF$, следи да важи $2R_A = A'A'' = x$. Слично се добија да важи $2R_C = C'C'' = y$ и $2R_E = E'E'' = z$. Ако је $AB = FA'' = y_a$, $AF = A''B = z_a$, $CD = C''B = z_c$, $CB = C''D = x_c$, $EF = E''D = x_e$ и $ED = E''F = y_e$, неједнакост коју треба показати постаје

$$x + y + z \geqslant y_a + z_a + z_c + x_c + x_e + y_e\,. \tag{1}$$

Нека је $C'E' = a$, $A'E' = c$ и $A'C' = e$, а A_1 тачка симетрична са A'' у односу на симетралу $\sphericalangle E'A'C'$. Нека су F_1 и B_1 подножја нормала из A_1 на $A'C'$ и $A'E'$, редом. Следи да је $A_1F_1 = A''F = y_a$ и $A_1B_1 = A''B = z_a$, одакле је

$$ax = A'A_1 \cdot E'C' \geqslant 2S_{A'E'A_1C'} =$$

$$2S_{A'E'A_1} + 2S_{A'C'A_1} = cz_a + ey_a \,.$$



Слика 5.

Слично се добија да је $cy \geqslant ex_c + az_c$ и $ez \geqslant ay_e + cx_e$, па је

$$\begin{aligned} x+y+z \quad &\geqslant \quad \frac{c}{a}\cdot z_a + \frac{a}{c}\cdot z_c + \frac{e}{c}\cdot x_c + \frac{c}{e}\cdot x_e + \frac{a}{e}\cdot y_e + \frac{e}{a}\cdot y_a \\ &= \quad \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{z_a+z_c}{2}\right) + \left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)\left(\frac{z_a-z_c}{2}\right) + \dots \,. \end{aligned} \tag{2}$$

Нека је $a_1 = \dfrac{x_c - x_e}{2}$, $c_1 = \dfrac{y_e - y_a}{2}$, $e_1 = \dfrac{z_a - z_c}{2}$. Пошто је $\triangle A''C''E'' \sim \triangle A'C'E'$, следи $a_1/a = c_1/c = e_1/e = k$, па је $\left(\dfrac{c}{a} - \dfrac{a}{c}\right)e_1 + \left(\dfrac{e}{c} - \dfrac{c}{e}\right)a_1 + \left(\dfrac{a}{e} - \dfrac{e}{a}\right)c_1 = k\left(\dfrac{ce}{a} - \dfrac{ae}{c} + \dfrac{ea}{c} - \dfrac{ca}{e} + \dfrac{ac}{e} - \dfrac{ec}{a}\right) = 0$.

Једначина (2) се своди на

$$\begin{aligned} x+y+z \quad \geqslant \quad &\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{z_a+z_c}{2}\right) + \left(\frac{e}{c}+\frac{c}{e}\right)\left(\frac{x_e+x_c}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{a}{e}+\frac{e}{a}\right)\left(\frac{y_a+y_e}{2}\right). \end{aligned}$$

Како је $\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c} \geqslant 2$, $\dfrac{e}{c} + \dfrac{c}{e} \geqslant 2$ и $\dfrac{a}{e} + \dfrac{e}{a} \geqslant 2$, следи $x + y + z \geqslant y_a + z_a + z_c + x_c + x_e + y_e$, тј. (1).

Једнакост важи ако и само ако је $a = c = e$ и $A'' = C'' = E'' =$ центар$(\triangle A'C'E')$, тј. ако и само ако је шестоугао $ABCDEF$ правилан.

Напомена. Друго решење прати стандардни доказ неједнакости Erdős–Mordell, тј. захтев задатка је уопштење ове неједнакости. Ако су P_a, P_b, P_c подножја нормала из тачке P унутар $\triangle ABC$ на BC, CA, AB, редом, и $P_aPP_bP_c'$, $P_bPP_cP_a'$, $P_cPP_aP_b'$ паралелограми, тврђење задатка за шестоугао $P_aP_c'P_bP_a'P_cP_b'$ даје Erdős–Mordell неједнакост за $\triangle ABC$ и тачку P.

ИМО '96.6

Без умањења општости може се претпоставити да су p и q узајамно прости (довољно је поделити све x_i и p и q са NZS(p,q) да би се проблем свео на такав).

Нека су k и l број таквих i за које је $x_{i+1} - x_i = p$, односно таквих i за које је $x_{i+1} - x_i = -q$ $(0 \leqslant i < n)$. Из $x_0 = x_n = 0$ следи $kp = lq$, па за неки природан t важи $k = qt$, $l = pt$ и $n = (p+q)t$. Како је $n > p+q$, следи $t > 1$.

Нека је $y_i = x_{i+p+q} - x_i$ за $i = 0, \ldots, n-p-q$. Сваки y_i је облика $up - vq$, где је $u + v = p + q$, па је $y_i = (u+v)p - v(p+q) = (p-v)(p+q)$ дељиво са $p+q$. Како је $y_{i+1} - y_i = (x_{i+p+q+1} - x_{i+p+q}) - (x_{i+1} - x_i) \in \{0, \pm(p+q)\}$, следи да, ако ниједан од y_i није 0, тада су сви y_i истог знака. Међутим, ово је у контрадикцији са везом $y_0 + y_{p+q} + \ldots + y_{n-p-q} = x_n - x_0 = 0$, па је неки од y_i једнак нули, одакле следи тврђење задатка.

Друго решење. Као и у претходном решењу, може се претпоставити да је $(p,q) = 1$. Нека је низ тачака $A_i(y_i, z_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ у $\mathbb{N}_0^2$ дефинисан индуктивно на следећи начин:

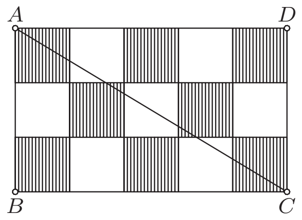
$A_0 = (0,0)$ и нека је $(y_{i+1}, z_{i+1}) = (y_i, z_i + 1)$ ако је $x_{i+1} = x_i + p$, односно $(y_{i+1}, z_{i+1}) = (y_i + 1, z_i)$ иначе.

Тачке A_i генеришу трајекторију L у $\mathbb{N}_0^2$ (изломљена линија, која се креће „горе“ или „десно“ дуж целобројне решетке, корацима дужине 1). Из услова задатка следи да је $x_i = pz_i - qy_i$ за све i и, како је $x_n = 0$, да је $(z_n, y_n) = (kq, kp)$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Пошто је $y_n + z_n = n > p+q$, следи да је $k > 1$. Како је $x_i = x_j$ ако и само ако је $A_iA_j \parallel A_0A_n$, треба показато да постоје i, j, $i < j$, $(i,j) \neq (0,n)$ за које је $A_iA_j \parallel A_0A_n$.

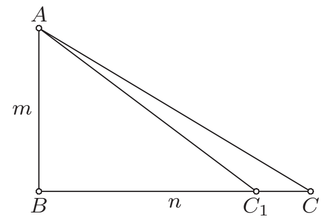
Ако L има заједничку унутрашњу тачку са A_0A_n тврђење је, тривијално, испуњено. Нека важи супротно и нека је P_{ij} правоугаоник, чије су стране паралелне координатним осама, а темена у тачкама (ip, jq) и $((i+1)p, (j+1)q)$. Нека је L_{ij} део трајекторије L, који се налази унутар P_{ij}. Без умањења општости може се претпоставити да крајње тачке L_{00} леже на вертикалним странама P_{00}. Тада постоји $d \in \{1, \ldots, k-1\}$, тако да крајње тачке L_{dd} леже на хоризонталним странама P_{dd}. Нека је L'_{dd} трајекторија која се добија транслацијом L_{dd} за вектор $-d(p,q)$. Крајње тачке L'_{dd} леже на хоризонтлалним странама P_{00}, па L_{00} и L'_{dd} имају заједничку тачку $X \neq A_0$. Тачка Y, добијена транслацијом тачке X за вектор $d(p,q)$, припада L и задовољава $XY \parallel A_0A_n$.

ИМО '97.1

(а) Нека је ABC правоугли троугао са правим углом код темена B, чија темена имају целе координате, а катете $AB = m$ и $BC = n$ леже на страницама јединичних квадрата. Нека је D тачка са целобројним координатама, таква да је четвороугао $ABCD$ правоугаоник (видети слику 6).



Слика 6.



Слика 7.

Правоугаоник $ABCD$ је централно симетричан у односу на средиште O хипотенузе AC. При томе, ако су бројеви m и n исте парности, онда су црне тачке троугла ABC симетричне у односу на тачку O са црним тачкама троугла CDA, а беле тачке првог троугла симетричне белим тачкама другог троугла. Ако су $S_1(F)$ и $S_2(F)$ површине црног и белог дела фигуре F, редом, онда, због поменуте симетрије правоугаоника $ABCD$, важи

$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2}|S_1(ABCD) - S_2(ABCD)|. \qquad (1)$$

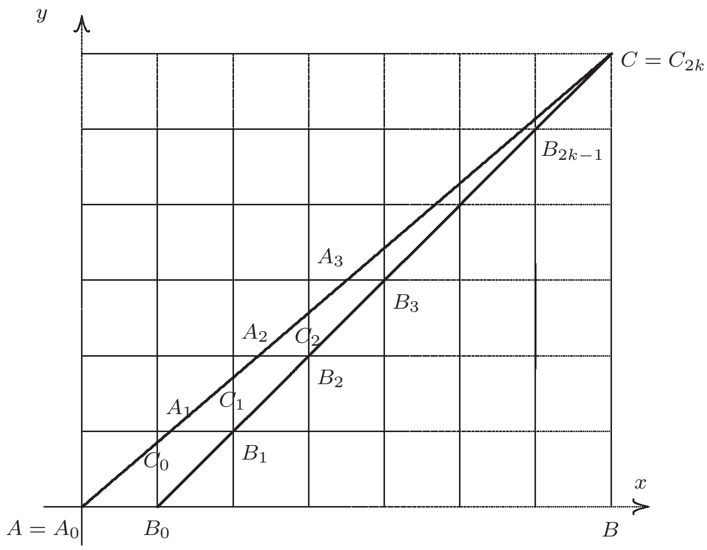
Ако су бројеви m и n оба парни, тада је у правоугаонику $ABCD$ паран број јединичних квадрата и међу њима једнак број црних и белих, па из једнакости (1) следи да је $f(m,n) = 0$. Ако су бројеви m и n оба непарни, онда се број белих и број црних јединичних квадрата у правоугаонику $ABCD$ разликују за 1, па се из једнакости (1) добија да је $f(m,n) = \dfrac{1}{2}$.

(б) Ако су бројеви m и n оба парни или оба непарни, тада је $f(m,n) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\max\{m,n\}$. Нека су m и n бројеви различите парности, на пример, m паран и n непаран бро. Нека је C_1 тачка катете BC, таква да је $BC_1 = n-1$, слика 7. Тада је $n-1$ паран број, па на основу тврђења доказаног под (а), следи да је $S_1(ABC_1) - S_2(ABC_1) = 0$. Ако је $S(AC_1C)$ површина троугла AC_1C, следи

$$\begin{aligned} f(m,n) &= |S_1(ABC) - S_2(ABC)| \\ &= |S_1(ABC_1) + S_1(AC_1C) - S_2(ABC_1) - S_2(AC_1C)| \\ &= |S_1(AC_1C) - S_2(AC_1C)| \leqslant S(AC_1C) = \frac{m}{2} \leqslant \frac{1}{2}\max\{m,n\}, \end{aligned}$$

чиме је други део тврђења задатка доказан.

(в) Одредимо $f(2k+1, 2k)$ за произвољан природан број k. Нека је ABC правоугли троугао, такав да је тачка A координатни почетак, B тачка на x-оси за коју важи $AB = 2k+1$ и C тачка на правој $x = 2k+1$ за коју важи $BC = 2k$.



Слика 8.

Нека су $A_0, A_1, \ldots, A_{2k-1}$ тачке пресека праве AC са правим $y = 0$, $y = 1, \ldots, y = 2k-1$, редом. Нека је B_0 тачка дужи AB таква да је $AB_0 = 1$ и нека су $B_0, B_1, \ldots, B_{2k-1}$ тачке пресека праве B_0C са правим $y = 0, y = 1, \ldots, y = 2k-1$, редом. Нека су $C_0, C_1, \ldots, C_{2k-1}$ тачке пресека праве AC са правим $x = 1, x = 2, \ldots, x = 2k$, редом (видети слику 8). Нека је квадрат који садржи троугао $A_0B_0C_0$ обојен црно. Тада је површина црног дела троугла A_0B_0C

$$\begin{aligned} S_1(A_0B_0C) &= S(A_0B_0C_0) + S(A_1B_1C_1) + \ldots + S(A_{2k-1}B_{2k-1}C_{2k-1}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2k}{2k+1}\left[\left(\frac{2k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2k}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{4k(2k+1)}[1^2 + 2^2 + \cdots + (2k)^2] = \frac{4k+1}{12}\,. \end{aligned}$$

Површина белог дела троугла A_0B_0C је $S_2(A_0B_0C) = k - (4k+1)/12 = (8k-1)/12$. На основу тога и резултата доказаног под (а), следи

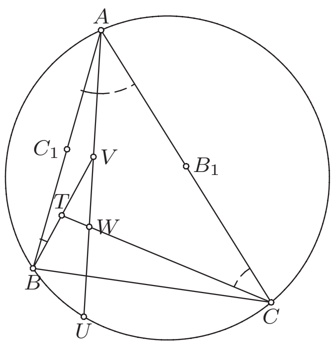
$$\begin{aligned} f(2k+1, 2k) &= |S_1(ABC) - S_2(ABC)| \\ &= |S_1(B_0BC) + S_1(AB_0C) - S_2(B_0BC) - S_2(AB_0C)| \\ &= |S_1(AB_0C) - S_2(AB_0C)| = \left|\frac{4k+1}{12} - \frac{8k-1}{12}\right| = \frac{2k-1}{6}\,. \end{aligned}$$

Према томе, вредност $f(2k+1, 2k)$ већа је од произвољне константе C ако је $k > \dfrac{6C+1}{2}$.

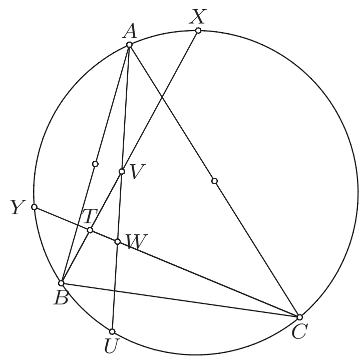
ИМО '97.2

Нека су B_1 и C_1 редом средишта страница AC и AB, $\varphi = \sphericalangle CAU$, $\vartheta = \sphericalangle BAU$. Како је B_1W симетрала дужи AC и C_1V симетрала дужи AB, следи да је $\sphericalangle ACW = \varphi$ и $\sphericalangle ABV = \vartheta$ (видети слику 9). Ако су α, β и γ углови троугла ABC код темена A, B и C, редом, тада је

$$\sphericalangle BTC = 180^\circ - (\beta - \vartheta + \gamma - \varphi) = \alpha + \varphi + \vartheta = \alpha + \alpha = 2\alpha.$$



Слика 9.



Слика 10.

Из синусне теореме, примењене на троугао BTC, добија се

$$\frac{TB}{\sin(\gamma-\varphi)} = \frac{TC}{\sin(\beta-\vartheta)} = \frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{2R\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}\,,$$

где је R полупречник описане кружнице. Из услова да је α најмањи угао троугла ABC следи да је $\cos\alpha > 0$ и да је $\beta - \vartheta > 0$ и $\gamma - \varphi > 0$. Даље је

$$\begin{aligned} TB + TC &= \frac{R}{\cos\alpha}\cdot[\sin(\beta-\vartheta)+\sin(\gamma-\varphi)] \\ &= \frac{2R\sin\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma+\varphi-\vartheta}{2}}{\cos\alpha} = 2R\cos\frac{\beta-\gamma+\varphi-\vartheta}{2}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Како су периферијски углови над истим луком једнаки, следи да је $\sphericalangle UBC = \varphi$ и $\sphericalangle UCB = \vartheta$, па је

$$\begin{aligned} AU &= 2R\sin(\beta+\varphi) = 2R\sin(\gamma+\vartheta) = R\cdot[\sin(\beta+\varphi)+\sin(\gamma+\vartheta)] \\ &= 2R\sin\frac{\beta+\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma+\varphi-\vartheta}{2} = 2R\cos\frac{\beta-\gamma+\varphi-\vartheta}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Из једнакости (1) и (2) следи да је $AU = TB + TC$.

Друго решење. Нека су X и Y редом тачке пресека правих BV и CW са описаном кружницом троугла ABC (видети слику 10). Пошто тачка

V припада симетрали дужи AB, важи $AV = BV$ и $AU = BX$, а како је угао A најмањи у троуглу ABC, тачка X припада луку AC који не садржи B. Слично, из услова да тачка W припада симетрали дужи AC, следи да је $AW = CW$ и $AU = CY$, а из услова да је A најмањи угао следи да тачка Y припада луку AB који не садржи C. При томе, важи и $BX = CY$. Одатле следи да тачка T припада заједничкој симетрали дужи BY и CX и да важе једнакости $TB = TY$ и $TC = TX$, па следи да је $AU = CY = TY + TC = TB + TC$.

Напомена. Једнакости $TB = TY$ и $TC = TX$ могу бити доказане и на следећи начин:

Као у првом решењу докаже се да је $\sphericalangle BTC = 2\alpha$, а како су углови $\sphericalangle BYC$ и $\sphericalangle BXC$ једнаки α (као периферијски углови над истим луком) и како је $\sphericalangle BTC = 2\alpha$ спољашњи угао за троугао BTY, то је $2\alpha = \sphericalangle BYT + \sphericalangle YBT = \alpha + \sphericalangle YBT$, одакле следи да је $\sphericalangle YBT = \alpha$. Према томе, троугао YBT је једнакокраки са врхом T, па следи да је $TB = TY$. Аналогно је и $TC = TX$.

ИМО '97.3

За произвољну пермутацију $\pi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ бројева $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ нека је $S(\pi) = y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n$ и нека је $d = \dfrac{n+1}{2}$. Нека је $\pi_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\pi_0^* = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$. Ако је $|S(\pi_0)| \leqslant d$ или $|S(\pi_0^*)| \leqslant d$, тврђење задатка је доказано. Иначе је $|S(\pi_0)| > d$ и $S(\pi_0^*) > d$. Како је

$$\begin{aligned} S(\pi_0) + S(\pi_0^*) &= (x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) + (x_n + 2x_{n-1} + \cdots + nx_1) \\ &= (n+1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \end{aligned}$$

и $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$, следи $|S(\pi_0) + S(\pi_0^*)| = n+1 = 2d$. Из претпоставке да су бројеви $S(\pi_0)$ и $S(\pi_0^*)$ по апсолутној вредности већи од d, следи да је један од њих већи од d, а други мањи од $-d$.

Постоји низ пермутација $\pi_0,\ \pi_1,\ \dots,\ \pi_m = \pi_0^*$, тако да се свака осим прве пермутације из тог низа добија транспозицијом два суседна члана претходне пермутације. Ако су $\pi_i = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $\pi_{i+1} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ два суседна члана тог низа, постоји $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, тако да важи $z_k = y_{k+1}$, $z_{k+1} = y_k$ и $z_j = y_j$ за све индексе $j \notin \{k, k+1\}$. Како за сваки индекс i важи $|x_i| \leqslant d$, добија се

$$\begin{aligned} |S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| &= |(z_1 + 2z_2 + \ldots + nz_n) - (y_1 + 2y_2 + \ldots + nz_n)| \\ &= |kz_k + (k+1)z_{k+1} - ky_k - (k+1)y_{k+1}| \\ &= |y_k - y_{k+1}| \leqslant |y_k| + |y_{k+1}| \leqslant 2d. \end{aligned}$$

Према томе, $S(\pi_0),\ S(\pi_1),\ \dots,\ S(\pi_m)$ је низ бројева, такав да се свака два узастопна члана тог низа разликују не више од $2d$. Како се први и последњи члан низа, тј. бројеви $S(\pi_0)$ и $S(\pi_m) = S(\pi_0^*)$ налазе са разних страна интервала $[-d, d]$, следи да за неко $i \in \{2, 3, \dots, m-1\}$ важи $S(\pi_i) \in [-d, d]$, тј. $|S(\pi_i)| \leqslant d$.

ИМО ’97.4

(а) Нека за неки природан број $n > 1$ постоји сребрна матрица A димензије $n \times n$. Унију i-те врсте и i-те колоне матрице A назовимо i-тим крстом. У сваком крсту сребрне матрице сваки елемент скупа S се појављује тачно једанпут. Пошто се на главној дијагонали матрице A налази тачно n елемената, то постоје елементи скупа $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ који се не појављују на тој дијагонали. Нека је x такав елемент. Ако се елемент x налази у пресеку i-те врсте и j-те колоне, где је $i \neq j$, онда елемент x припада i-том и j-том крсту. Како сваки крст садржи елемент x, то следи да елемент x (који се не појављује на дијагонали сребрне матрице) групише у парове крстове матрице A. Број тих крстова једнак је n, па следи да је n паран број. Како је 1997 непаран број, то за $n = 1997$ не постоји сребрна матрица.

(б) За сваки број $n = 2^k$, где је k природан број, постоји сребрна матрица димензије $n \times n$. За $n = 2 = 2^1$ пример сребрне матрице је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Довољно је још доказати да ако постоји сребрна матрица A димензије $n \times n$, онда постоји и сребрна матрица D димензије $2n \times 2n$. Нека је A сребрна матрица димензије $n \times n$ и нека је

$$D = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Постоје различити избори матрица B и C, тако да је D сребрна матрица димензије $2n \times 2n$. На пример, ако је прва врста матрице B једнака $(2n, 2n+1, \ldots, 3n-1)$, а следеће врсте су цикличне пермутације прве врсте. То значи, друга врста матрице B је $(3n-1, 2n, 2n+1, \ldots, 3n-2)$, трећа врста је $(3n-2, 3n-1, 2n, \ldots, 3n-3)$ итд.. Слично, прва врста матрице C једнака је $(3n, 3n+1, \ldots, 4n-1)$, а остале врсте матрице C су цикличне пермутације њене прве врсте. Тада је и свака колона матрице B пермутација елемената $2n$, $2n+1$, …, $3n-1$, а свака колона матрице C пермутација елемената $3n$, $3n+1$, …, $4n-1$. Лако се проверава да је овако добијена матрица D сребрна матрица димензије $2n \times 2n$. Заиста, ако је $1 \leqslant i \leqslant n$, онда i-ти крст матрице D садржи i-ти крст матрице A из горњег левог угла матрице D, i-ту врсту матрице B и i-ту колону матрице C. Одатле следи да i-ти крст матрице D садржи све елементе скупа $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, затим све елементе скупа $\{2n, 2n+1, \ldots, 3n-1\}$ и на крају све елементе скупа $\{3n, 3n+1, \ldots, 4n-1\}$. Ако је $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$, онда i-ти крст матрице D садржи $(i-n)$-ти крст матрице A из доњег десног угла матрице D, $(i-n)$-ту колону матрице B и $(i-n)$-ту врсту матрице C. Дакле, и у овом случају i-ти крст матрице D садржи све елементе скупа $\{1, 2, \ldots, 4n-1\}$.

Друга могућност је да се матрица D опет потражи у облику (1). Ако матрица A има све јединице на главној дијагонали, тада и матрица D има све јединице на главној дијагонали. Матрице B и C могу добити на следећи начин:

Матрица B добија се из матрице A тако што се сваки елемент матрице A повећа за $2n$, а матрица C се добија из матрице B тако што се сви бројеви на њеној главној дијагонали замене са $2n$. Лако се проверава да је и овако добијена матрица D сребрна.

ИМО ’97.5

Нека је пар (a, b) решење дате једначине у скупу природних бројева и нека је d највећи заједнички делилац бројева a и b. Тада је $a = dx$, $b = dy$, где су x и y узајамно прости природни бројеви, па дата једначина добија следећи еквивалентан облик

$$(dx)^{dy^2} = (dy)^x. \tag{1}$$

У зависности од вредности експонената dy^2 и x постоје следећи случајеви:

1. Нека је $dy^2 = x$. Тада се из једначине (1) добија да је $x = y$, а како су x и y узајамно прости бројеви, следи да је $x = y = 1$. Из једнакости $dy^2 = x$ следи $d = 1$, па је $a = b = 1$. Провером се добија да је пар $(a, b) = (1, 1)$ решење дате једначине.

2. Нека је $dy^2 > x$. Једначина (1) се може записати у облику

$$d^{dy^2-x} \cdot x^{dy^2} = y^x. \tag{2}$$

   Из (2) следи да се x^{dy^2} садржи у y^x, а како су x и y узајамно прости бројеви, следи да је $x = 1$ и једначина (2) добија еквивалентан облик

$$d^{dy^2-1} = y. \tag{3}$$

   Ако је $d = 1$, онда из (3) следи да је $y = 1$ и $dy^2 = 1$, што је у контрадикцији са претпоставком $dy^2 > x$. За $d \geqslant 2$ једначина (3) нема решења, јер за $d \geqslant 2$ и за сваки природан број y важи $d^{dy^2-1} \geqslant 2^{dy^2-1} \geqslant 2^{2y-1} > y$. Прве две од тих неједнакости су очигледне, а неједнакост $2^{2y-1} > y$ се лако доказује индукцијом. Према томе, у случају 2 дата једначина нема решења.

3. Нека је $dy^2 < x$. Тада је $x > d$, а једначина (1) се може записати у облику

$$x^{dy^2} = d^{x-dy^2} \cdot y^x. \tag{4}$$

Из (4) следи да је y^x делилац броја x^{dy^2}, а како су x и y узајамно прости бројеви, то следи да је $y = 1$, па једначина (4) добија облик

$$x^d = d^{x-d}. \tag{5}$$

Како је $x > d$, то из једнакости (5) следи да је $d < x - d$. Из једнакости (5) такође следи да бројеви x и d имају исте просте делиоце. Нека је p прост делилац бројева x и d и нека су r и s највећи експоненти за које важи $p^r \mid x$ и $p^s \mid d$. Тада из једнакости (5) следи $rd = s(x - d)$, а како је $d < x - d$, то следи да је $r > s$. Зато је број x дељив са d, тј. $x = kd$ за неки цео број k. Једначина (5) добија облик

$$k = d^{k-2}. \tag{6}$$

Пошто је $d < x - d$, то је $x > 2d$, па следи да је $k \geqslant 3$. Сада се из (6) добија да је $d \geqslant 2$. Дискусијом по k из једначине (6) се добија:

- Ако је $k = 3$, онда је $d = 3$, одакле следи $x = 9$, $a = 27$, $b = 3$. Лако се проверава да је пар $(a, b) = (27, 3)$ решење дате једначине.
- Ако је $k = 4$, онда је $d^2 = 4$, тј. $d = 2$, одакле следи $x = 8$, $a = 16$, $b = 2$. Провером се добија да је пар $(a, b) = (16, 2)$ решење дате једначине.
- Ако је $k \geqslant 5$, онда једначина нема решења јер је $d^{k-2} \geqslant 2^{k-2} > k$, при чему се последња неједнакост лако доказује индукцијом.

Дакле, дата једначина има три решења. То су $(1, 1)$, $(27, 3)$ и $(16, 2)$.

Друго решење. Нека природни бројеви a и b задовољавају дату једначину. Тада a и b имају исте просте факторе. Нека је

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n},$$

где су p_1, p_2, ..., p_n прости бројеви, а α_1, α_2, ..., α_n, β_1, β_2, ..., β_n природни бројеви. Тада за свако $i = 1, 2, \ldots, n$ важи $\alpha_i b^2 = \beta_i a$, тј.

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{a}{b^2} = r \quad \text{за неки рационалан број } r.$$

Следи $a = b^r$, па се заменом у дату једначину добија да је $(b^r)^{b^2} = b^{b^r}$, одакле следи $rb^2 = b^r$, тј.

$$r = b^{r-2}. \tag{7}$$

Пошто је рационалан број r једнак рационалном степену природног броја, то следи да је r природан број. Следи:

- Ако је $r = 1$, онда је $b = 1$ и $a = 1$, што јесте решење.
- Ако је $r = 2$, онда се из (7) лако добија да у овом случају нема решења.
- Ако је $r = 3$, онда из (7) следи да је $b = 3$, па је $a = 3^3 = 27$.
- Ако је $r = 4$, онда је $b^2 = 4$, тј. $b = 2$ и $a = b^4 = 16$.
- Ако је $r \geqslant 5$, онда се индукцијом лако доказује да важи неједнакост $r < 2^{r-2}$, па из (7) следи да у овом случају нема решења.

ИМО '97.6

Нека је разбијање природног броја представљање тог броја у облику збира сабирака који су степени двојке. Свако разбијање броја $2k + 1$, садржи бар један сабирак облика $1 = 2^0$. Ако се изостави такав сабирак, добија се разбијање броја $2k$. Важи и обрнуто: ако се произвољном разбијању броја $2k$ дода сабирак $1 = 2^0$, добија се разбијање броја $2k+1$. Према томе, међу разбијањима броја $2k+1$ и броја $2k$ постоји бијекција, тј. за сваки природан број k важи једнакост

$$f(2k+1) = f(2k). \tag{1}$$

Сва разбијања парног броја $2k$ се могу поделити у две дисјунктне класе S_1 и S_2. Класа S_1 садржи разбијања у којима има сабирака једнаких $1 = 2^0$, а класа S_2 садржи разбијања која немају таквих сабирака. Између класе S_1 и разбијања броја $2k-1$ постоји бијекција (ако се у произвољном разбијању прве класе изостави једна јединица, добија се разбијање броја $2k - 1$; ако се произвољном разбијању броја $2k - 1$ дода јединица, добија се разбијање броја $2k$ у коме има сабирака једнаких 1). Слично, између класе S_2 и разбијања броја k постоји бијекција (ако се сваки сабирак произвољног разбијања класе S_2 преполови, добија се разбијање броја k; ако се сваки сабирак произвољног разбијања броја k удвостручи, добија се разбијање из класе S_2). На основу тога добија се следећу рекурентну везу:

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k). \tag{2}$$

Ако се додефинише $f(0) = 1$, онда формуле (1) и (2) важе за сваки цео број $k \geqslant 0$. Из формула (1) и (2) се добија да је $f(0) = f(1) < f(2) = f(3) < f(4) = f(5) < f(6) = \ldots$, тј. низ $f(n)$ је растући. Даље, из тих формула следи да за $k = 1, 2, 3, \ldots$ важи

$$f(2k) - f(2k-2) = f(k). \tag{3}$$

Ако се за произвољан природан број n саберу једнакости које се добијају из (3) за $k = 1, 2, \ldots, n$, добија се и следећа рекурентна веза:

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n). \tag{4}$$

Како је $f(0) = f(1) = 1$, а низ $(f(n))$ је растући, то за $n \geqslant 2$ из (4) следи

$$\begin{aligned} f(2n) &= 2 + (f(2) + f(3) + \ldots + f(n)) \leqslant 2 + (n-1)f(n) \\ &\leqslant f(n) + (n-1)f(n) = nf(n). \end{aligned} \tag{5}$$

Користећи (5), добија се:

$$\begin{aligned} f(2^n) &\leqslant 2^{n-1} f(2^{n-1}) \leqslant 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} f(2^{n-2}) \leqslant 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{n-3} f(2^{n-3}) \\ &\leqslant \ldots \leqslant 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \ldots 2^1 \cdot f(2) = 2 \cdot 2^{n(n-1)/2}. \end{aligned}$$

Лако се проверава да за $n \geqslant 3$ важи неједнакост $2 \cdot 2^{n(n-1)/2} < 2^{n^2/2}$ и тиме је доказана десна неједнакост из тврђења задатка.

За целе бројеве a и b који су или оба парни или оба непарни и такве да је $b \geqslant a \geqslant 0$, вази неједнакост:

$$f(b+1) - f(b) \geqslant f(a+1) - f(a). \tag{6}$$

Заиста, ко су a и b парни бројеви, онда на основу једнакости (1) следи да је $f(b+1) - f(b) = f(a+1) - f(a) = 0$. Ако је $b = 2b_1 - 1$ и $a = 2a_1 - 1$, где су a_1 и b_1 природни бројеви за које важи $b_1 \geqslant a_1$, онда користећи једнакост (2) и монотоност низа $f(n)$ следи да је

$$\begin{aligned} f(b+1) - f(b) &= f(2b_1) - f(2b_1 - 1) = f(b_1) \geqslant f(a_1) \\ &= f(2a_1) - f(2a_1 - 1) = f(a+1) - f(a). \end{aligned}$$

Нека је r паран, а k природан број, тако да важи $r \geqslant k \geqslant 1$. Ако се у неједнакости (6) замени $a = r - j$, $b = r + j$, редом за $j = 0, 1, \ldots, k-1$, и саберу добијене неједнакости, следи да је

$$f(r+k) - f(r) \geqslant f(r+1) - f(r-k+1). \tag{7}$$

Пошто је r паран број, то је $f(r+1) = f(r)$, па се из (7) добија:

$$f(r+k) + f(r-k+1) \geqslant 2f(r) \quad \text{за} \ \ k = 1, 2, \ldots, r. \tag{8}$$

Сабирањем неједнакости (8) и коришћењем једнакости (3) следи

$$2rf(r) \leqslant f(1) + f(2) + \ldots + f(2r) = f(4r) - 1,$$

одакле даље следи да за сваки паран број $r \geqslant 2$ важи $f(4r) > 2rf(r)$. Заменом $r = 2^{m-2}$ добија се неједнакост

$$f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2}). \tag{9}$$

Број $r = 2^{m-2}$ је паран ако је $m > 2$, а неједнакост (9) важи и за $m = 2$. Коначно, ако је n природан број већи од 1 и l природан број такав да важи $2l \leqslant n$, онда заменом у неједнакости (9), редом $m = n, n-1, \ldots, n-2l+2$, се добија следећи низ неједнакости

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1} f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} f(2^{n-4}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot 2^{n-5} f(2^{n-6}) \\ &> \cdots > 2^{(n-1)+(n-3)+\cdots+(n-2l+1)} f(2^{n-2l}) = 2^{l(n-l)} f(2^{n-2l}). \end{aligned} \tag{10}$$

Ако је n паран број, онда за $l = \frac{n}{2}$, из (10) се добија

$$f(2^n) > 2^{n^2/4} \cdot f(2^0) = 2^{n^2/4},$$

а ако је n непаран број, онда за $l = (n-1)/2$ из (10) се добија

$$f(2^n) > 2^{(n^2-1)/4} \cdot f(2^1) = 2^{(n^2-1)/4} \cdot 2 > 2^{n^2/4}.$$

Друго решење. Пре свега, број $f(2^n)$ представља број решења једначине

$$x_0 + 2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + 2^nx_n = 2^n, \tag{1}$$

у скупу ненегативних целих бројева, а такође и број решења неједначине

$$2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + 2^nx_n \leqslant 2^n, \tag{2}$$

у скупу ненегативних целих бројева. Даље, за свако $i = 1, 2, \ldots, n$, постоји тачно једно решење неједначине (2) за које важи $2^ix_i = 2^n$. У осталим решењима за свако $i = 1, 2, \ldots, n$ важи $2^ix_i < 2^n$. Неједнакост $2^ix_i < 2^n$ важи за $x_i \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-i} - 1\}$, тј. за 2^{n-i} ненегативних целих вредности променљиве x_i. Према томе,

$$f(2^n) \leqslant n + \prod_{i=1}^{n} 2^{n-i} = n + 2^{n(n-1)/2} < 2^{n^2/2} \quad \text{за } n \geqslant 3.$$

Последња неједнакост се лако доказује индукцијом. Тиме је доказана горња оцена за број $f(2^n)$. У циљу добијања доње оцене броја $f(2^n)$ размотримо скуп

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid x_1 \geqslant 0, \ldots x_n \geqslant 0,\, a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqslant k\}.$$

где су a_1, …, a_n, k ненегативни *реални* бројеви. За сваку тачку $t = (t_1, \ldots, t_n) \in A$, где су t_1, …, t_n ненегативни *цели* бројеви, размотримо n-димензиону коцку $t + [0, 1]^n$. Унија таквих коцки (по свим целим тачкама из A) садржи скуп A и има запремину једнаку броју целих тачака у A (ако $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, онда $x \in t + [0, 1]^n$, где је $t = ([x_1], \ldots, [x_n]) \in A$). Према томе, број целих тачака у A није мањи од запремине скупа A. Применом добијеног закључак на неједначину

$$2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + 2^{n-1}x_{n-1} \leqslant 2^n.$$

(занемарује се случај $x_n = 1$, јер он даје само једно решење), добијамо се да је

$$f(2^n) \geqslant \frac{1}{(n-1)!} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{2^n}{2^i} = \frac{1}{(n-1)!} 2^{(n^2-n)/2} > 2^{n^2/4} \quad \text{за } n \geqslant 9.$$

Ради боље процене, из случај $x_{n-1} = x_n = 0$ и неједначине $2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + 2^{n-2}x_{n-2} \leqslant 2^n$, добија се да је

$$f(2^n) > \frac{1}{(n-2)!}\prod_{i=1}^{n-2}\frac{2^n}{2^i} = \frac{1}{(n-2)!}2^{(n^2-n)/2-1} \geqslant 2^{n^2/4} \quad \text{за } n \geqslant 4.$$

Последња неједнакост се лако доказује индукцијом. За $n = 3$ важи $f(2^3) = 10 > 2^{9/4}$, па је тиме завршен доказ доњег ограничења броја $f(2^n)$.

Напомена. Користећи доказану неједнакост $f(2^n) \geqslant \dfrac{2^{(n^2-n)/2}}{(n-1)!}$ и очигледну неједнакост $(n-1)! < n^n$, добија се да је

$$f(2^n) > 2^{(n^2-n)/2-n\log_2 n}.$$

И поред чињенице да је доња процена тежа, она је доста слабија од горње процене (на пример, важи да $f(2^n)$ (за велике n) премашује 2^{cn^2}, за свако $c < \dfrac{1}{2}$).

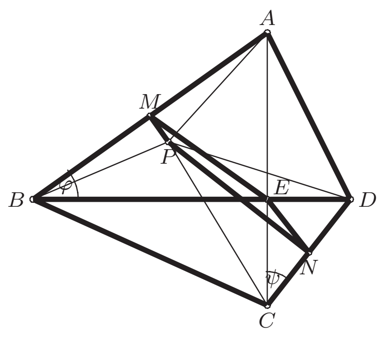
ИМО '98.1

(a) Нека је четвороугао $ABCD$ тетиван. Тада је $PA = PB = PC = PD$. На основу својства периферијских и централних углова добија се

$$\sphericalangle APB = 2\sphericalangle ACB = 2\left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle CBD\right) = \pi - \sphericalangle CPD. \tag{1}$$

Ако је $P(XYZ)$ површина троугла XYZ, онда се из (1) добија:

$$\begin{aligned} P(ABP) &= \frac{1}{2}\cdot PA\cdot PB\sin\sphericalangle APB = \frac{1}{2}\cdot PC\cdot PD\sin(\pi - \sphericalangle CPD)\\ &= \frac{1}{2}\cdot PC\cdot PD\sin\sphericalangle CPD = P(CDP). \end{aligned}$$



Слика 11.

(б) Нека је $P(ABP) = P(CDP)$ и нека је E пресек дијагонала AC и BD, слика 11. Не умањујући општост може се претпоставити да тачка P припада троуглу ABC, тј. једном од троуглова ABE или BCE. Нека су $\varphi = \sphericalangle ABD$, $\psi = \sphericalangle ACD$ и нека су M и N редом средишта страница AB и CD. Тада је $PM \perp AB$ и $PN \perp CD$. Тачке M, N и P нису колинеарне (у противном би се симетрале страница AB и CD поклапале). Из правоуглог троугла ABE се добија $\sphericalangle BEM = \varphi$, $\sphericalangle AME = 2\varphi$, па следи $\sphericalangle EMP = 90^\circ - 2\varphi$. Аналогно, из правоуглог троугла CDE се добија $\sphericalangle CEN = \psi$, $\sphericalangle DNE = 2\psi$, одакле следи $\sphericalangle ENP = 90^\circ - 2\psi$. Важи и $\sphericalangle MEN = 90^\circ + \varphi + \psi$, па следи

$$\sphericalangle NPM = 360^\circ - (\sphericalangle EMP + \sphericalangle MEN + \sphericalangle ENP) = 90^\circ + \varphi + \psi = \sphericalangle MEN. \quad (2)$$

Пошто је $AB = 2EM$ и $CD = 2EN$, из $P(ABP) = P(CDP)$ следи да је $EM \cdot PM = EN \cdot PN$, тј.

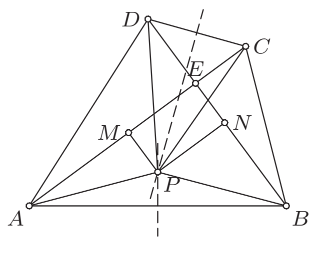
$$\frac{EM}{EN} = \frac{PN}{PM}\,. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следи да је $\triangle EMN \sim \triangle PNM$, одакле је $\sphericalangle EMN = \sphericalangle PNM$ и $\sphericalangle ENM = \sphericalangle PMN$. На основу тога следи да је четвороугао $EMPN$ паралелограм и да је $\sphericalangle EMP = \sphericalangle ENP$. Према томе, $90^\circ - 2\varphi = 90^\circ - 2\psi$, тј. $\varphi = \psi$, односно четвороугао $ABCD$ је тетиван.

Друго решење. Нека P припада $\triangle AEB$, где је E пресек AC и BD (други случај се ради аналогно). Нека су M и N подножја нормала из P на AC и BD, редом. Тада је $P(ABP) = P(ABE) - P(AEP) - P(BEP) = \frac{1}{2} \cdot (AE \cdot BE - AE \cdot EN - BE \cdot EM) = \frac{1}{2} \cdot (AM \cdot BN - EM \cdot EN)$. Слично се добија и $P(CDP) = \frac{1}{2} \cdot (CM \cdot DN - EM \cdot EN)$. Следи да је

$$P(ABP) - P(CDP) = \frac{AM \cdot BN - CM \cdot DN}{2}\,. \quad (1)$$

Нека је $ABCD$ тетиван. Тада је P центар описаног круга четвороугла $ABCD$, па су M и N седишта дужи AC и BD, редом. Следи $AM = CM$ и $BN = DN$, па из (1) следи $P(ABP) = P(CDP)$.



Слика 12.

Са друге стране, ако четвороугао $ABCD$ није тетиван и $PA = PB > PC = PD$ (ово се може претпоставити без губљења општости), тада је $AM > CM$ и $BN > DN$, па по (1) следи $P(ABP) > P(CDP)$, одакле следи и други смер тврђења из задатка.

ИМО '98.2

Како је број парова судија једнак $\binom{b}{2}$ и како је сваки пар судија исто оценио највише k такмичара, то је укупан број парова подударних оцена највише $k\cdot\binom{b}{2}$. Нека је x_i број судија који су позитивно оценили i-тог такмичара, а y_i број судија који су i-тог такмичара оценили негативно, где је $1 \leqslant i \leqslant a$. Тада за свако i важи $x_i+y_i=b$. Број парова судија који су на исти начин оценили i-тог такмичара је

$$\begin{aligned}\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2} &= \frac{1}{2}\cdot(x_i^2+y_i^2-x_i-y_i) \geqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}(x_i+y_i)^2-b\right)\\ &= \frac{1}{4}\cdot(b^2-2b)=\frac{1}{4}\cdot\big((b-1)^2-1\big).\end{aligned}$$

Пошто је $b \geqslant 3$ непаран број, важи и $\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2} \geqslant \frac{1}{4}\cdot(b-1)^2$. Како је број свих парова подударних оцена једнак $\sum_{i=1}^{a}\left(\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}\right)$, следи

$$k\binom{b}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{a}\left(\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}\right) \geqslant \frac{a(b-1)^2}{4},$$

одакле лако следи $\dfrac{k}{a} \geqslant \dfrac{b-1}{2b}$, што је тврђење задатка.

Напомена. Добијена једнакост прецизна (тј. достиже се једнакост). Заиста, ако је $a=\binom{2r+1}{r}$ и сваки такмичар је оцењен позитивно код различитих r судија ($b=2r+1$), лако се види да се може добити једнакост. Корекцијом горњег доказа, може се показати да добијени резултат није тачан за парно b, но може се добити слабија процена $\dfrac{k}{a} \geqslant \dfrac{b-2}{2b-2}$.

ИМО '98.3

За узајамно просте природне бројеве a и b важи $d(ab)=d(a)d(b)$. Нека је $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_t^{k_t}$, где су $p_1, p_2, \ldots, p_t$ међусобно различити прости бројеви, а $k_1, k_2, \ldots, k_t$ природни бројеви. Тада важи $d(n)=(k_1+1)(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_t+1)$, $d(n^2)=(2k_1+1)(2k_2+1)\cdot\ldots\cdot(2k_t+1)$ и

$$\frac{d(n^2)}{d(n)}=\frac{2k_1+1}{k_1+1}\cdot\frac{2k_2+1}{k_2+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2k_t+1}{k_t+1}.$$

Како је $d(n^2)$ непаран број, следи да је и $\dfrac{d(n^2)}{d(n)}$ такође непаран. Сваки непаран природан број m може представити у облику

$$m=\frac{2k_1+1}{k_1+1}\cdot\frac{2k_2+1}{k_2+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2k_t+1}{k_t+1},$$

за неке природне бројеве t, k_1, k_2, ..., k_t, доказ индукцијом по непарним природним бројевима m.

За $m = 1$ тврђење важи, јер је $\dfrac{d(1^2)}{d(1)} = 1$.

Нека тврђење важи за све непарне бројеве мање од неког непарног броја m. Тада је $m + 1 = 2^r m_0$, где је m_0 непаран број мањи од m. На основу индуктивне претпоставке следи да постоји природан број n_0 такав да важи $\dfrac{d(n_0^2)}{d(n_0)} = m_0$. Нека је

$$x_0 = (2^r - 1)m_0 - 1, \quad x_i = 2^i x_0 \ \text{ за } \ i = 1, 2, \ldots, r.$$

За $i = 0, 1, \ldots, r-1$ важи $2x_i = x_{i+1}$. Нека су p_0, p_1, ..., p_{r-1} различити прости бројеви и узајамно прости са n_0 и нека је $n = p_0^{x_0} p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_{r-1}^{x_{r-1}} \cdot n_0$. Тада је

$$\begin{aligned} \frac{d(n^2)}{d(n)} &= \frac{2x_0+1}{x_0+1} \cdot \frac{2x_1+1}{x_1+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2x_{r-1}+1}{x_{r-1}+1} \cdot \frac{d(n_0^2)}{d(n_0)} \\ &= \frac{x_1+1}{x_0+1} \cdot \frac{x_2+1}{x_1+1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_r+1}{x_{r-1}+1} \cdot m_0 \\ &= \frac{x_r+1}{x_0+1} \cdot m_0. \end{aligned}$$

Такође је

$$\frac{x_r+1}{x_0+1} m_0 = \frac{x_r+1}{(2^r-1)m_0} m_0 = \frac{2^r x_0 + 1}{2^r - 1} = \frac{2^r(x_0+1)}{2^r-1} - 1 = 2^r m_0 - 1 = m.$$

Према томе, важи $\dfrac{d(n^2)}{d(n)} = m$, а тиме је доказ завршен.

ИМО '98.4

Нека су a и b природни бројеви, такви да је број $a^2b + a + b$ дељив са $ab^2 + b + 7$. Тада је и број

$$b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a,$$

такође дељив са $ab^2 + b + 7$. Постоје следећи случаји:

(а) Нека је $b^2 - 7a \geqslant 0$. Како је $a \geqslant 1$, то је $b^2 - 7a < ab^2 + b + 7$, па следи да у овом случају вази $b^2 - 7a = 0$. Дакле број b је дељив са 7, тј. $b = 7k$, за неки природан број k. Даље, из услова $b^2 = 7a$, добија се да је $a = 7k^2$. Провером се добија да за $(a, b) = (7k^2, 7k)$, где је k природан број, важи: број $a^2b + a + b = 7k(49k^4 + k + 1)$ дељив је са $ab^2 + b + 7 = 7(49k^4 + k + 1)$.

(б) Нека је $b^2 - 7a < 0$. Тада је $7a - b^2$ мањи од $7a$ и дељив са $ab^2 + b + 7$. Ако је $b \geqslant 3$, тада је $ab^2 + b + 7 > 9a$, па мора бити $b = 1$ или $b = 2$.

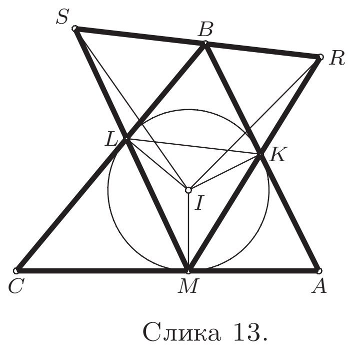
- За $b = 1$ добија се да је број $7a - 1$ дељив са $a + 8$. Како је $7a - 1 = 7(a + 8) - 57$ и важи $57 = 1 \cdot 57 = 3 \cdot 19$, то за a у обзир долазе вредности $a = 11$ и $a = 49$. За $(a, b) = (11, 1)$ провером следи да је број $a^2b + a + b = 133 = 7 \cdot 19$ дељив са $ab^2 + b + 7 = 19$. За $(a, b) = (49, 1)$ провером се добија да је број $a^2b + a + b = 2451 = 43 \cdot 57$ дељив са $ab^2 + b + 7 = 57$.
- За $b = 2$ добија се да је број $7a - 4$ дељив са $4a + 9$. Како је $4(7a - 4) = 7(4a + 9) - 79$, а број 79 нема делиоце облика $4a + 9$, јер је прост, $4 \cdot 17 + 9 = 77$ и $4 \cdot 18 + 9 = 81$, следи да у овом случају нема решења.

Према томе, сви парови природних бројева (a, b) за које важи услов задатка су: (11,1), (49,1) и $(7k^2, 7k)$, где је k произвољан природан број.

ИМО '98.5

Нека су $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Из чињеницу да су праве KL и RS паралелне, из троугла BKR добијају се следеће једнакости:

$$\sphericalangle BKR = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle KBR = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}, \quad \sphericalangle BRK = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$



Слика 13.

Користећи синусну теорему из троугла BKR добија се (видети слику 13):

$$BR = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)} \cdot BK = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \cdot BK. \tag{1}$$

Слично, из троугла BLS се добија да је:

$$\sphericalangle BLS = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}, \quad \sphericalangle BSL = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle LBS = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2},$$

$$BS = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot BL = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot BK. \tag{2}$$

Важи и $BI \perp RS$ и $IK \perp AB$. Користећи те чињенице, Питагорину теорему, косинусну теорему и једнакости (1) и (2) добија се

$$\begin{aligned} 2IR \cdot IS \cos\sphericalangle RIS &= IR^2 + IS^2 - RS^2 \\ &= (BI^2 + BR^2) + (BI^2 + BS^2) - (BR + BS)^2 \\ &= 2(BI^2 - BR \cdot BS) = 2(BI^2 - BK^2) \\ &= 2IK^2 > 0, \end{aligned}$$

одакле следи да је угао $\sphericalangle RIS$ оштар.

Друго решење. Нека су E и F средишта дужи KM и LM, редом. Тада су четвороуглови $RBIE$ и $SBIF$ тетивни, описани над IR и IS, редом. Следи да је $\sphericalangle RIS = \sphericalangle RMS + \sphericalangle IRM + \sphericalangle ISM = 90^\circ - \beta/2 + \sphericalangle IBE + \sphericalangle IBF = 90^\circ - \beta/2 + \sphericalangle EBF$.

Како су BE и BF тежишне дужи троуглова BKM и BLM, редом, и како је $BM > BK$ и $BM > BL$, следи да је $\sphericalangle MBE < \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle MBK$ и $\sphericalangle MBF < \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle MBL$. Сабирањем последње две везе, добија се $\sphericalangle EBF < \frac{\beta}{2}$, одакле је $\sphericalangle RIS < 90^\circ$.

Напомена. Може се показати (на пример, помоћу вектора) да је тврђење тачно и за произвољну праву која пролази кроз B.

ИМО '98.6

Нека је S скуп свих функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таквих да је

$$f(n^2 f(m)) = m(f(n))^2 \quad \text{за све } m, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Нека је $f \in S$ и $a = f(1)$. Ако се у (1) замени $n = 1$, добија се да је

$$f(f(m)) = a^2 m, \quad \text{за све } m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

За $m = 1$ из (1) се добија и:

$$f(an^2) = (f(n))^2 \quad \text{за све } n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) добија се

$$\begin{aligned} (f(m)f(n))^2 &= (f(m))^2(f(n))^2 = (f(m))^2 f(an^2) = f(m^2 f(f(an^2))) \\ &= f(m^2 a^2 an^2) = f(a(amn)^2) = (f(amn))^2, \end{aligned}$$

одакле следи да је $f(amn) = f(m)f(n)$ за све $m, n \in \mathbb{N}$. За $n = 1$ важи

$$f(am) = af(m) \quad \text{за све } m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Ако се у (4) уместо m замени mn и искористи једнакост $f(amn) = f(m)f(n)$, добија се

$$af(mn) = f(m)f(n) \quad \text{за све } m, n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Услов (1) је, уз ознаку $f(1) = a$, еквивалентан са конјункцијом услова (2) и (5). За то је довољно још доказати да из (2) и (5) следи (1). Заиста, претпостављајући да важи (2) и (5), следи да за произвољне $m, n \in \mathbb{N}$ важи

$$f(n^2 f(m)) = \frac{f(n^2)f(f(m))}{a} = \frac{f(n)f(n)f(f(m))}{a^2} = \frac{(f(n))^2 \cdot a^2 m}{a^2} = m(f(n))^2.$$

За дати прост број p нека су p^α и p^β највећи степени броја p који деле бројеве a и $f(n)$, редом. Користећи (5) математичком индукцијом се лако доказује да за сваки природан број k важи $(f(n))^k = a^{k-1} f(n^k)$. Највиши степени броја p који деле бројеве $(f(n))^k$ и a^{k-1} једнаки су, редом, $p^{k\beta}$ и $p^{(k-1)\alpha}$. Према томе, за сваки природан број k, важи $k\beta \geqslant (k-1)\alpha$, одакле следи да је $\beta \geqslant \alpha$. С обзиром да закључак важи за произвољан прост број p, следи да је број $f(n)$ дељив са a.

Нека је $g(n) = \dfrac{f(n)}{a}$ за $n \in \mathbb{N}$. Из доказане чињенице да је број $f(n)$ дељив са a за свако $n \in \mathbb{N}$, следи да је на овај начин дефинисана функција g која скуп природних бројева пресликава у себе. И функција g припада скупу S. Заиста, користећи дефиницију функције g и својства функције f следи:

$$\begin{aligned} g(n^2 g(m)) &= \frac{f(n^2 g(m))}{a} = \frac{f(n)f(n)f(g(m))}{a^3} \\ &= \frac{(f(n))^2 f(ag(m))}{a^4} = \frac{(f(n))^2 f(f(m))}{a^4} = \frac{(f(n))^2 a^2 m}{a^4} \\ &= m \cdot \left(\frac{f(n)}{a}\right)^2 = m \cdot (g(n))^2. \end{aligned}$$

Притом је $g(1) = \dfrac{f(1)}{a} = 1$. Користећи (2) и (5), добија се да су карактеристична својства функције $g \in S$ дата са:

$$g(1) = 1, \quad g(mn) = g(m)g(n), \quad g(g(m)) = m \quad \text{за све } m, n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Како за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $g(n) = \dfrac{f(n)}{a} \leqslant f(n)$, то је, при одређивању минималне вредности коју функције из S могу узети у тачки 1998, довољно размотрити функције g за које важе једнакости (6).

Нека је $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ произвољна функција за коју важе услови (6). Пре свега, g је инјекција. Заиста, из $g(m) = g(n)$ следи да је $m = g(g(m)) = g(g(n)) = n$. Такође, функција g пресликава сваки прост број у прост број. Нека важи супротно, тј. нека за неки прост број p важи $g(p) = uv$

где су $u > 1$ и $v > 1$ природни бројеви. Користећи својства (6) добија се да је $p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$. Пошто је p прост број, то је један од бројева $g(u)$ и $g(v)$ једнак 1. Но то је контрадикција са чињеницом да за инјективну функцију g важи $g(1) = 1$. Дакле, функција g заиста пресликава просте бројеве у просте.

Како је $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$, с обзиром да су бројеви $g(2)$, $g(3)$ и $g(37)$ међусобно различити прости бројеви, следи

$$g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2) \cdot (g(3))^3 \cdot g(37) \geqslant 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

Преостаје још да се конструише пример функције $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за коју важе услови (6) и за коју је $g(1998) = 120$. Нека је $g(1) = 1$, $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(5) = 37$, $g(37) = 5$; $g(p) = p$, ако је p прост број који не припада скупу $\{2, 3, 5, 37\}$. Коначно, за $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где је k природан број, p_1, p_2, ..., p_k прости бројеви, а α_1, α_2, ..., α_k природни бројеви, нека је

$$g(n) = g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = (g(p_1))^{\alpha_1} (g(p_2))^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (g(p_k))^{\alpha_k}.$$

Лако се проверава да овако дефинисана функција $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задовољава услове (6) и при томе важи $g(1998) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

ИМО '99.1

За произвољне тачке P и Q нека је $\mathcal{S}_{PQ}$ симетрија у односу на симетралу дужи PQ. Нека је S коначан скуп тачака у равни који садржи бар три тачке и задовољава дати услов и нека је T тежиште скупа S. За произвољне две различите тачке $A, B \in S$ važи $\mathcal{S}_{AB}(S) = S$. Одатле следи да је и $\mathcal{S}_{AB}(T) = T$ и $TA = TB$. Према томе, све тачке скупа S припадају кружници са центром T и представљају темена конвексног полигона. Нека је тај полигон $A_1A_2 \ldots A_n$. Симетрија у односу на симетралу дужи A_1A_3 пресликава сваку од две полуравни чија је граница права A_1A_3 у себе. Нека је α она од тих полуравни која садржи теме A_2. С обзиром да полураван α не садржи ниједно друго теме n-тоугла $A_1A_2 \ldots A_n$ (осим A_1, A_3 и A_2), и важи $\mathcal{S}_{A_1A_3}(A_1) = A_3$, то је $\mathcal{S}_{A_1A_3}(A_2) = A_2$. Одатле следи да је $A_1A_2 = A_2A_3$. Аналогно се добија да је $A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_nA_1$ и, како темена полигона $A_1A_2 \ldots A_n$ припадају једној кружници, тај полигон је правилан. Лако се проверава да скуп који се састоји од темена правилног полигона задовољава дати услов.

Напомена. У оригиналној верзији задатка, предлагач је захтевао да се исти задатак уради и у простору.

ИМО ’99.2

Дата неједнакост је хомогена и симетрична по променљивим x_1, …, x_n. Према томе, без умањења општости разматрања, може се претпоставити да је $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$ и $x_1 + \ldots + x_n = 1$. У овом случају треба максимизовати збир

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2).$$

За $n = 2$ се добија да је $x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \leqslant \frac{1}{2}(2x_1x_2)(1 - 2x_1x_2) \leqslant \frac{1}{8}$, при чему једнакост важи ако и само ако је $2x_1x_2 = 1/2$, тј. $x_1 = x_2 = 1/2$. Нека је $n \geqslant 3$ и x_{k+1} последња у низу променљивих x_1, …, x_n која је различита од нуле. Нека је $X = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ и $Y = (x_1, \ldots, x_k + x_{k+1}, 0, 0, \ldots, 0)$. Како је

$$\begin{aligned} F(Y) - F(X) &= x_k x_{k+1} \left\{ 3(x_k + x_{k+1}) \sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k^2 - x_{k+1}^2 \right\} \\ &= x_k x_{k+1} \left\{ 3(x_k + x_{k+1})(1 - x_k - x_{k+1}) - x_k^2 - x_{k+1}^2 \right\} \\ &= x_k x_{k+1} \left\{ (x_k + x_{k+1})(3 - 4(x_k + x_{k+1})) + 2x_k x_{k+1} \right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Из неједнакости $1 \geqslant x_1 + x_k + x_{k+1} \geqslant \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) + x_k + x_{k+1}$ добија се да је $\frac{2}{3} \geqslant x_k + x_{k+1}$, па из (1) следи $F(Y) - F(X) \geqslant 0$. Примењујући наведену смену неколико пута добија се да је

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_n) &\leqslant F(a, b, 0, \ldots, 0) = ab(a^2 + b^2) \\ &= \frac{1}{2}(2ab)(1 - 2ab) \leqslant \frac{1}{8} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right). \end{aligned}$$

Према томе, тражена константа је $C = \frac{1}{8}$, а једнакост се достиже ако и само ако су $n-2$ од бројева x_1, …, x_n једнаки нули, а преостала два су међусобно једнака (није искључен случај да су и они једнаки нули).

Друго решење. Нека је $M = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Тада је

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) &\leqslant \sum_{i<j} x_i x_j M = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(2 \sum_{i<j} x_i x_j \right) \\ &\leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{M + 2\sum_{i<j} x_i x_j}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^4. \end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако важе услови

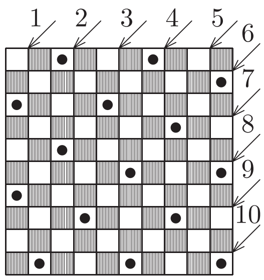
$$M = 2 \sum_{i<j} x_i x_j, \tag{2}$$

$$x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = M x_i x_j \quad \text{за све } i < j. \tag{3}$$

Лако се проверава да услови (2) и (3) важе ако и само ако су $n-2$ од бројева x_1, …, x_n једнаки нули, а преостала два су међусобно једнака (није искључен случај да су и они једнаки нули).

ИМО '99.3

Нека су поља (јединични квадрати) дате табле обојена наизменично бело и црно, као на шаховској табли, тако да је доње лево поље црно.



Слика 14.

Нека је x_n тражени најмањи број, b_n најмањи број белих поља која морају бити означена тако да свако црно поље има бар једно означено суседно бело поље и, слично, нека је c_n најмањи број црних поља која морају бити означена тако да свако бело поље има бар једно означено суседно црно поље. С обзиром да је $n = 2k$ за неки природан број k, то на табли има једнак број белих и црних поља, па, због симетрије табле, следи да је $b_n = c_n$ и $x_n = b_n + c_n$.

Нека су беле дијагонале које су „паралелне" великој црној дијагонали нумерисане бројевима 1, 2, …, $2k$. У пољима дијагонала које су означене бројевима 2, 4, …, $2k$ означимо редом 2, 4, …, k, …, 3, 1 поља, тако да никоја два означена поља немају заједничко теме (видети слику 14, где је представљен случај $k = 5$). При томе је свако црно поље суседно тачно једном означеном белом пољу. Број означених белих поља у овом примеру једнак је

$$(2+4+\ldots+k)+((k-1)+\ldots+3+1)=\frac{k(k+1)}{2}\,,$$

одакле следи да важи

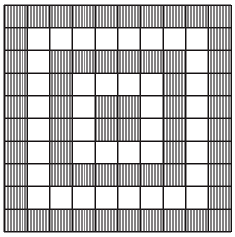
$$b_n \leqslant \frac{k(k+1)}{2}\,. \tag{1}$$

Даље, лако је приметити да у наведеном примеру не постоји црно поље које је суседно са нека два означена бела поља. Према томе, неопходно је означити бар $\frac{k(k+1)}{2}$ црних поља, тако да за свако бело поље постоји означено црно поље, тј.

$$c_n \geqslant \frac{k(k+1)}{2}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) и чињенице да је $b_n = c_n$ следи да је $b_n = c_n = \frac{k(k+1)}{2}$. Дакле, $x_n = b_n + c_n = k(k+1)$.

Друго решење. За $n = 2k$, нека су у првом потезу ћелије суседне са границом обојене у црно, затим, у другом, ћелије којима су ове ћелије граничене обојене у бело, у трећем ћелије којима су претходне граничне обојене у црно, и тако даље, док се свим ћелијама дате квадратне табле не придружи боја (видети слику 15).



Слика 15.

Назовимо ћелије обојене у неком потезу појас. У уоченом бојењу свака ћелија (било бела, било црна) има тачно две суседне црне ћелије. Како је број црних ћелија при оваквом бојењу $2k(k+1)$, следи да се мора обележити бар $k(k+1)$ ћелија.

Са друге стране, ако се у сваком црном појасу обележе прво неке две узастопне ћелије, затим не обележе наредне две, и тако даље, свака ћелија на црном појасу ће имати обележену суседну ћелију. Лако се види да је могуће наместити овакве низове на два узастопна црна појаса, тако да свака ћелија у белом појасу који се налази између њих има тачно једну суседну обележену ћелију. Дакле, кренувши од највећег појаса и обележавајући на описани начин, добија се тражено обележавање које садржи тачно половину црних ћелија, тј. $k(k+1)$ ћелија.

Следи да је тражена најмања могућа вредност $k(k+1)$.

Напомена. За $n = 4k-1$ и $n = 4k+1$ се сличним бојењем може показати да су тражене најмање вредности $4k^2 - 1$ и $(2k+1)^2$, редом.

ИМО '99.4

Очигледно је да сваки пар $(1, p)$, где је p прост број, задовољава услове задатка. Пар $(2, 2)$ је такође решење. Ако је $n = 2$ и $p > 2$, онда је p непаран број, па следи да је и $(p-1)^n + 1$ такође непаран број који није дељив са 2^{p-1}. Притом број $(2-1)^n+1=2$ није дељив са n ни за једно $n \geqslant 3$.

Преостаје још да се потраже решења (n,p) за која важи $n \geqslant 3$ и $p \geqslant 3$. Како је $p \geqslant 3$, $(p-1)^n+1$ је непаран број. Зато је и његов делилац n непаран, па због услова $n \leqslant 2p$ добија се да је $n < 2p$. Нека је q најмањи прост делилац броја n. Из услова $q \mid (p-1)^n+1$ добија се $(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}$, а бројеви q и $p-1$ су узајамно прости. Пошто је број $p-1$ паран, q мора бити непаран. Како је q најмањи прост делилац броја n, то су и бројеви n и $q-1$ узајамно прости, одакле следи да постоје цели бројеви u и v за које важи $un+v(q-1)=1$. Из ове једнакости добијамо да је u непаран број, јер је $q-1$ паран. Зато (и из Мале Фермаове теореме) важе следеће конгруенције

$$p-1=(p-1)^{un}\cdot(p-1)^{v(q-1)} \equiv (-1)^u\cdot 1^v \equiv -1 \pmod{q},$$

одакле следи да је број p дељив са q, тј. $p=q$. Како је q најмањи прост делилац броја n, то број 2 није делилац броја n. Према томе, n је дељив са $q=p$ и $n \neq 2p$, тј. $n=p$.

Коначно, из услова

$$p^{p-1} \mid (p-1)^p+1 = p^2\left\{p^{p-2}-\binom{p}{1}p^{p-3}+\ldots+\binom{p}{p-3}p-\binom{p}{p-2}+1\right\},$$

добија се да је $p-1=2$, тј. $p=3$, јер су сви сабирци у витичастој загради осим последњег дељиви са p. Тако се добија и решење $(3,3)$.

Дакле, сви тражени парови су: $(1,p)$, где је p произвољан прост број, (2,2) и (3,3).

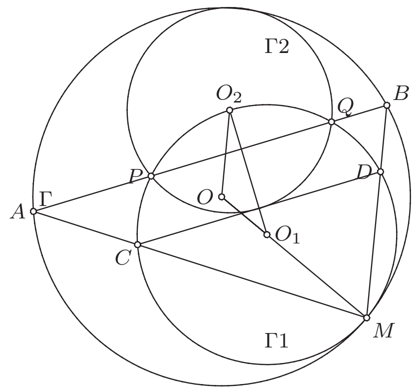
ИМО '99.5

Нека су P и Q тачке пресека кружница Γ_1 и Γ_2, а R тачка пресека правих PQ и O_1O_2. Нека је $H_{M,\frac{r}{r_1}}$ хомотетија са центром M и коефицијентом $\dfrac{r}{r_1}$. Очигледно је $H_{M,\frac{r}{r_1}}(\Gamma_1)=\Gamma$. Како се при тој хомотетији тачке C и D пресликавају редом у A и B, то важи

$$\frac{MC}{MA}=\frac{MD}{MB}=\frac{r}{r_1}, \qquad CD \parallel AB.$$

За доказ чињенице да је права CD тангента круга Γ_2, довољно је доказати да је растојање тачке O_2 од праве CD једнако полупречнику r_2, тј. $d(O_2,CD)=r_2$.

Одредимо прво растојање тачке M од праве AB. Коришћењем косинусне теореме добијају се следеће једнакости (видети слику 16):



Слика 16.

$$\begin{aligned}
d(M,AB) &= d(O_1,AB) - O_1M\cdot\cos\sphericalangle O_2O_1M\\
&= O_1O_2 - RO_2 + O_1M\cdot\cos\sphericalangle OO_1O_2\\
&= r_1 - r_2\cdot\cos\sphericalangle O_1O_2P + r_1\cdot\cos\sphericalangle OO_1O_2\\
&= r_1 - r_2\cdot\frac{r_1^2+r_2^2-r_1^2}{2r_1r_2} + r_1\cdot\frac{(r-r_1)^2+r_1^2-(r-r_2)^2}{2r_1(r-r_1)}\\
&= r_1 - \frac{r_2^2}{2r_1} + \frac{2r_1^2-2rr_1+2rr_2-r_2^2}{2(r-r_1)} = \frac{rr_2(2r_1-r_2)}{2r_1(r-r_1)}.
\end{aligned}$$

$\left(\text{одозго се види да важи и } RO_2 = \dfrac{r_2^2}{2r_1}\right)$. Даље, растојање правих CD и AB је:

$$d(C,AB) = \frac{r-r_1}{r}\cdot d(M,AB) = \frac{r_2(2r_1-r_2)}{2r_1} = r_2 - \frac{r_2^2}{2r_1}$$

и коначно

$$d(O_2,CD) = d(C,AB) + RO_2 = r_2 - \frac{r_2^2}{2r_1} + \frac{r_2^2}{2r_1} = r_2.$$

Друго решење. Ради лакшег праћења, прво су доказане две леме.

Лема 1. Нека је S центар уписане кружнице троугла ABC, S_a центар његове спођа приписане кружнице, која додирује страницу BC. Нека је A' средиште лука $\widehat{BC}$ описане кружнице троугла ABC, који не садржи тачку A. Тада је $A'B = A'C = A'S = A'S_a$.

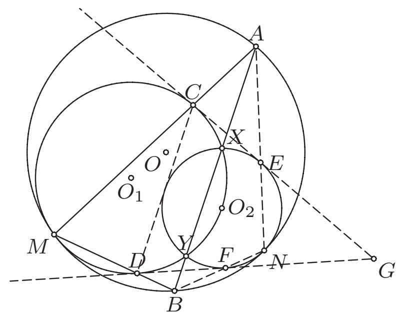
Доказ. Лема се лако доказује рачунањем одговарајућих углова.

Лема 2. Нека се кружнице k_1 и k_2 секу у тачкама X и Y и додирују кружницу k изнутра у тачкама M и N, редом. Нека је A једна од пресечних тачака праве XY са k и нека AM и AN секу k_1 и k_2 редом у C и E. Тада је CE заједничка тангента кружница k_1 и k_2.

Доказ. Пошто је $AC \cdot AM = AX \cdot AY = AE \cdot AN$, четвороугао $MNEC$ је тетиван. Нека MN по други пут сече k_1 у Z. Ако је M' произвољна тачка заједничке тангенте у M, тада је $\sphericalangle MCZ = \sphericalangle M'MZ = \sphericalangle M'MN = \sphericalangle MAN$ (гледајући оријентисане углове!), одакле је $CZ \parallel AN$. Следи да је $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ANM = \sphericalangle CZM$, тј. CE тангира k_1. Аналогно се доказује да CE тангира k_2.

Нека су E и F пресеци NA и NB са Γ_2, редом. Применом леме 2, следи да су CE и DF заједничке тангенте кружница Γ_1 и Γ_2.

Ако ове две кружнице имају исти полупречник, тврђење следи тривијално. Иначе, нека је G пресечна тачка CE и DF и нека су O_1 и O_2 центери кружница Γ_1 и Γ_2, редом. Пошто је $O_1D = O_1C$ и $\sphericalangle O_1DG = \sphericalangle O_1CG = 90°$, следи да је O_1 средиште краћег лука описане кружнице троугла CDG. Центар O_2 се налази на симетрали $\sphericalangle CGD$, пошто Γ_2 додирује и GC и GD.



Слика 17.

Међутим, O_2 лежи и на Γ_1, па из леме 1 следи да је O_2 или центар уписаног или центар спољa приписаног круга троугла CDG (који додирује страницу CD). Дакле, Γ_2 је или уписани или спољa приписани (који одговара страници CD) круг троугла CDG, па, у оба случаја, тангира CD.

ИМО '99.6

Нека је $c = f(0)$ и $A = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. За $x = y = 0$ се добија да је $f(-c) = f(c) + c - 1$, одакле је $c \neq 0$. Лако се одређује рестрикција функције f на скуп A. Заиста, за свако $x = f(y) \in A$ је $f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1$, тј.

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}. \tag{1}$$

За $y = 0$ се добија да је $f(x-c) - f(x) = cx + f(c) - 1$. Како је $c \neq 0$, из последње једнакости следи да је скуп $\{f(x-c) - f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ једнак скупу $\mathbb{R}$ свих реалних бројева, тј. $A - A = \{y_1 - y_2 : y_1, y_2 \in A\} = \mathbb{R}$.

Сада је лако одредити вредност $f(x)$ за произвољан аргумент $x \in \mathbb{R}$. По претходном, могу се изаберати y_1 и y_2 из A тако да важи $x = y_1 - y_2$. Користећи дату једначину и једнакост (1) следи

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_1 - y_2) = f(y_2) + y_1 y_2 + f(y_1) - 1 \\ &= \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1 y_2 + \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 \\ &= c - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

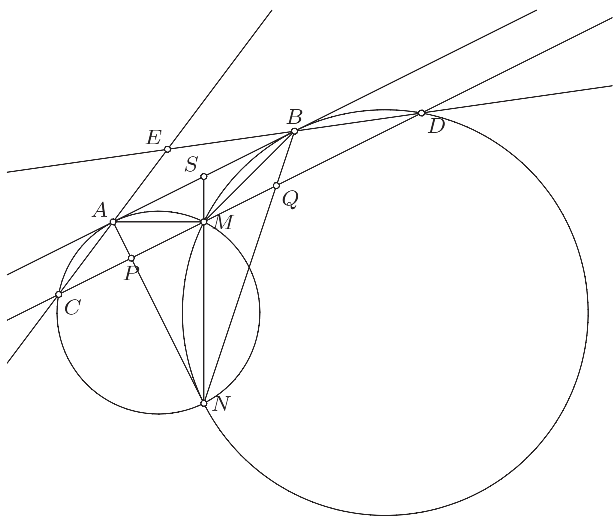
Из (1) и (2) следи да је $c = 1$, тј.

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \text{за све } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Лако се проверава да функција (3) задовољава дату функционалну једначину. Према томе, функција дата са (3) је једино решење.

ИМО '00.1

Нека је S тачка пресека правих MN и AB.



Слика 18.

На основу теореме о потенцији тачке у односу на кружницу, добија се да је $SA^2 = SM \cdot SN = SB^2$, одакле следи $SA = SB$. Како је $PQ \parallel AB$, то је и $MP = MQ$ (видети слику 18).

На основу теореме о једнакости периферијског угла над тетивом са углом између тангенте и тетиве следи

$$\sphericalangle EAB = \sphericalangle ACM = \sphericalangle MAB, \quad \sphericalangle EBA = \sphericalangle BDM = \sphericalangle MBA. \tag{1}$$

Из (1) следи да су тачке E и M симетричне у односу на праву AB. Даље је $EM \perp AB$, а како је $PQ \parallel AB$, следи да је $EM \perp PQ$. Према томе, тачка E припада симетрали дужи PQ, па је $EP = EQ$.

ИМО '00.2

Нека је $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{x}$, где су x, y, z позитивни бројеви (то се може урадити, на пример, за $x = 1$, $y = \dfrac{1}{a}$, $z = \dfrac{1}{ab}$). Дата неједнакост добија еквивалентни облик:

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leqslant xyz. \tag{1}$$

Највише један од бројева $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$ је негативан, јер је збир било која два од њих позитиван. Ако је тачно један од тих бројева негативан, онда је $uvw \leqslant 0 \leqslant xyz$, тј. важи (1). Ако је $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$, из неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи

$$\sqrt{uv} = \sqrt{(x - y + z)(y - z + x)} \leqslant \frac{(x - y + z) + (y - z + x)}{2} = x,$$

и аналогно $\sqrt{vw} \leqslant y$, $\sqrt{wu} \leqslant z$. Из ове три неједнакости добија се $uvw = \sqrt{uv} \cdot \sqrt{vw} \cdot \sqrt{wu} \leqslant xyz$. Једнакост важи ако и само ако је $x = y = z$, тј. $a = b = c = 1$.

Друго решење. Трансфомацијом израза се добија

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) = ab - a + \frac{a}{c} - b + 1 - \frac{1}{c} + 1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}.$$

Из $ab = \frac{1}{c}$ и $\frac{1}{bc} = a$ следи

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) = \frac{a}{c} - b - \frac{1}{b} + 2 \leqslant \frac{a}{c},$$

пошто је $b + \dfrac{1}{b} \geqslant 2$. Аналогно се добија

$$\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \leqslant \frac{c}{b}.$$

Дата неједнакост следи из претходне три неједнакости. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c = 1$.

ИМО '00.3

Тражени скуп вредности је $\left[\frac{1}{n-1}, \infty\right)$.

(a) Нека је $\lambda \geqslant \dfrac{1}{n-1}$. Размотримо стратегију код које у сваком потезу бува која је на бројној правој прва (или једна од неколико таквих), гледано слева на десно, прескаче преко буве која је последња. После неколико потеза оваквог типа се долази до позиције у којој су све буве у различитим тачкама. Нека је k број изведених потеза и нека су d_k – максимално растојање међу бувама после k потеза, δ_k – минимално растојање међу бувама после k потеза. Очигледно је $d_k \geqslant (n-1)\delta_k$.

После $(k+1)$-ог потеза појављује се ново растојање међу суседним бувама, које је једнако λd_k. Ако је оно минимално растојање међу бувама у новој позицији, онда је $\delta_{k+1} = \lambda d_k$. Ако није, онда важи $\delta_{k+1} \geqslant \delta_k$. У сваком случају је

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \geqslant \min\left\{1, \frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\} \geqslant \min\{1, (n-1)\lambda\}.$$

Како је $\lambda \geqslant \dfrac{1}{n-1}$, слади $\delta_{k+1} \geqslant \delta_k$, за све индексе k од тренутка када су се све буве нашле у различитим тачкама. Према томе, од тог тренутка па надаље минимално растојање међу бувама се не смањује, а положај буве која је прва слева се после сваког потеза помера удесно за величину која није мања од позитивне константе. Следи да ће се за произвољну тачку M на правој, после довољно великог броја потеза, све буве наћи десно од те тачке.

(б) Нека је $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$. Доказаћемо да за сваку почетну позицију n бува на правој (довољно је то доказати за *неку* позицију), постоји тачка M таква да је буве не могу прескочити. Нека су положајима бува придружени одговарајући реални бројеви на бројној правој. Нека је s_k збир свих бројева који представљају положаје бува после k-тог потеза (у произвољном уоченом низу потеза), а r_k највећи од тих бројева. Очигледно је $s_k \leqslant nr_k$. Довољно је доказати да је низ $(r_k)_{k\geqslant 0}$ ограничен.

У $(k+1)$-ом потезу бува из неке тачке A скаче преко тачке B у тачку C. Нека су a, b, c бројеви који, редом, одговарају тим тачкама. Тада је $s_{k+1} = s_k + c - a$. На основу датог услова, који дефинише дужину скока, следи $c - b = \lambda(b - a)$, односно $\lambda(c - a) = (1 + \lambda)(c - b)$. Према томе,

$$s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1+\lambda}{\lambda} \cdot (c - b).$$

Ако је $c > r_k$, бува је у $(k+1)$-ом потезу скочила у тачку која се налази десно од осталих бува, тј. $r_{k+1} = c$. Пошто се у тачки b налазила бува после k-тог потеза, то је $b \leqslant r_k$. На основу тога следи

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda} \cdot (c-b) \geqslant \frac{1+\lambda}{\lambda} \cdot (r_{k+1} - r_k). \qquad (1)$$

Ако је $c \leqslant r_k$, онда је $r_{k+1} = r_k$ и $s_{k+1} - s_k = c - a > 0$ и (1) опет важи. Нека је $(z_k)_{k \geqslant 0}$ низ реалних бројева дефинисан са:

$$z_k = \frac{1+\lambda}{\lambda} \cdot r_k - s_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

На основу (1) следи да за свако $k \geqslant 0$ важи $z_{k+1} - z_k \leqslant 0$, тј. низ $(z_k)_{k \geqslant 0}$ је нерастући и за свако $k \geqslant 0$ важи $z_k \leqslant z_0$.

Како је $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$, следи $1 + \lambda > n\lambda$. Нека је $\mu = \frac{1+\lambda}{\lambda} - n$. Тада је $\mu > 0$, а за општи члан низа $(z_k)_{k \geqslant 0}$ важи

$$z_k = (n+\mu) r_k - s_k = \mu r_k + (n r_k - s_k) \geqslant \mu r_k.$$

За свако k важи $r_k \leqslant z_k/\mu \leqslant z_0/\mu$. Према томе, низ $(r_k)_{k \geqslant 0}$ је ограничен константом, која зависи од n, λ и почетне позиције, али не од редоследа потеза.

ИМО '00.4

Нека су карте распоређене у кутије тако да мађионичар увек може успешно да изведе трик. Постоје следеће могућности:

(a) Постоје три карте, које су означене узастопним бројевима k, $k+1$, $k+2$, а распоређене су по једна у свакој од три кутије, на пример, у црвеној, плавој и белој, редом. Пошто се карте $k+1$ и $k+2$ налазе у плавој и белој кутији, то збир $(k+1)+(k+2) = 2k+3$ може да се реализује само у случајевима када карта није бирана из црвене кутије. Како је $k + (k+3) = 2k+3$, то карта са бројем $k+3$ не може бити у плавој кутији (у противном се карте k и $k+3$ налазе у црвеној и плавој и, ако су оне изабране, добијени збир је $2k+3$ и није бирана карта из беле кутије). Аналогно, карта са бројем $k+3$ не може бити у белој кутији. Према томе, $k+3$ се налази у црвеној кутији. Другим речима, ако се три узастопна броја k, $k+1$ и $k+2$ налазе у три различите кутије, онда се број $k+3$ (наравно, ако је $k+3 \leqslant 100$) налази у истој кутији у којој је број k. Аналогно се закључује да се број $k-1$ (ако је $k-1 \geqslant 1$) налази у истој кутији као и број $k+2$. Одавде следи да свака кутија садржи бројеве конгруетне по модулу 3.

Ако су карте распоређене тако да свака кутија садржи бројеве конгруетне по модулу 3, онда мађионичар примењује следеће правило за погађање кутије: ако је добијени збир конгруентан са 0, 1 или 2 по модулу 3, онда карта није бирана из кутије која садржи бројеве конгруентне редом са 0, 2 или 1 по модулу 3. Оваквих распореда карата има $3! = 6$.

(б) Никоје три карте означене узастопним бројевима нису распоређене у три различите кутије. Нека се 1 налази у црвеној кутији, нека је l најмањи број који се налази у кутији која није црвена, на пример у плавој и нека је m најмањи број који се налази у белој кутији. Пошто се $l-1$ налази у црвеној кутији, а l у плавој, то се број $l+1$ не налази у белој, тј. $l+1 < m$.

Ако је $m < 100$, пошто је $l+m = (l-1)+(m+1)$ и бројеви l, m и $l-1$ се налазе редом у плавој, белој и црвеној кутији, то се и број $m+1$ налази у црвеној кутији. Даље, из једнакости $l+(m+1) = (l+1)+m$ и чињенице да се l, $m+1$ и m налазе редом у плавој, црвеној и белој кутији, следи да се $l+1$ налази у белој кутији. Из добијене контрадикције следи да је $m = 100$. Дакле, једини број који се налази у белој кутији је 100.

Из једнакости $(l-1)+100 = l+99$ и чињенице да се бројеви $l-1$, 100 и l налазе редом у црвеној, белој и плавој кутији, следи да се и број 99 налази у плавој кутији. Ако би неки број $n \in \{2, 3, \ldots, 98\}$ био у црвеној кутији, тада из једнакости $n+99 = (n-1)+100$ следи да се број $n-1$ налази у белој кутији, а то је у контрадикцији са закључком да је 100 једини број који се налази у белој кутији. Дакле, све карте означене бројевима $\{2, 3, \ldots, 98\}$ се налазе у плавој кутији.

Ако се 1 налази у црвеној кутији, 100 у белој, а сви остали бројеви у плавој кутији, онда мађионичар примењује следеће правило: ако је добијени збир једнак 101, онда карта није бирана из плаве кутије; ако добијени збир није већи од 100, онда карта није бирана из беле кутије; ако добијени збир није мањи од 102, онда карта није бирана из црвене кутије. Због симетрије постоји $3! = 6$ распореда одређених разбијањем $\{1\}$, $\{2, 3, \ldots, 99\}$, $\{100\}$ скупа датих карата.

Дакле, укупан број добрих расподела карата једнак је 12.

ИМО '00.5

Важи следеће (општије) тврђење:

- *За сваки природан број k постоји природан број $n = n(k)$, такав да важи $n \mid 2^n + 1$, $3 \mid n$ и број n је дељив са тачно k простих бројева.*

У доказу овог тврђења користи се следећа лема:

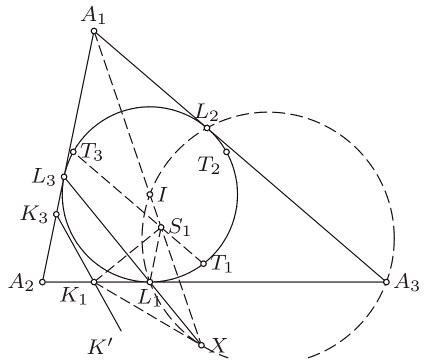
- *За сваки природан број t постоји прост број p, такав да $p \mid t^3+1$, али p није делилац броја $t+1$.*

Доказ леме: Ако тврђење леме не важи за неки природан број $t>2$, тада сваки прост делилац броја t^2-t+1 дели $t+1$. Како је $t^2-t+1 = (t+1)(t-2)+3$, то следи да је 3 једини прост делилац броја t^2-t+1, тј. t^2-t+1 је степен броја 3. Како је број $t+1$ дељив са 3, то је и број $t-2$ дељив са 3. Следи да је број t^2-t+1 дељив са 3, али није дељив са 9, па је $t^2-t+1=3$, а то је у контрадикцији са условом $t>2$.

Доказ тврђења: Ако је $k=1$, лако се проверава да за број $n(1)=3$ важи тврђење. Нека за неки природан број $k \geqslant 1$ постоји број $n(k) = 3^l \cdot t$, где је $l \geqslant 1$ и $3 \nmid t$, за који важи $n \mid 2^n+1$ и n има тачно k простих делиоца. Тада је број $n=n(k)$ непаран број, одакле следи да $3 \mid 2^{2n}-2^n+1$. Користећи једнакост $2^{3n}+1=(2^n+1)(2^{2n}-2^n+1)$, добија се да $3n \mid 2^{3n}+1$. На основу доказане леме постоји непаран прост број p, такав да $p \mid 2^{3n}+1$ и $p \nmid 2^n+1$. Следи да број $n(k+1)=3p\cdot n(k)$ задовољава услове тврђења за $k+1$. Тиме је доказ завршен.

ИМО '00.6

Нека су M_1, M_2, M_3 тачке симетричне са тачкама T_1, T_2, T_3 у односу на симетрале углова $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$, редом. Тачке M_1, M_2, M_3 припадају кружници уписаној у троугао ABC. Доказаћемо да су управо тачке M_1, M_2, M_3 темена троугла који формирају праве l_1, l_2, l_3. Због симетрије, довољно је доказати да права l_1 садржи тачку M_2.



Слика 19.

Нека је S центар уписане кружнице троугла ABC (видети слику 19). Тачке T_1 и H_2 налазе се увек са исте стране праве BS, и при томе је тачка T_2 ближа правој BS од тачке H_2. Нека се тачка C налази са исте стране праве BS као и тачке T_2 и H_2 (слично се разматра случај када је тачка C са друге стране праве BS). Нека је $\sphericalangle CAB=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle BCA=\gamma$.

Доказаћемо прво да *тачка симетрична тачки* H_2 *у односу на праву* T_2T_3 *припада правој* BS. Нека је l права одређена условима $l \perp T_2T_3$ и $H_2 \in l$. Нека је P пресек правих BS и l, а Q пресек правих BS и T_2T_3. Тачка Q је пресек дужи T_2T_3 и BP. Довољно је доказати да је $\sphericalangle PQH_2 = 2\sphericalangle PQT_2$. Користећи једнакост унакрсних углова и теорему о спољашњем углу троугла, добија се да је

$$\sphericalangle PQT_2 = \sphericalangle BQT_3 = \sphericalangle AT_3Q - \sphericalangle T_3BQ = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}\,. \qquad (1)$$

Из (1) и чињенице да су тачке T_1 и T_3 симетричне у односу на праву BQ, следи да је $\sphericalangle BQT_1 = \sphericalangle BQT_3 = \dfrac{\gamma}{2}$. Тачке C и Q су са исте стране праве ST_1, јер је $\sphericalangle BT_1Q = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} > 90^\circ$. Како је $\sphericalangle SQT_1 = SCT_1 = \dfrac{\gamma}{2}$, следи да је четвороугао QST_1C тетиван, одакле је $\sphericalangle SQC = \sphericalangle ST_1C = 90^\circ$. Четвороугао BCH_2Q је такође тетиван, јер је $\sphericalangle BQC = \sphericalangle BH_2C = 90^\circ$. Из чињенице да је $\sphericalangle PQH_2$ спољашњи угао троугла QBH_2, једнакости периферијских углова у тетивном четвороуглу BCH_2Q и (1), добија се да је

$$\sphericalangle PQH_2 = \sphericalangle BH_2Q + \sphericalangle QBH_2 = \sphericalangle BCQ + \sphericalangle QCH_2 = \gamma = 2\sphericalangle PQT_2,$$

што је горе наведено помоћно тврђење. Даље, користећи чињеницу да је $\sphericalangle QH_2T_2$ спољашњи угао троугла QCH_2 и периферијске углове у тетивном четвороуглу BCH_2Q, добија се да је

$$\sphericalangle BPT_2 = \sphericalangle QH_2T_2 = \sphericalangle QCH_2 + \sphericalangle H_2QC = \sphericalangle QBH_2 + \sphericalangle H_2BC = \frac{\beta}{2}\,.$$

Пошто је тачка M_2 симетрична са T_2 у односу на BS, то је $\sphericalangle BPM_2 = \sphericalangle BPT_2 = \dfrac{\beta}{2} = \sphericalangle CBP$, одакле следи да је $PM_2 \parallel BC$.

Докажимо још да је $l_1 \parallel BC$. То је очигледно ако је $\beta = \gamma$. Нека је $\beta < \gamma$ (аналогно се разматра случај $\beta > \gamma$). Нека су D и E пресеци правих H_2H_3 и T_2T_3 са BC, редом. Из троугла BDH_2 добијамо $\sphericalangle BDH_3 = 180^\circ - \beta - 90^\circ - \sphericalangle CH_3H_2 = 90^\circ - \beta - \sphericalangle CBH_2 = \gamma - \beta$. Из троугла CET_2 добијамо да је $\sphericalangle BET_3 = \sphericalangle CET_2 = \gamma - (90^\circ - \alpha/2) = (\gamma - \beta)/2$. Из једнакости $\sphericalangle BDH_3 = \gamma - \beta$, $\sphericalangle BET_3 = (\gamma - \beta)/2$ и чињенице да је права l_1 симетрична правој H_2H_3 у односу на праву T_2T_3, добијамо да је $l_1 \parallel BC$.

Коначно, из $PM_2 \parallel BC$, $l_1 \parallel BC$ и $P \in l_1$, следи да $M_2 \in l_1$.

Друго решење. Нека је $\triangle ABC$ смештен у комплексну раван, тако да се јединична кружница поклапа са кружницом уписаном у $\triangle ABC$. Нека мала слова која означавају комплексне бројеве одговарају великим која у задатку означавају тачке. Како је тангента кружнице нормална на праву која спаја центар кружнице и додирну тачку тангенте, важи:

$$\frac{a-t_2}{\overline{a}-\overline{t}_2}+\frac{t_2}{\overline{t}_2}=0, \quad \frac{a-t_3}{\overline{a}-\overline{t}_3}+\frac{t_3}{\overline{t}_3}=0.$$

Како је $\overline{t}_2=\dfrac{1}{t_2}$ и $\overline{t}_3=\dfrac{1}{t_3}$, следи

$$\overline{a}=\frac{t_2-a}{t_2^2}+\frac{1}{t_2}=\frac{t_3-a}{t_3^2}+\frac{1}{t_3}\,. \tag{2}$$

С обзиром да су T_2 и T_3 тачке додира уписане кружнице са две странице троугла, то је $t_2\neq t_3$ и $t_2\neq -t_3$, па из (2) следи $a=\dfrac{2t_2t_3}{t_2+t_3}$. Аналогно се добија $b=\dfrac{2t_1t_3}{t_1+t_3}$, $c=\dfrac{2t_1t_2}{t_1+t_2}$, па је $\overline{a}=\dfrac{2}{t_2+t_3}$, $\overline{b}=\dfrac{2}{t_1+t_3}$, $\overline{c}=\dfrac{2}{t_1+t_2}$. Слично, из нормалности висина и страница $\triangle ABC$, следи

$$\frac{a-h_3}{\overline{a}-\overline{h}_3}=\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=-\frac{t_3}{\overline{t}_3}=-t_3^2, \quad \frac{c-h_3}{\overline{c}-\overline{h}_3}=-\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}}=t_3^2.$$

Следи да је $\overline{h}_3=\dfrac{a-h_3}{t_3^2}+\overline{a}=\dfrac{h_3-c}{t_3^2}+\overline{c}$, одакле је

$$\begin{aligned} h_3 &= \frac{1}{2}\left\{a+c+(\overline{a}-\overline{c})\cdot t_3^2\right\}, \\ \overline{h}_3 &= \frac{1}{2}\left(\overline{a}+\overline{c}+\frac{a-c}{t_3^2}\right)=\frac{2t_2t_3^2+t_3^2t_1+t_3^3+t_3t_2^2-t_1t_2^2}{t_3^2(t_1+t_2)(t_2+t_3)}\,. \end{aligned}$$

За произвољне тачке T и N на јединичној кружници ($M\neq N$) одредимо тачку K, која је симетрична у односу на праву MN произвољној тачки $L\notin mn$. Важе једнакости $|l-m|=|k-m|$ и $|l-n|=|k-n|$, тј.

$$l\overline{l}-\overline{l}m-l\overline{m}+m\overline{m} = k\overline{k}-\overline{k}m-k\overline{m}+m\overline{m}, \tag{3}$$
$$l\overline{l}-\overline{l}n-l\overline{n}+n\overline{n} = k\overline{k}-\overline{k}n-k\overline{n}+n\overline{n}. \tag{4}$$

Одузимањем једначине (4) од (3), добија се $\overline{l}(n-m)+l(\overline{n}-\overline{m})=\overline{k}(n-m)+k(\overline{n}-\overline{m})$, а како је $\overline{n}-\overline{m}=\dfrac{n-m}{nm}$, следи

$$\overline{k}=\frac{1}{mn}\cdot(k-l+\overline{l}mn),$$

па се заменом у (3) и решавањем одговарајуће квадратне једначине добија ($k\neq l$):

$$k=m+n-\overline{l}mn.$$

Нека је P_3 тачка која је симетрична тачки H_3 у односу на праву T_2T_3. Тада је

$$\begin{aligned} p_3 &= t_2 + t_3 - t_2t_3 \cdot \frac{2t_2t_3^2 + t_3^2t_1 + t_3^3 + t_3t_2^2 - t_1t_2^2}{t_3^2(t_1+t_2)(t_2+t_3)} \\ &= \frac{t_1(t_2+t_3)(t_2^2+t_3^2)}{t_3(t_1+t_2)(t_2+t_3)} = \frac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_3(t_1+t_2)}. \end{aligned}$$

Ако је P_2 тачка симетрична тачки H_2 у односу на T_2T_3, аналогно се добија

$$p_2 = \frac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_2(t_1+t_3)} \qquad \text{односно} \qquad \overline{p_2} = \frac{t_2^2+t_3^2}{t_2t_3(t_1+t_3)}.$$

Одавде следи да је

$$\begin{aligned} p_2 - p_3 &= \frac{t_1^2(t_3-t_2)(t_2^2+t_3^2)}{t_2t_3(t_1+t_3)(t_1+t_2)}, \\ \overline{p}_2 - \overline{p}_3 &= \frac{(t_2-t_3)(t_2^2+t_3^2)}{t_2t_3(t_1+t_3)(t_1+t_2)}, \end{aligned}$$

па је $\dfrac{p_2-p_3}{\overline{p}_2-\overline{p}_3} = -t_1^2$. Нека је x пресечна тачка јединичне кружнице и праве p_2p_3, односно праве l_1 из задатка. Тада је $\overline{x} = 1/x$ и

$$\frac{x-p_2}{\overline{x}-\overline{p}_2} = \frac{p_2-p_3}{\overline{p}_2-\overline{p}_3} = -t_1^2,$$

одакле добијамо да је $\dfrac{x^2-xp_2}{1-x\overline{p}_2} = -t_1^2$, односно

$$x^2 - x(p_2 + \overline{p}_2t_1^2) + t_1^2 = 0. \tag{5}$$

Како је

$$\overline{p}_2 = \frac{1}{t_2t_3} \cdot \frac{t_2^2+t_3^2}{t_1+t_3} = \frac{p_2}{t_1t_3},$$

то једначина (5) прима облик

$$t_2t_3x^2 - t_1(t_2^2+t_3^2)x + t_1^2t_2t_3 = 0. \tag{6}$$

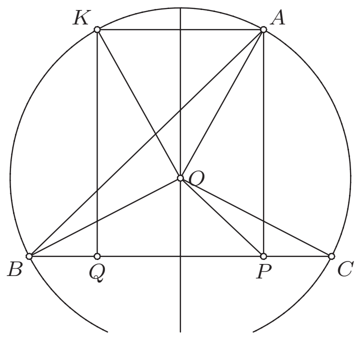
Дискримината квадратног тринома на левој страни једнакости (6) је

$$D = t_1^2(t_2^2+t_3^2)^2 - 4t_1^2t_2^2t_3^2 = t_1^2(t_2^2-t_3^2)^2,$$

па су решења једначине (6) $x_1 = \dfrac{t_1t_2}{t_3}$ и $x_2 = \dfrac{t_1t_3}{t_2}$. Аналогно се добија да су пресечне тачке праве l_2 са јединичном кружницом $y_1 = \dfrac{t_1t_2}{t_3}$, $x_2 = \dfrac{t_2t_3}{t_1}$, а пресечне тачке праве l_3 са јединичном кружницом су $z_1 = \dfrac{t_3t_1}{t_2}$, $z_2 = \dfrac{t_2t_3}{t_1}$. Према томе, праве l_1 и l_2 се секу у тачки $x_1 = y_1$, праве l_2 и l_3 у тачки $y_2 = z_2$, а праве l_1 и l_3 у тачки $x_2 = z_1$, при чему те пресечне тачке припадају јединичној кружници.

ИМО '01.1

Нека је $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$, $\varepsilon = \sphericalangle COP$. Нека је R полупречник описане кружнице троугла ABC, P подножје нормале из A на BC и K и Q тачке симетричне са тачкама A и C у односу на симетралу странице BC, редом. Тада је $OA = OB = OC = OK = R$ и $AK = PQ$ (јер је права AP паралелна симетрали странице BC). Даље је $\sphericalangle AOK = \sphericalangle AOB - \sphericalangle KOB = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOC = 2\gamma - 2\beta \geqslant 60^\circ$.



Слика 20.

На основу претходног се добија $AK \geqslant OK = R$ и $PQ \geqslant R$. Како је $OP + R = OQ + OC > QC = QP + PC \geqslant R + PC$, па следи $OP > PC$ и $\sphericalangle PCO > \sphericalangle COP = \varepsilon$. Коначно:

$$\alpha + \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOC + \sphericalangle COP < \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle PCO) + \sphericalangle PCO = 90^\circ.$$

Друго решење. Пошто је $\sphericalangle OCP = 90^\circ - \sphericalangle CAB$, довољно је доказати да је $\sphericalangle OCP > \sphericalangle COP$, тј. да је $OP > CP$ (као у првом решењу). Из неједнакости троугла, следи да је довољно показати да је $CP < \frac{1}{2} \cdot CO$.

Нека је $CO = R$. Из синусне теореме следи да је $CP = AC \cos\gamma = 2R \sin\beta \cos\gamma < 2R \sin\beta \cos(\beta + 30^\circ)$. Коначно, важи

$$2 \sin\beta \cos(\beta + 30^\circ) = \sin(2\beta + 30^\circ) - \sin 30^\circ \leqslant \frac{1}{2},$$

одакле следи тврђење задатка.

ИМО '01.2

Нека је $x = \frac{bc}{a^2}$, $y = \frac{ca}{b^2}$, $z = \frac{ab}{c^2}$ и

$$p = \sqrt{1 + 8x}, \qquad q = \sqrt{1 + 8y}, \qquad r = \sqrt{1 + 8z}. \tag{1}$$

Дата неједнакост постаје

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\geqslant 1, \qquad \text{односно}$$

$$(pq+qr+rp)^2-(pqr)^2\geqslant 0, \tag{2}$$

при услову $x, y, z > 0$, $xyz = 1$. Из (1) следи да је

$$(pq+qr+rp)^2-(pqr)^2=(pq)^2+(qr)^2+(rp)^2+2pqr(p+q+r)-(pqr)^2$$

$$2+8(x+y+z)+2pqr(p+q+r)-512.$$

Из неједнакости између аритметичке и геометријске средине, следи

$$2+8(x+y+z)\geqslant 2+8\cdot 3(xyz)^{\frac{1}{3}}=26; \tag{3}$$

$$\text{и}\quad 2pqr(p+q+r)\geqslant 6(pqr)^{\frac{4}{3}}=6\left\{(1+8x)(1+8y)(1+8z)\right\}^{\frac{2}{3}}=$$

$$6\left\{1+8(x+y+z)+64(xy=yz+zx)+512\right\}^{\frac{2}{3}}\geqslant$$

$$6\cdot(1+8\cdot 3+64\cdot 3+512)=486. \tag{4}$$

Сабирањем (3) и (4) се добија (2). Једнакост важи ако и само ако је $x=y=z$, тј. ако и само ако је $a=b=c$.

Друго решење. Одредимо $k>0$ тако да је

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^k}{a^k+b^k+c^k} \qquad \text{за све } a,b,c>0. \tag{1}$$

Неједнакост (1) је еквивалентна са $(a^k+b^k+c^k)^2\geqslant a^{2k-2}(a^2+8bc)$, одакле се сређивањем добија

$$(a^k+b^k+c^k)^2-a^{2k}\geqslant 8a^{2k-2}bc.$$

Из неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи

$$(a^k+b^k+c^k)^2-a^{2k}=(b^k+c^k)(2a^k+b^k+c^k)\geqslant 2b^{\frac{k}{2}}c^{\frac{k}{2}}\cdot 4a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{4}}c^{\frac{k}{4}}\geqslant 8a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{3k}{4}}c^{\frac{3k}{4}},$$

па се може узети $k=\dfrac{4}{3}$. Дакле:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant$$

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}+\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}+\frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}=1.$$

Треће решење. Нека је $x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$, $y = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$ и $z = \dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$. Тада важи

$$f(x,y,z) = \left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right) = 8^3.$$

Треба доказати да је $x+y+z \geqslant 1$.

Пошто је f опадајућа по променљивима x, y, z, довољно је доказати да из $x, y, z > 0$, $x+y+z = 1$ следи $f(x,y,z) \geqslant 8^3$. Пошто је $\dfrac{1}{x^2} - 1 = \dfrac{(x+y+z)^2 - x^2}{x^2} = \dfrac{(2x+y+z)(y+z)}{x^2}$, неједнакост $f(x,y,z) \geqslant 8^3$ постаје

$$\frac{(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)(y+z)(z+x)(x+y)}{x^2y^2z^2} \geqslant 8^3,$$

која је непосредна последица неједнакости између аритметичке и геометријске средине.

Четврто решење. Важи и општије тврђење:

Важи $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+kbc}} + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+kca}} + \dfrac{c}{\sqrt{c^2+kab}} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{1+k}}$ *за све* $a, b, c > 0$ *ако и само ако је* $k \geqslant 8$.

Доказ. Нека је $k \geqslant 8$, а x, y и z дефинисани као у првом решењу. Неједнакост се своди на

$$F(x,y,z) = f(x) + f(y) + f(z) \geqslant \frac{3}{\sqrt{1+k}}, \quad \text{где је } f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+kt}}, \tag{1}$$

за све $x, y, z > 0$ такве да је $xyz = 1$. Доказаћемо неједнакост (1) испитивањем екстремних вредности функције $F(x,y,z)$ (Лагранжов метод множилаца).

„Граница“ скупа $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid xyz = 1\}$ се састоји од тачака (x,y,z) којима једна од x, y, z тежи 0. Нека је то x (то се може претпоставити без умањења општости). Следи

$$F(x,y,z) \geqslant f(x) = 1 \geqslant \frac{3}{\sqrt{1+k}}.$$

Ако се минимум функције $F(x,y,z)$ достиже у унутрашњости скупа D, постоји $\lambda \in \mathbb{R}$, тако да је (x,y,z) стационарна тачка функције $F(x,y,z) + \lambda xyz$, тј. (x,y,z,λ) се налази међу решењима система $f'(x) + \lambda yz = f'(y) + \lambda xz = f'(z) + \lambda xy = 0$, $xyz = 1$. Елиминисањем λ добија се

$$xf'(x) = yf'(y) = zf'(z), \quad xyz = 1. \tag{2}$$

Функција $tf'(t) = \dfrac{-kt}{2(1+kt)^{\frac{3}{2}}}$ опада на $\left(0, \frac{2}{k}\right]$, а расте на $\left[\frac{2}{k}, \infty\right)$, јер је $(tf'(t))' = \dfrac{k(kt-2)}{4(1+kt)^{\frac{5}{2}}}$. Дакле, бар два од x, y, z морају бити једнаки.

Ако је $x = y = z$, тада је $(1,1,1)$ једино решење (2). Нека је $x = y \neq z$. Пошто је $(yf'(y))^2 - (zf'(z))^2 = \dfrac{k^2(z-y)(k^3y^2z^2 - 3kyz - y - z)}{4(1+ky)^3(1+kz)^3}$, из (2) следи $y^2z = 1$ и $k^3y^2z^2 - 3kyz - y - z = 0$. Елиминисањем z се добија једначина

$$\frac{k^3}{y^2} - 3\cdot\frac{k}{y} - y - \frac{1}{y^2} = 0, \qquad \text{тј.} \qquad g(y) = y^3 + 3ky - k^3 + 1 = 0.$$

Како је $g'(y) = 3y^2 + 3k > 0$ и $g(k-1) = 0$, једино реално решење последње једначине је $y = k-1$. Следи да су $\left(k-1, k-1, \frac{1}{(k-1)^2}\right)$ (и, наравно, тачке добијене пермутацијама координата) једина решења система (2) у којима x, y, z нису сви једнаки. Како је $F\left(k-1, k-1, \dfrac{1}{(k-1)^2}\right) = \dfrac{k+1}{\sqrt{k^2-k+1}} > F(1,1,1) = 1$, следи (1).

За $0 < k < 8$ важи $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+kbc}} + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+kca}} + \dfrac{c}{\sqrt{c^2+kab}} > \dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$. Фиксирањем c и пуштањем a и b да теже нули, прва два сабирка у претходном изразу ће тежити нули, а трећи ће тежити ка 1. Како је $\dfrac{3}{\sqrt{1+k}} > 1$ за $0 < k < 8$, за ове вредности k горња неједнакост не важи.

ИМО '01.3

Нека је G скуп девојчица, B скуп дечака, P скуп задатака, $P(g)$ скуп задатака које је решила девојчица $g \in G$, $P(b)$ скуп задатака које је решио дечак $b \in B$, $G(p)$ скуп девојчица које су решиле задатак $p \in P$ и $B(p)$ скуп дечака који су решили задатак $p \in P$.Ако не важи тврђење задатка, тада за свако $p \in P$ важи $|G(p)| \leqslant 2$ или $|B(p)| \leqslant 2$. Нека је задатку $p \in P$ додељена црвена боја ако је $|G(p)| \leqslant 2$, а плава иначе.

Размотримо таблицу 21×21 у којој врсте претстављају девојчице, а колоне дечаке. За свако $g_i \in G$, $b_i \in B$, где су $i, j \in \{1, 2, \ldots, 21\}$ нека се пољу (g_i, b_j) придружи боја на следећи начин:

изабере се $p \in P(g_i) \cap P(b_j)$ (такво p постоји по условима задатка) и уоченом пољу се придружи боја која је придружена и задатку p.

На основу Дирихлеовог принципа бар 221 поље је обојено истом бојом, па следи да нека врста садржи 11 плавих поља или нека колона садржи 11 црвених поља.

Нека није тачно тврђење задатка и нека врста која одговара девојчици g_i садржи 11 плавих поља. За свако од ових поља важи:

задатак који је биран и чија је боја придружена пољу, решило је највише два дечака.

Следи да постоји најмање $\left[\frac{11}{2}\right]+1=6$ задатака које је решила девојчица g_i, па је, због услова задатка, она решила тачно тих 6 задатака. Међутим, тада за највише 12 дечака постоји задатак који су решили истовремено са девојчицом g_i, што је контрадикција са условом задатка.

Аналогно се добија контрадикција и у случају да нека колона садржи 11 црвених поља.

Дакле, постоји задатак $p \in P$ за који је $|G(p)| \geqslant 3$ и $|B(p)| \geqslant 3$.

Друго решење. Нека је задатак *тежак за дечаке* ако га је решило највише два дечака, а *тежак за девојчице* ако су га решиле највише две девојчице.

Проценимо број парова дечак–девојчица, таквих да су обоје решили неки задатак тежак за дечаке. За произвољну девојчицу, међу не више од шест задатака које је решила, бар један је решен од стране три дечака, тј. највише пет од њих могу бити тешки за дечаке. Како је сваки такав задатак решило највише два дечака, број тражених парова не прелази $21 \cdot 5 \cdot 2 = 210$.

Аналогно, постоји највише 210 прова дечак–девојчица, таквих да су обоје решили неки задатак тежак за девојчице. Како постоји $21^2 > 2 \cdot 210$ парова дечак–девојчица и како је сваки од њих решио бар један задатак, следи тврђење задатка.

Напомена. Важи и генерализација тврђења задатка:

> *Ако $2(m-1)(n-1)+1$ дечака и $2(m-1)(n-1)+1$ девојчица учествује на неком такмичењу и за сваког дечака и сваку девојчицу постоји бар један задатак који је свако од њих решио. Притом нико није решио више од m задатака. Тада је неки задатак решило бар n дечака и n девојчица.*

ИМО '01.4

Ако не постоје пермутације са наведеним својством, следи да $S(a)$ даје различите остатке при дељењу са $n!$. Тада за суму свих израза $S(a)$, кад a пролази све пермутације, важи

$$\sum_a S(a) \equiv 0+1+\ldots+(n!-1)=\frac{(n!-1)n!}{2} \equiv \frac{n!}{2} \pmod{n!}.$$

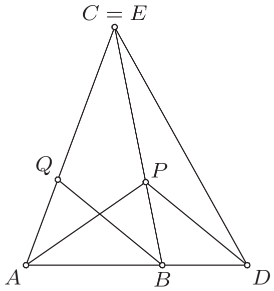
Са друге стране, коефицијент уз k_i у $\sum_a S(a)$ је $(n-1)! \cdot (1+2+\ldots+n) = \frac{n+1}{2} \cdot n!$ за све i, одакле се добија

$$\sum_a S(a) \equiv \frac{n+1}{2} \cdot (k_1+\ldots+k_n) \cdot n! \equiv 0 \pmod{n!},$$

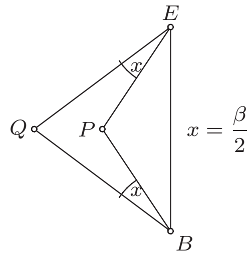
за све непарне n. Из добијене контрадикције следи тврђење задатка.

ИМО '01.5

Нека су $\alpha = 60^\circ$, β и γ одговарајући углови датог троугла. Нека су D и E тачке на правама AB и AQ, редом, тако да је $A-B-D$ и $A-Q-E$, $BD = BP$ и $QE = QB$. По условима задатка је $AD = AB + BP = AQ + QB = AE$. Како је $\sphericalangle PAD = \sphericalangle PAE$, троуглови APD и APE су подударни, па је $\sphericalangle AEP = \sphericalangle ADP = \dfrac{\beta}{2} = \sphericalangle QBP$ (јер је $\sphericalangle ABP$ спољашњи за једнакокраки троугао BDP, видети слику 21). Одавде је $\sphericalangle QEP = \sphericalangle QBP$.



Слика 21.



Слика 22.

Ако P не припада BE, тада је $\triangle QBP \cong \triangle QEP$ ($\triangle QBE$ је једнакокраки, $QB = QE$, $PQ = PQ$, $\sphericalangle QBP = \sphericalangle PEQ$; лако се види да мора доћи до подударности, видети слику 22), па P припада симетрали $\sphericalangle BQE$. Међутим, како P припада и симетрали $\sphericalangle QAB$, мора бити центар споља приписаног круга $\triangle QAB$ (који додирује страницу QB), па припада и симетрали $\sphericalangle QBD$. Следи да је $\sphericalangle PBQ = \dfrac{\beta}{2} = \sphericalangle PBD = 180^\circ - \beta$, па је $\beta = 120^\circ$, што је немогуће ($\alpha = 60^\circ$, $\gamma > 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$).

Дакле, $P \in BE$, односно $E \equiv C$. Из $QC = QB$ следи да је $120^\circ - \beta = \gamma = \dfrac{\beta}{2}$, тј. $\beta = 80^\circ$ и $\gamma = 40^\circ$ (за троугао са овим угловима важе услови задатка).

ИМО '01.6

Дата једнакост је еквивалентна са $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$. Сређивањем се добија $(ab+cd)(ad+bc) = ac(b^2+bd+d^2) + bd(a^2-ac+c^2)$, односно

$$(ab+cd)(ad+bc) = (ac+bd)(a^2-ac+c^2). \qquad (1)$$

Нека је $ab+cd$ прост број. Из $a>b>c>d$ следи да је $(a-d)(b-c)>0$ и $(a-b)(c-d)>0$, односно

$$ab+cd>ac+bd>ad+bc, \tag{2}$$

одакле следи да је $ac+bd$ узајамно прост са $ab+cd$. Међутим, тада из (1) следи да $ac+bd$ дели $ad+bc$, што је у контрадикцији са (2).

Напомена. Услов (1) се могао добити применом косинусне и Птоломејеве теореме на четвороугао $XYZT$, где је $XY=a$, $YZ=c$, $ZT=b$, $TX=d$ и $\sphericalangle Y=60^\circ$, $\sphericalangle T=120^\circ$ (одатле је, вероватно, и настала мотивација за састављање овог задатка). Иначе, постоје четворке које задовољавају услове задатка, на пример $(21,18,14,1)$ и $(65,50,34,11)$.

ИМО '02.1

Нека је a_i број плавих тачака чија је x координата i, а b_i број плавих тачака чија је y координата i. Треба доказати да је $a_0a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-1}=b_0b_1\cdot\ldots\cdot b_{n-1}$. Важи и више, $a_0,\ldots,a_{n-1}$ је пермутација низа $b_0,\ldots,b_{n-1}$.

Доказ индукцијом по броју црвених тачака. Тврђење је тривијално ако су све тачке плаве. Иначе, нека је (x,y) црвена тачка за коју је $x+y$ највеће. Тада је $a_x=b_y=n-x-y-1$. Ако се боја те тачке промени у плаво, a_x и b_y се повећавају за 1. По индуктијској претпоставци (да тврђење важи ако има мање црвених тачака), $a_0,\ldots,a_{n-1}$ са a_x повећаним за 1 је пермутација низа $b_0,\ldots,b_{n-1}$ са b_y повећаним за 1. Дакле, $a_x=b_y$, одакле следи тврђење.

Друго решење. Нека су a_i и b_i као у првом решењу. Треба доказати да је $a_0a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-1}=b_0b_1\cdot\ldots\cdot b_{n-1}$.

Доказ индукцијом по n. Тврђење је тривијално за $n=1$. Нека је тврђење тачно за контуре T чије су тачке обојене шодно условима задатка, а чији је формат мањи од n. Ако контура T нема ниједну црвену тачку, тврђење је тривијало. Иначе, нека је p максимална апциса црвених тачака, а q максимална ордината црвених тачака чија је апциса p. Изостављањем прве врсте скупа T се добија контура на коју се може применити индуктивна претпоставка (ордината сваке преостале тачке се смањи за 1). Ако је $n>p+2$, пошто су све тачке T са апцисом већом од p плаве, следи да је $a_{p+i}=n-(p+i)$ за $1\leqslant i\leqslant n-1-p$ (и, наравно, по услову задатка a_i се не мења за $0\leqslant p$), па је

$$b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_{n-1}=a_0a_1\cdot\ldots\cdot a_p\cdot(n-p-2)!\,.$$

Како је $b_0=n-1-p$, следи $b_0b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_{n-1}=a_0a_1\cdot\ldots\cdot a_p\cdot(n-p-1)!=a_0a_1\cdot\ldots\cdot a_p$. Ако је $n=p+1$, опет важи исто, јер је тада $b_0=a_{n-1}=0$.

ИМО '02.2

Пошто је $\sphericalangle BCA = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOA = \sphericalangle BOD$, праве CA анд OD су паралелне, тј. четвороугао $DOJA$ је паралелограм. Следи да је $AJ = OD = OE = AE = AF$. Одавде је

$$\sphericalangle JFE = \sphericalangle JFA - \sphericalangle EFA = \sphericalangle AJF - \sphericalangle ECA = \sphericalangle AJF - \sphericalangle ACF = \sphericalangle CFJ.$$

Из $AE = AF$ следи и да је CJ симетрала $\sphericalangle ECF$, па је J центар уписаног круга $\triangle CEF$.

Друго решење. Без умањења општости, може се претпоставити да је кружница k јединична. Нека је дата контура смештена у координатну раван, тако да је $O(0,0)$, $A(1,0)$ и $D(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Тада важи $B(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$, $C(-\cos 2\alpha, -\sin 2\alpha)$, $E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Како је $\overrightarrow{CA} = (1 - \cos 2\alpha, \sin 2\alpha) = 2\cos\alpha \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha) = 2\cos\alpha \cdot \overrightarrow{OD}$, следи да је $CA \parallel OD$, па је четвороугао $DOJA$ паралелограм. Следи $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OD}$, тј. $J(1 - \cos\alpha, -\sin\alpha)$. Из једнакости лукова $\widehat{AE}$ и $\widehat{AF}$, следи да је CJ симетрала $\sphericalangle ECF$, па, да би се доказало тврђење задатка, довољно је доказати да су вектори

$$\frac{\overrightarrow{FC}}{\|\overrightarrow{FC}\|} + \frac{\overrightarrow{FE}}{\|\overrightarrow{FE}\|} \qquad \text{и} \qquad \overrightarrow{FJ}$$

истосмерни. Важи $\overrightarrow{FE} = (0, \sqrt{3})$, тј. $\dfrac{\overrightarrow{FE}}{\|\overrightarrow{FE}\|} = (0,1)$, и, слично $\overrightarrow{FC} = \left(-\cos 2\alpha - \dfrac{1}{2}, -\sin 2\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, тј. $\|\overrightarrow{FC}\|^2 = 2 + \cos 2\alpha - \sqrt{3}\sin 2\alpha = 2 + 2\cos(2\alpha + 60^\circ) = 4\cos^2(\alpha + 30^\circ)$. По услову задатка је $0 < 2\alpha < 120^\circ$, па је $\cos(\alpha + 30^\circ) > 0$, одакле је $\dfrac{\overrightarrow{FC}}{\|\overrightarrow{FC}\|} + \dfrac{\overrightarrow{FE}}{\|\overrightarrow{FE}\|} =$

$$\frac{1}{2\cos(\alpha + 30^\circ)} \cdot \left(-\cos 2\alpha - \frac{1}{2}, -\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cos(\alpha + 60^\circ)\right) =$$

$$\frac{1 + 2\cos\alpha}{2\cos(\alpha + 30^\circ)} \cdot \overrightarrow{FJ},$$

јер је $\overrightarrow{FJ} = \left(\dfrac{1}{2} - \cos\alpha, \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sin\alpha\right)$.

ИМО '02.3

Нека је (m, n) пар који задовољава услове задатка. Нека се при дељењу полинома $f(x) = x^m + x - 1$ са $g(x) = x^n + x^2 - 1$ добија количник $q(x)$ и остатак $r(x)$. Како су коефицијенти полинома $f(x)$ и $g(x)$ цели и како је најстарији коефицијент полинома $g(x)$ једнак 1, коефицијенти полинома $q(x)$ и $r(x)$ су цели. Пошто је $\deg r(x) < \deg g(x)$, за довољно велико x важи $|R(x)| < |G(x)|$, па како је $\dfrac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{g(x)}$, то је $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ цео број за бесконачно много целих x, па је једнак нули бесконачно много пута, тј. $r(x) \equiv 0$, односно $f(x)$ је дељив са $g(x)$.

Нека је $m = n + k$, $k \geqslant 0$. Како је

$$f(x) = x^k g(x) + (1-x)(x^{k+1} + x^k - 1),$$

полином $g(x)$ дели $(1-x)(x^{k+1}+x^k-1)$, па и $x^{k+1}+x^k-1$ (јер је $g(1) \neq 0$). Следи $k+1 \geqslant n \geqslant 3$. Како је $g(0) < 0$ и $g(1) > 0$, $g(x)$ има нулу $\alpha \in (0,1)$. Следи $\alpha^n \geqslant \alpha^{k+1}$ и $\alpha^2 \geqslant \alpha^k$, одакле је $1 = \alpha^n + \alpha^2 \geqslant \alpha^{k+1} + \alpha^k = 1$, па у обе претходне неједнакости мора важити једнакост. Следи $n = k+1$, $k = 2$, тј. $n = 3$ и $m = 5$.

Како је

$$x^5 + x - 1 = (x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1),$$

пар $(5, 3)$ задовољава услове задатка.

Друго решење. Као у првом решењу закључује се да је полином $f(x)$ дељив са $g(x)$.

Полином $g(x)$ има нулу $\alpha \in (0,1)$, јер је $g(0) = -1 < 0$ и $g(1) = 1 > 0$. Следи да је $f(\alpha) = 0$, па је

$$\alpha^m + \alpha = \alpha^n + \alpha^2 = 1.$$

Ако је $m \geqslant 2n$, тада је $1-\alpha = \alpha^m \leqslant (\alpha^n)^2 = (1-\alpha^2)^2$, односно $\alpha(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha-1) \geqslant 0$. Међутим, ово није могуће, јер је $\alpha^2+\alpha-1 > \alpha^m+\alpha-1 = 0$. Дакле, важи $m < 2n$.

Следи $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x^{m-n} - \dfrac{(x^{m-n+2} - x^{m-n} - x + 1)}{g(x)}$, па је $h(x) = x^{m-n+2} - x^{m-n} - x + 1$ дељив са $g(x)$. Међутим, $\deg h(x) = m - n + 2 \leqslant n + 1 = \deg g(x) + 1$, па је или $h(x) = g(x)$ или $h(x) = (x-a)g(x)$ за неко $a \in \mathbb{Z}$. Како је $\deg h(x) < \deg g(x)$, следи да је $m = 2n-1$, одакле је $h(x) = x^{n+1} - x^{n-1} - x + 1$. Како је $h(1) = 0$, следи $a = 1$, тј. $h(x) = (x-1)(x^n + x^2 - 1) = x^{n+1} - x^n + x^3 - x^2 - x + 1$, одакле је $n = 3$, тј. $m = 5$.

Напомена. Важи и следећа теорема:

> *Полином $x^n \pm x^k \pm 1$ је или иредуцибилан или је једнак производу полинома $x^2 \pm x + 1$ и иредуцибилног фактора.*

ИМО '02.4

(а) Како је $\dfrac{d_i}{n} = \dfrac{1}{d_{k+1-i}}$, следи $\dfrac{D}{n^2} = \dfrac{1}{d_k d_{k-1}} + \ldots + \dfrac{1}{d_2 d_1}$. Даље је

$$\frac{1}{d_2 d_1} \leqslant \frac{D}{n^2} \leqslant \left(\frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = 1 - \frac{1}{d_k} < 1$$

(пошто је $d_1 = 1$), тј. $1 < \dfrac{n^2}{D} \leqslant d_2$. Дакле, важи $D < n^2$.

(б) Ако $D \mid n^2$, тада је $\dfrac{n^2}{D}$ делилац броја n^2, који је различит од $1 (= d_1)$ и који није већи од d_2. Међутим, d_2 најмањи прост делилац броја n (самим тим и од n^2), па је $\dfrac{n^2}{D} = d_2$ и $d_{k-1} = \dfrac{n}{d_2}$. Следи $D \geqslant d_{k-1}d_k = \dfrac{n}{d_2} \cdot n = D$, тј. $D = d_{k-1}d_k$, одакле је $k = 2$, што је тачно ако и само ако је $n = d_2$, тј. ако и само ако је број n прост.

ИМО '02.5

Заменом $x = z = 0$ и $t = y$ у дату функционалну једначину, добија се $4f(0)f(y) = 2f(0)$ за свако y. Ако је $f(0) \neq 0$, добија се да је $f(y) = \dfrac{1}{2}$ за свако y, тј. f је идентички једнако $\dfrac{1}{2}$.

Иначе је $f(0) = 0$. Заменом $z = t = 0$ се добија

$$f(xy) = f(x)f(y) \qquad \text{за све } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ако је $f(y) = 0$ за неко $y \neq 0$, тада је $f(x) = f\left(y \cdot \frac{x}{y}\right) = f(y) \cdot f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, тј. f је идентички једнако нули.

Дакле, ако постоји још решења, мора бити $f(y) \neq 0$ за $y \neq 0$. Заменом $x = y = 1$ у (1), следи $(f(1))^2 = f(1)$, па следи $f(1) = 1$. Заменом $x = 0$, $y = t = 1$ у полазну функционалну једначину, добија се $2f(z) = f(z) + f(-z)$ за свако z, тј. f је парна функција, па ју је довољно одредити на $[0, \infty)$.

Из (1) је $f(x) = f(\sqrt{x})^2 \geqslant 0$ за свако $x \geqslant 0$, па заменом $t = x$ анд $z = y$ у полазну функционалну једначину следи $f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2 \geqslant (f(x))^2 = f(x^2)$ за свако $x, y \geqslant 0$, тј. f је расућа на $[0, \infty)$.

Заменом $y = z = t = 1$ у полазну функционалну једначину следи

$$f(x+1) = 2(f(x) + 1) - f(x-1) \qquad \text{за свако } x. \tag{2}$$

Уз $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, лако се показује индукцијом да важи $f(n) = n^2$ за свако природно n. Ако је $r \in \mathbb{Q}^+$, тада је $r = \dfrac{p}{q}$, па из (1) и претходног следи $p^2 = f(p) = f(qr) = f(q)f(r) = q^2 \cdot f(r)$, па претходно важи и за позитивне рационалне бројеве. Како је f растућа за $x > 0$, следи $f(x) = x^2$ за свако $x \geqslant 0$, а по горе наведеном и за свако $x \in \mathbb{R}$.

Лако се проверава да су функције $f(x) = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2}$ и $f(x) = x^2$ решења дате функционалне једначине.

ИМО ’02.6

Нека је θ_{ij} за $1 \leqslant i,j \leqslant n$ и $i \neq j$ скуп свих тачака кружнице k_i, таквих да тангента на k_i у тим тачкама сече k_j. Лако се види да је θ_{ij} унија два лука кружнице k_i (између одговарајуће унутрашње и одговарајуће спољашње заједничке тангенте на k_i и k_j), па ако је $2\alpha_{ij}$ угао између заједничких унутрашњих тангенти на k_i и k_j, тада је θ_{ij} унија два лука кружнице k_i чији је централни угао α_{ij} и $\sin\alpha_{ij} = \dfrac{2}{O_iO_j}$. По условима задатка су скупови θ_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ дисјунктни и важи $\theta_{ij} = \theta_{ji}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

Руб конвексног омотача уоченог скупа се састоји од тангентних дужи (делови заједничких спољашњих тангенти одговарајућих кружница) и од лукова кружница, којима је збир централних углова 2π и који су дијсунктни са скуповима θ_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ (по конструкцији). Следи да је збир бројева α_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ не већи од $2(n-1)\pi$, па је

$$2(n-1)\pi \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2\alpha_{ij} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 4\alpha_{ij} \geqslant 4\cdot \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \sin\alpha_{ij} = 8\cdot \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{O_iO_j},$$

одакле следи тврђење задатка.

ИМО ’03.1

Нека је $D = \{x - y \mid x,y \in A\}$. Број елемената скупа D није већи од $101 \cdot 100 + 1$. Скупови $A + t_i$ и $A + t_j$ су дисјунктни ако и само ако је $t_i - t_j \notin D$. Довољно је још изабрати 100 таквих елемената $t_1, \ldots, t_{100}$.

Нека је t_1 произвољан елемент скупа $S \setminus D$ (такав елемент постоји, пошто је број елемената скупа S већи од броја елемената скупа D). Нека је изабрано k ($k \leqslant 99$) елемената $t_1, \ldots, t_k$ из D, тако да разлика произвољна два од њих не припада скупу D. Елемент t_{k+1} се бира тако да припада скупу S и не припада ниједном од скупова $t_1 + D, t_2 + D, \ldots, t_k + D$ (ово је могуће, пошто сваки од претходних скупова садржи највише $101 \cdot 100 + 1$ елемената, тј. њихова унија садржи највише $99 \cdot (101 \cdot 100 + 1) = 999999 < 1000000$ елемената).

Напомена. Важи и општије тврђење:

> *Нека је A k-елементни подскуп скупа $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ и нека је n природан број за који важи $(n-1)(k^2 - k + 2) < 2m$. Тада постоје бројеви $t_1, t_2, \ldots, t_n \in S$ такви да су скупови $t_j + A$, $j = 1, 2, \ldots, n$, по паровима дисјунктни.*
>
> *Доказ.* Нека су низ скупова $(S_i)_{i\geqslant 0}$ и низ бројева $(t_i)_{i\geqslant 1}$ дефинисани са:
>
> $S_0 = S$; ако је $S_{i-1} \neq \emptyset$ онда је $t_i = \min S_{i-1}$ и $S_i = S_{i-1} \setminus \{t_i + x - y \mid x, y \in A\}$.

Ако је $t \in S_{i-1} \setminus S_i$, онда је $t = t_i$ или постоје $x, y \in A$, $x > y$, такви да је $t = t_i + x - y$. Зато је $|S_i \setminus S_{i-1}| \geqslant 1 + \dfrac{k(k-1)}{2}$, тј. $|S_i| \geqslant |S_{i-1}| - \dfrac{k^2-k+2}{2}$. Следи да је

$$|S_i| \geqslant |S_0| - i \cdot \frac{k^2-k+2}{2} \geqslant m - (n-1) \cdot \frac{k^2-k+2}{2} > 0$$

за $i = 1, 2, .., n-1$, па низ $(t_i)_{i \geqslant 1}$ има добро дефинисаних бар n чланова. Скупови $t_i + A$, $i = 1, 2, \ldots, n$ су по паровима дисјунктни. Заиста, ако би скупови $t_i + A$ и $t_j + A$, $i < j$, имали непразан пресек, постојали би бројеви $x, y \in A$, такви да је $t_i + x = t_j + y$, па следи $t_j = t_i + x - y \notin S_i \supseteq S_{j-1}$, што је противуречно са $t_j \in S_{j-1}$.

Доказ општијег тврђења је модификација доказа у првом решењу. Избором специфичног елемента (минималног) се постиже и много прецизнија процена од тврђења задатка.

ИМО ’03.2

Нека су a и b природни бројеви за које је $\dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k$ природан број. Пошто је $k > 0$, следи да је $2ab^2 \geqslant b^3$, па је $2a \geqslant b$. Ако је $2a > b$, тада из $2ab^2 - b^3 + 1 > 0$ следи да је $a^2 > b^2(2a - b) + 1 > b^2$, тј. $a > b$. Дакле, ако је $a < 2a \leqslant b$, тада је $a = \frac{b}{2}$.

Дата једначина се може посматрати као квадратна по a, односно у облику $a^2 - 2kb^2a + k(b^3 - 1) = 0$, и има два решења, a_1 и a_2, тако да је бар једно у $\mathbb{N}_0$. Из $a_1 + a_2 = 2kb^2$ и $a_1 a_2 = k(b^3 - 1)$ следи да је и друго у $\mathbb{N}_0$. Нека је $a_1 \geqslant a_2$. Тада је $a_1 \geqslant kb^2$ и

$$0 \leqslant a_2 = \frac{k(b^3-1)}{a_1} \leqslant \frac{k(b^3-1)}{kb^2} < b.$$

На основу горњих разматрања, следи да је $a_2 = 0$ или $a_2 = \frac{b}{2}$. Ако је $a_2 = 0$, тада је $b^3 - 1 = 0$, тј. $a_1 = 2k$, $b = 1$. Ако је $a_2 = \frac{b}{2}$, тада је $b = 2t$ за неко $t \in \mathbb{N}$, $k = \frac{b^2}{4}$, $a_1 = \frac{b^4}{2} - \frac{b}{2}$. Следи да су једина могућа решења дате једначине

$$(a, b) \in \left\{(2t, 1),\ (t, 2t),\ (8t^4 - t, 2t) \ \middle|\ t \in \mathbb{N}\right\}.$$

Лако се проверава да је за ове парове испуњен услов задатка.

Друго решење. Ако је $b = 1$ онда је $\dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = \dfrac{a}{2}$, па су парови облика $(2k, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ решења дате једначине.

Нека је је $b > 1$. Ако је $2a < b$, онда је $2ab^2 - b^3 + 1 = (2a - b)b^2 + 1 < 0$, па је вредност разматраног израза негативна, што је немогуће. Ако је $2a = b$, онда је $2ab^2 - b^3 + 1 = (2a - b)b^2 + 1 = 1$, па је вредност разматраног израза једнака a^2, тј. парови облика $(k, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$ су решења дате једначине.

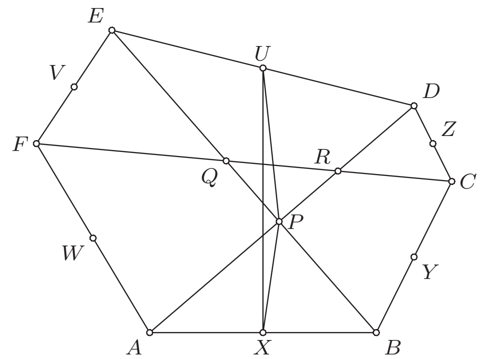
Нек је $b > 1$ и $2a > b$. Из $a^2 \geqslant 2ab^2 - b^3 + 1 > (2a - b)b^2$ и $2a - b \geqslant 1$ следи $a > b$. Из $a^2 > (2a - b)b^2$ и $2a - b > a$ следи $a > b^2$.

Како је $(b^3-1)^2 = 4a^2b^4-(2ab^2-b^3+1)(2ab^2+b^3-1)$, то важи $2ab^2-b^3+1 \mid (b^3-1)^2$. Нека је $(b^3-1)^2 > 2ab^2-b^3+1$. Како је $(b^3-1)^2, 2ab^2-b^3+1 \equiv 1 \pmod{b^2}$, следи да је $\dfrac{(b^3-1)^2}{2ab^2-b^3+1} \equiv 1 \pmod{b^2}$, па је $(b^3-1)^2 \geqslant (2ab^2 - b^3+1)(b^2+1)$. Пошто је $a > b^2$, добија се да је $(b^3-1)^2 \geqslant (2b^4-b^3+1)(b^2+1)$, што је еквивалентно са $(b-1)b^5+2b^4+b^3+b^2 \leqslant 0$, контрадикција. Дакле, $(b^3-1)^2 = 2ab^2-b^3+1$, одакле се добија да је $a = \dfrac{b^4-b}{2}$. Уврштавањем у дату једначину се добија да је $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1} = \dfrac{b^2}{4}$, а то је природан број ако и само ако је b паран природан број. Дакле и парови облика $(8k^4-k, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$ су решења дате једначине (и нема других).

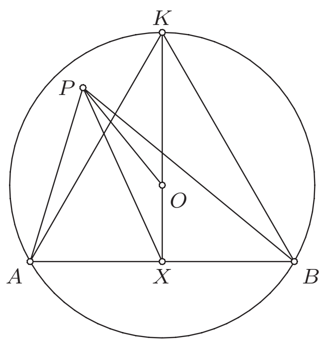
ИМО ’03.3

Нека су X, Y, Z, U, V и W средишта страница AB, BC, CD, DE, EF и FA шестоугла $ABCDEF$, редом, и нека је $P = AD \cap BE$, $Q = BE \cap CF$ и $R = CF \cap AD$ (видети слику 23).

Нека је $\sphericalangle APB \geqslant 60^\circ$. Нека је K тачка која лежи са исте стране праве AB са које се налази и тачка P, таква да је троугао ABK једнакостраничан, и нека је O центар круга описаног око тог троугла. Како је $\sphericalangle APB \leqslant \sphericalangle AKB$, то је $OP \leqslant OK$. Зато је $XP \leqslant XO + OP \leqslant XO + OK = XK = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Јасно је да једнакост важи ако и само ако је $P = K$, тј. ако и само ако је троугао ABP једнакостраничан (видети слику 24).



Слика 23.



Слика 24.

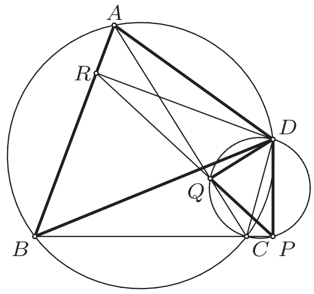
Збир углова $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BQC$ и $\sphericalangle CRD$ једнак је 180°. Ако нису сва три једнака 60°, један од њих је већи од 60°. Нека је то, на пример,

$\sphericalangle APB$. Тада је $XU \leqslant XP+UP < AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+DE\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=(AB+DE)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, а то је противно претпоставци задатка. Следи да је $\sphericalangle APB=\sphericalangle BQC=\sphericalangle CRD=60°$. Троуглови ABP, BCQ, CDR, DEP, EFQ и FAR су једнакостранични. Заиста, ако нпр. троугао ABP није једнакостраничан, опет следи да је $XU \leqslant XP+UP < AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+DE\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=(AB+DE)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, што је противно претпоставци задатка.

Из чињенице да су троуглови ABP, BCQ, CDR, DEP, EFQ и FAR једнакостранични следи да су углови шестоугла $ABCDEF$ једнаки по $120°$.

ИМО '03.4

Тачке P и Q леже на кругу коме је CD пречник. Следи да је $\sphericalangle QPD=\sphericalangle QCD=\sphericalangle ACD=\sphericalangle ABD$ и $\sphericalangle PQD=\sphericalangle PCD=\sphericalangle BAD$, па је $\triangle PQD\sim\triangle BAD$. Одавде следи да је $\dfrac{PQ}{QD}=\dfrac{BA}{AD}$, тј. да је $PQ=AB\cdot\dfrac{DQ}{AD}$. На сличан начин се показује да је $QR=CB\cdot\dfrac{DQ}{CD}$. Следи да је $PQ=QR$ ако и само ако је $AB\cdot\dfrac{DQ}{AD}=CB\cdot\dfrac{DQ}{CD}$. Последња једнакост је еквивалентна са $\dfrac{AB}{CB}=\dfrac{AD}{CD}$. Односи $\dfrac{AB}{CB}$ и $\dfrac{AD}{CD}$ су једнаки односима на које симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ разлажу дуж AC, а они су једнаки ако и само ако симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ секу дуж AC у истој тачки.



Слика 25.

Друго решење. Нека је r полупречник круга описаног око четвороугла $ABCD$. Тачке P и Q леже на кругу коме је CD пречник. Зато је $PQ=CD\cdot\sin\sphericalangle BCA=CD\cdot\dfrac{AB}{2r}$. На сличан начин се се показује да је $QR=AD\cdot\dfrac{CB}{2r}$. Следи да је $PQ=QR$ ако и само ако је $CD\cdot AB=AD\cdot CB$. Последња једнакост је еквивалентна са $\dfrac{AB}{CB}=\dfrac{AD}{CD}$, па се закључак изводи као и у првом решењу.

ИМО ’03.5

Како је $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, следи да је

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| = 2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = 2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)^2.$$

Зато је дата неједнакост еквивалентна са

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)\right)^2 \leqslant \frac{n^2-1}{3}\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2.$$

Како је

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) = \sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)x_k,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)(x_j - x_i) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1}(k-i) - \sum_{j=k+1}^{n}(j-k)\right)x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k-1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}\right)x_k = \frac{n}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)x_k,$$

то је

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) = \frac{2}{n}\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)(x_j - x_i).$$

Коришћењем Кошијеве неједнакост добија се

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)\right)^2 = \frac{4}{n^2}\cdot\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)(x_j - x_i)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{n^2}\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2 = \frac{n^2-1}{3}\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2,$$

како је

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(j-i)^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)j(2j-1)}{6} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}\,.$$

Једнакост важи ако и само ако су сви бројеви $\dfrac{x_j - x_i}{j-i}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, једнаки међу собом, тј. ако и само ако је низ $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ аритметичка прогресија.

ИМО '03.6

Како $p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+p+1 \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, постоји прост број q, такав да $q \mid p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+p+1$ и $p^2 \nmid q-1$. Како је $p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+p+1 \equiv 1 \pmod{p-1}$, то су $p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+p+1$ и $p-1$ узајамно прости, па $q \nmid p-1$. Како је $(p-1)(p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+p+1) = p^p-1$, то $q \mid p^p-1$. Зато је поредак броја p по модулу q једнак p. Следи да $p \mid q-1$ (мала Фермаова теорема).

Нека постоји природан број n такав да је $n^p \equiv p \pmod{q}$. Тада је $1 \equiv n^{q-1} \equiv p^{\frac{q-1}{p}} \pmod{q}$. Како $p \nmid \frac{q-1}{p}$ и како је поредак броја p по модулу q једнак p, то $p^{\frac{q-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{q}$. Из добијене контрадикције следи тврђење задатка.

Напомена. Прост број q задовољава постављени услов ако и само ако је прост и у $K = Q(\sqrt{p})$. Примењујући теорему Чеботарјова о густини на Галоаово затварање поља K (тврђење задатка је специјалан случај ове теореме), добијамо да скуп таквих q има густину $\frac{1}{p}$. Следи да постоји бесконачно много простих бројева q који задовољавају постављени услов.

ИМО '04.1

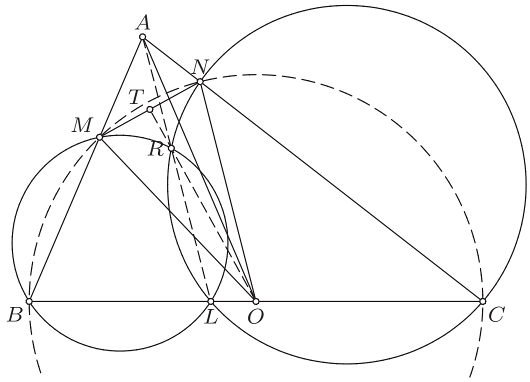
Нека је L пресек симетрале угла $\sphericalangle BAC$ и странице BC, а T средиште дужи MN и нека су α, β, γ углови троугла ABC код темена A, B, C, редом. Нека је k кружница са дијаметром BC, k_B кружница описана око $\triangle BMR$ и k_C кружница описана око $\triangle CNR$.

Како је $OM = ON$, симетрала угла $\sphericalangle MON$ поклапа се са симетралом дужи MN. Стога се у $\triangle AMN$ симетрала угла $\sphericalangle MAN$ и симетрала странице MN секу у тачки R, која припада кружници описаној око троугла $\triangle AMN$ (заиста, из из тетивног четвороугла $BCNM$ следи $\sphericalangle AMN = 180^\circ - \sphericalangle BMN = \gamma$ и $\sphericalangle ANM = 180^\circ - \sphericalangle CNM = \beta$, па је $AM \neq AN$ ($\Leftrightarrow \sphericalangle AMN \neq \sphericalangle ANM \Leftrightarrow \beta \neq \gamma \Leftrightarrow AB \neq AC$; дакле, симетрала угла $\sphericalangle MAN$ и симетрала странице MN нису паралелне, тј. њихов пресек је једна тачка).

Из тетивних четвороуглова $AMRN$ и $BMNC$ следи

$$\sphericalangle ARM = \sphericalangle ANM = \beta = \sphericalangle ABL, \qquad \sphericalangle ARN = \sphericalangle AMN = \gamma = \sphericalangle ACL,$$

одакле се добија да су четвороуглови $BLRM$ и $CLRN$ тетивни. Дакле, L је заједничка тачка кружница k_B и k_C, па се ове кружнице секу у тачки (L) која припада страници BC.



Слика 26.

Друго решење. Нека су ознаке исте као у првом решењу (први пасус). Како је $\triangle ABC \sim \triangle ANM$ (пошто је $\sphericalangle AMN = \gamma$ и $\sphericalangle ANM = \beta$), са одговарајућим тежишним линијама AO и AT, следи $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAT$. Стога је симетрала AR угла $\sphericalangle BAC$ такође и симетрала угла $\sphericalangle OAT$. Одатле следи

$$\frac{RT}{RO} = \frac{AT}{AO}\,.$$

Како су AT и AO одговарајуће тежишне дужи у сличним троугловима и како је O центар кружнице k која пролази и кроз B и кроз M (тј. $OB = OM$) добија се

$$\frac{RT}{RO} = \frac{AT}{AO} = \frac{MN}{BC} = \frac{MT}{BO} = \frac{MT}{MO}\,.$$

Следи да је MR симетрала $\sphericalangle OMN$. Даље је $\sphericalangle BMO = \beta$ ($\triangle BMO$ је једнакокраки) и $\sphericalangle AMN = \gamma$ (из $\triangle ABC \sim \triangle ANM$), па је $\sphericalangle OMN = \alpha$. Коначно $\sphericalangle BMR = \beta + \frac{1}{2}\cdot\alpha = \sphericalangle CLR$ (спољашњи у $\triangle ABL$), одакле следи да тачке B, L, R, M припадају истој кружници. Аналогно се добија да и C, L, R, N припадају истој кружници, па се те две кружнице секу на страници BC.

Треће решење. Како је BC пречник кружнице на коме су и M и N то је $BM \perp CM$ и $BN \perp CN$, па су BN и CM висине $\triangle ABC$ (пошто је он оштроугли, то су ове висине унутар троугла).

Нека симетрала $\sphericalangle MON$ (која је уједно и симетрала дужи MN, јер је $\triangle MON$ једнакокрак, $OM = ON$) сече кружницу описану око $\triangle MAN$ у тачки R'. Тада је $MR' = NR'$ (јер је R' на симетрали дужи MN), па су и лукови $\widehat{MR'}$ и $\widehat{NR'}$ исте дужине, тј. $\sphericalangle MAR' = \sphericalangle R'AN$ одакле је R' и на симетрали угла $\sphericalangle MAN$. Како $A \notin OR'$ ($A \in OR'$, следи да је A на симетрали дужи MN, па је $AM = AN$, тј. следи $AC\cdot\cos\alpha = AB\cdot\cos\alpha \Rightarrow AC = AB$, што је противно услову задатка), те је R' пресек симетрала углова $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle MON$, дакле $R' = R$, па је четвороугао $MRNA$ тетиван.

Кружнице описане око $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$ се секу у R. Нека је друга пресечна тачка ове две кружнице X. Из тетивних четвороуглова $BXRM$, $MRNA$ и $XCNR$ се добија

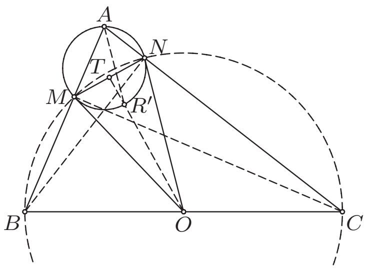
$$\sphericalangle BXR = 180^\circ - \sphericalangle RMB = 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle AMR) = \sphericalangle AMR,$$

$$\sphericalangle CXR = 180^\circ - \sphericalangle RNC = 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle ANR) = \sphericalangle ANR,$$

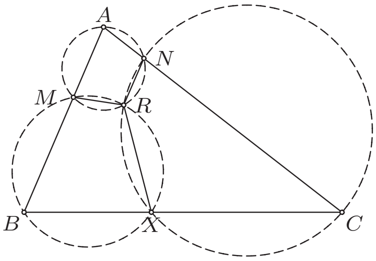
па је

$$\sphericalangle BXR + \sphericalangle CXR = \sphericalangle AMR + \sphericalangle ANR = 180^\circ,$$

одакле следи да су тачке B, X и C колинеарне. Тачка R је унутар угла $\sphericalangle BAC$ (јер је на симетрали угла $\sphericalangle BAC$), па је и X унутар $\sphericalangle BAC$. Тиме је показано да X припада дужи BC, што је и требало доказати.



Слика 27.



Слика 28.

Напомена Тврђење задатка остаје на снази и за произвољну кружницу k, која пролази кроз тачке B и C, где је O њен центар.

ИМО '04.2

Заменом $a = b = c = 0$ у дату једначину (у тој ситуацији важи $ab + bc + ca = 0$) добија се $3P(0) = 2P(0)$, односно $P(0) = 0$. Заменом $b = c = 0$ у дату једначину (у тој ситуацији важи $ab + bc + ca = 0$) добија се $P(-a) = P(a)$, па је $P(x)$ парна функција. Следи да је $P(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots + a_{2n}x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ако $P_1(x)$ и $P_2(x)$ задовољавају дату једначину, тада то важи и за $\alpha P_1(x) + \beta P_2(x)$, па је довољно испитати све полиноме облика x^{2k}, $k \in \mathbb{N}$.

За свако $x \in \mathbb{R}$ за тројку $(a, b, c) = (6x, 3x, -2x)$ је испуњен услов $ab + bc + ca = 0$, па се добија $P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x)$ за свако x. За $P(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, следи

$$3^{2k} + 5^{2k} + (-8)^{2k} - 2 \cdot 7^{2k} = 0.$$

Како је $8^{2k} > 2 \cdot 7^{2k}$ за $k \geqslant 3$, следи да x^{2k} за $k \geqslant 3$ не задовољавају услове задатка.

Како је

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-2(a+b+c)^2=-6(ab+bc+ca),$$

x^2 је решење задатка. Нека је $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$. Тада је $x+y+z=0$, а, по претходном, $x^2+y^2+z^2=2(a+b+c)^2$. Следи

$$xy+yz+zx=-\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)=-(a+b+c)^2,$$

$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)=(a+b+c)^4,$$

$$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2\big[(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\big]=2(a+b+c)^4,$$

па је и x^4 решење задатка.

Дакле, решења дате једначине су полиноми облика $a_2x^2+a_4x^4$, $a_2,a_4\in\mathbb{R}$.

Друго решење. Важе сви закључци првог пасуса претходног решења.

За $k\geqslant 2$, заменом $c=-\dfrac{ab}{a+b}$, $a+b\neq 0$ добија се

$$(a-b)^{2k}+\left(b+\frac{ab}{a+b}\right)^{2k}+\left(\frac{ab}{a+b}+a\right)^{2k}=2\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right)^{2k}.$$

Множењем са $\left(\dfrac{a+b}{b^2}\right)^{2k}$ и сменом $z=\dfrac{a}{b}$ добија се

$$(z^2-1)^{2k}+(2z+1)^{2k}+(z^2+2z)^{2k}=2(z^2+z+1)^{2k}.$$

Како је $k\geqslant 2$, коефицијенти уз z^{4k-2} дају

$$-\binom{2k}{1}+0+4\cdot\binom{2k}{2}=2\cdot\left(\binom{2k}{1}+\binom{2k}{2}\right),$$

одакле је $3\dbinom{2k}{1}=2\dbinom{2k}{2}$, тј. $k=2$. Следи да је за $k\geqslant 2$ једино могуће решење $P(x)=x^4$. Остаје још да се провери да x^2 и x^4 јесу решења.

ИМО '04.3

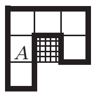
Нека се правоугаоник $m\times n$ може прекрити кукама. За сваку куку A постоји јединствена кука B која покрива његово „унутрашње“ поље (видети слику 29). До на симетрију, постоје три могућности положаја куке B:

(1) унија кука A и B је правоугаоник 4×3 (видети слику 30);

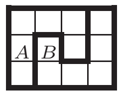
(2) унија кука A и B формирају унију два 2×3 правоугаоника који су „налепљени“ један на други (видети слику 31);

(3) кука A не прекрива „унутрашње“ поље куке B. Међутим, ово је немогуће (остаје непокривено усамљен поље коме су сви суседи покривени, видети слику 32 на којој је ово поље осенчено).

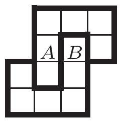
У оба могућа случаја, оригинална кука A је сусед свога суседа B. Стога се све куке могу поделити у парове узајамних суседа, па је укупан број кука паран. Како се свака кука састоји од 6 квадрата, следи да $12 \mid mn$.



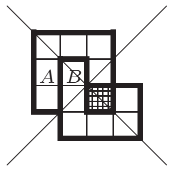
Слика 29.



Слика 30.



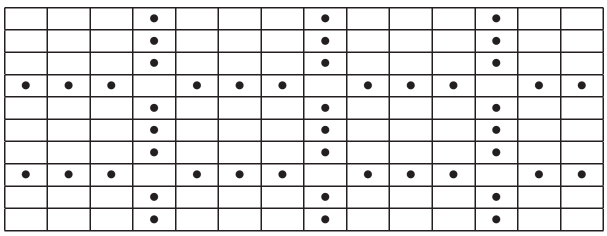
Слика 31.



Слика 32.

Нека је један од m, n дељив са 4 (без умањења општости, због симетрије, нека $4 \mid m$). Ако $3 \mid n$, тада се правоугаоник $m \times n$ може прекрити правоугаоницима димензија 3×4, а самим тим и кукама. Иначе, важи $12 \mid m$. Ако је $n \notin \{1, 2, 5\}$, тада постоје $k, l \in \mathbb{N}_0$, тако да је $n = 3k + 4l$. Како се по претходном правоугаоници $m \times 3k$ и $m \times 4l$ могу прекрити кукама (наравно, ако је $k = 0$ или $l = 0$ нема шта да се прекрива), то је могуће урадити и са правоугаоником $m \times n$. Ако $12 \mid m$ и $n \in \{1, 2, 5\}$, лако се види да прекривање кукама није могуће.

Ако ниједан од m и n није дељив са 4, следи да су и m и n парни (mn је дељиво са 4). Нека је правоугаоник подељен на јединичне квадрате, са врстама и колонома које су означене са $1, \ldots, m$ и $1, \ldots, n$ (од врха ка дну и са лева на десно). Нека је обележен сваки јединични квадрат за који је тачно један од i и j дељив са 4 (видети слику 33).



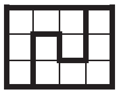
Слика 33.

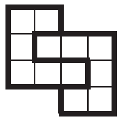
Сваки од два могућа облика који формирају две суседне куке прекрива 12 јединичних квадрата. Лако се види да те две суседне куке у било ком положају покривају или 3 или 5 обележених квадрата, односно непаран број обележених квадрата.

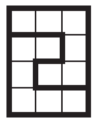
Међутим, ако је $m = 4u + 2$ и $n = 4v + 2$, $u, v \in \mathbb{N}_0$, тада је укупан број обележених квадрата $u(3v + 2) + v(3u + 2) = 2(3uv + u + v)$, што је паран број. Дакле укупан број облика формираних од 2 суседне куке је паран, па је укупан број јединичних квадрата у правоугаонику (mn) дељив са 24, што је немогуће, јер ниједан од бројева m и n није дељив са 4.

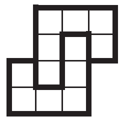
Дакле, кукама се може прекрити правоугаоник ако и само ако је димензија $4k \times 3l$ или $12k \times m$, где је $k, l \geqslant 1$ и $m \geqslant 6$.

Друго решење. Као у првом решењу задатак се своди на случај $4 \nmid m$ и $4 \nmid n$.









Слика 34. Слика 35. Слика 36. Слика 37.

Како је показано у првом решењу, куке се могу поделити у парове, тј. треба испитати да ли се правоугаоник $m \times n$ поже прекрити фигурама са слика 34, 35, 36 и 37 (и онима добијеним из њих симетријама и ротацијама). Како $8 \nmid mn$, број фигура који учествује у тој подели је непаран. Нека је, на пример, број фигура у тој подели који је облика или фигуре са слике 34 или фигуре са слике 35 непаран (нека су то фигуре *првог типа*). Нека су црно означена сва поља у колонама чији је индекс дељив са 4. Лако се види да свака фигура првог типа покрива тачко три поља која су означена црно, тј. укупно непаран број таквих поља. Следи да је укупан број поља која су означена црно која су прекривена фигурама које нису првог типа непаран, што је немогуће, јер такве фигуре покривају или два или четири црна поља. Аналогно се ради други случај (уколико је број фигура које нису првог типа непаран), заменом улоге врста и колона.

ИМО ’04.4

Због симетрије, довољно је показати $t_1 < t_2 + t_3$. Сређивањем израза датог у задатку следи

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i}\right) = n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right) =$$

$$n + t_1 \cdot \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + \frac{1}{t_1} \cdot (t_2 + t_3) + \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ (i,j) \neq (1,2),(1,3)}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right).$$

Из неједнакости аритметичке и геометријске средине је

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \geqslant \frac{2}{\sqrt{t_2 t_3}}, \quad t_2 + t_3 \geqslant 2\sqrt{t_2 t_3}, \quad \text{и} \quad \frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \geqslant 2 \quad \text{за све } i, j.$$

Нека је $a = \dfrac{t_1}{\sqrt{t_2t_3}} > 0$. Из услова задатка следи

$$n^2+1 > \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right) \geqslant n + 2\cdot\frac{t_1}{\sqrt{t_2t_3}} + 2\cdot\frac{\sqrt{t_2t_3}}{t_1} + 2\cdot\left[\binom{n}{2} - 2\right] =$$

$2a + \frac{2}{a} + n^2 - 4$, па је $2a + \frac{2}{a} - 5 < 0$,односно са $(2a-1)(a-2) < 0$, тј. $\frac{1}{2} < a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2t_3}} < 2$. Следи $t_1 < 2\cdot\sqrt{t_2t_3}$, па се из неједнакости између аритметичке и геометријске средине добија $t_1 < 2\cdot\sqrt{t_2t_3} \leqslant t_2+t_3$, што је и требало показати.

Друго решење. Због симетрије, довољно је показати $t_1 < t_2 + t_3$. Ако је $t_1 < t_2$ или $t_1 < t_3$, то је тривијално, па се може претпоставити да је $t_1 \geqslant \max\{t_2, t_3\}$. Сређивањем израза датог у задатку следи

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t\,_i}\right) = n^2 + \sum_{i<j}\left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} - 2\right). \tag{1}$$

Сви сабирци са десне стране (1) су ненегативни, па је она не мања од $n^2 + T$, где је $T = \left(\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 2\right) + \left(\frac{t_1}{t_3} + \frac{t_3}{t_1} - 2\right)$. Пошто је T растућа функција по t_1 за $t_1 \geqslant \max\{t_2, t_3\}$ и пошто за $t_2 + t_3 = t_1$ важи $T = \frac{t_2}{t_3} + \frac{t_3}{t_2} - 1 \geqslant 1$, следи да за $t_2 + t_3 \leqslant t_1$ важи $T \geqslant 1$, па је десна страна у (1) не мања од $n^2 + 1$. Како је последње у контрадикцији са датим условом, следи тврђење задатка.

Напомена. Може се показати (на пример, тражењем екстремних вредности помоћу Лагранжових множилаца), да се n^2+1 из задатка може заменити са $(n + \sqrt{10} - 3)^2$, тако да тврђење задатка остане на снази. Притом је ова процена најбоља могућа.

ИМО '04.5

Нека је четвороугао $ABCD$ тетиван и нека праве BP и DP секу описану кружницу четвороугла $ABCD$ по други пут у E и F, редом. Тада из датог услова следи да је $\widehat{AB} = \widehat{CF}$ и $\widehat{AD} = \widehat{CE}$, па је $BF \parallel AC$ и $DE \parallel AC$. Следи да су $BFED$ и $BFCA$ једнакокраки трапези, па тачка $P = BE \cap DF$ припада заједничкој симетрали дужи BF, ED, AC. Дакле, важи $AP = CP$.

Обратно, нека је $AP = CP$ и нека P припада троугловима ACD и BCD (може се претпоставити без губљења општости, видети коментар на почетку другог решења). Нека BP и DP секу AC у K и L, редом. Тада је $\sphericalangle APK = \sphericalangle CPL$. Пошто је $AP = CP$, тачке K и L су симетричне у односу на симетралу дужи AC (p). Нека је E тачка симетрична са D у односу на p. Тада E припада правој BP и важи $\triangle APD \cong \triangle CPE$. Следи $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ADP = \sphericalangle BEC$, што значи да је четвороугао $BCED$

тетиван. Како је и четвороугао $ACED$ тетиван, такав је и четвороугао $ABCD$.

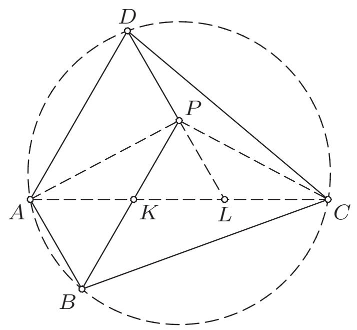
Друго решење. Како је P унутрашња тачка четвороугла $ABCD$, следи да важи $\sphericalangle DBA < \sphericalangle DBC$ ако и само ако је $\sphericalangle BDA < \sphericalangle BDC$. Стога се без умањења општости може претпоставити да се тачка P налази у троугловима $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$.

Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао и нека су K и L пресеци правих BP и DP са правом AC, редом. Тада из услова задатка ($\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA$ и $\sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA$) и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ следи да су троуглови $\triangle DAB$, $\triangle DLC$ и $\triangle CKB$ слични. Одатле се добија $\sphericalangle PLK = \sphericalangle PKL$, односно $PK = PL$.

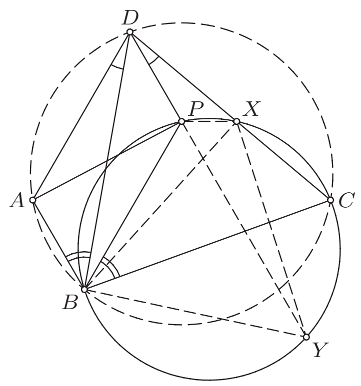
Такође, и троуглови $\triangle ADL$ и $\triangle BDC$ су слични одакле следи

$$\frac{AL}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{KC}{BC},$$

тј. $AL = KC$. Следи да је $\triangle ALP \cong \triangle CKP$ ($AL = CK$, $\sphericalangle ALP = \sphericalangle CKP$, $PL = PK$), одакле је $AP = CP$.



Слика 38.



Слика 39.

Обратно, нека је $AP = CP$. Нека су X и Y тачке пресека кружнице описане око $\triangle BCP$ са правама CD и DP, редом. По услову задатка, троуглови ADB и PDX су слични ($\sphericalangle BDA = \sphericalangle PDC = \sphericalangle PDX$ и $\sphericalangle DBA = \sphericalangle PBC = \sphericalangle DXP$), па су и $\triangle ADP$ и $\triangle BDX$ слични ($\sphericalangle PDA = \sphericalangle PDB + \sphericalangle BDA = \sphericalangle PDB + \sphericalangle PDC = \sphericalangle BDX$ и $\frac{AD}{BD} = \frac{PD}{DX}$). Одатле је

$$\frac{BX}{AP} = \frac{BD}{AD} = \frac{XD}{PD}. \tag{1}$$

Како су и троуглови DPC и DXY слични, следи

$$\frac{YX}{CP} = \frac{XD}{PD}. \tag{2}$$

Како је $AP = CP$, из (1) и (2) следи $BX = YX$, па је

$$\begin{aligned}\sphericalangle DCB &= \sphericalangle XYB = \sphericalangle XBY = \sphericalangle XPY = \sphericalangle PDX + \sphericalangle PXD\\ &= \sphericalangle ADB + \sphericalangle ABD = 180^\circ - \sphericalangle BAD.\end{aligned}$$

Претходна једнакост повлачи да је четвороугао $ABCD$ тетиван.

ИМО '04.6

Ако $20 \mid n$, тада сваки умножак n има последње две цифре парне, па не може бити алтернирајући.

(1) Нека је $(n, 10) = 1$. За свако природно k постоји број $A_k(n) = \overline{10\ldots010\ldots010\ldots010\ldots01} = \dfrac{10^{mk}-1}{10^k-1}$, $m \in \mathbb{N}$, који је дељив са n (по Ојлеровој теореми, за $m = \varphi\left[n(10^k-1)\right]$; у децималном запису броја $A_k(n)$ између сваке две узастопне јединице се налази тачно k нула).

(2) Нека је $n = 2 \cdot 5^r \cdot n_1$, где је $r \geqslant 1$ и $(n_1, 10) = 1$.

Тада за свако k постоји алтернирајући непаран број M_k (са k цифара), који је дељив са 5^k, доказ индукцијом:

Може се изабрати $M_1 = 5$. Нека постоји алтернирајући број M_r са r цифара дељив са 5^r и нека је $c \in \{0,1,2,3,4\}$ такво да је $\frac{M_r}{5^r} \equiv -c \cdot 2^r \pmod 5$ (како је $(2^r, 5) = 1$, последња конгруенција увек има решења). Тада су бројеви $M_r + c \cdot 10^r$ и $M_r + (5+c) \cdot 10^r$ са $r+1$ цифара и једнаки $5^r \cdot \left(\frac{M_r}{5^r} + 2^r \cdot c\right)$ и $5^r \cdot \left(\frac{M_r}{5^r} + 2^r \cdot c + 5 \cdot 2^r\right)$, редом, па су дељиви са 5^{r+1}. Тачно један од њих је алтернирајући. За број M_{r+1} се бира тај број.

Следи да је у овом случају број $10 \cdot A_{2r}(n_1) \cdot M_{2r}$ алтернирајући и дељив са n.

(3) Нека је $n = 2^r \cdot n_1$, где је $r \geqslant 1$ и $(n_1, 10) = 1$.

Тада за свако r постоји алтернирајући непаран број N_k (са $2r$ цифара), који је дељив са 2^{2r+1}, доказ индукцијом:

Може се изабрати $N_1 = 16$. Нека постоји алтернирајући број N_r са $2r$ цифара дељив са 2^{2r+1}. Тада је један од $N_r + m \cdot 10^{2r}$, где је $m \in \{10, 12, 14, 16\}$, дељив са 2^{2r+3}, па се може изабрати за N_{r+1} (ако је $N_r = 2^{2r+1}d$, следи $N_r + m \cdot 10^{2r} = 2^{2r+1}\left(d + 5^r \cdot \frac{m}{2}\right)$ и $d + 5^r \cdot \frac{m}{2} \equiv 0 \pmod 4$, а последња конгруенција има решење $\frac{m}{2} \in \{5,6,7,8\}$ за свако d и r, јер је $(5^r, 4) = 1$).

Следи да је у овом случају број $A_{2r}(n_1) \cdot N_r$ алтернирајући и дељив са n.

Дакле, број је алтернирајући ако и само ако није дељив са 20.

ИМО '05.1

Нека су $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, x$ дефинисане као на слици 40, а d страница датог троугла. Тада је, на основу косинусне теореме

$$a_2^2 + b_1^2 - a_2b_1 = x^2 \quad (1), \quad b_2^2 + c_1^2 - b_2c_1 = x^2, \qquad c_2^2 + a_1^2 - c_2a_1 = x^2$$

и $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = d - x$. Елиминисањем a_2 из (1), добија се $d^2 - 2dx + (a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2) = (d-x)(2a_1 + b_1)$. Аналогно је $d^2 - 2dx + (b_1^2 + b_1c_1 + c_1^2) = (d-x)(2b_1 + c_1)$, одакле је (након одузимања и сређивања)

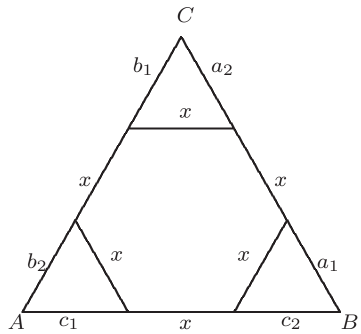
$$(a_1 - c_1)(a_1 + b_1 + c_1 - d + x) = (a_1 - b_1)(d - x) \quad (2).$$

Циклично се добија и

$$(b_1 - a_1)(a_1 + b_1 + c_1 - d + x) = (b_1 - c_1)(d - x) \quad (3) \quad \text{и}$$

$$(c_1 - b_1)(a_1 + b_1 + c_1 - d + x) = (c_1 - a_1)(d - x).$$

Ако су нека два од a_1, b_1, c_1 једнаки (без умањења општости, због цикличности, нека је $a_1 = b_1$), како је $d - x > 0$, из (3) следи $b_1 = c_1 (= a_1)$. Ако су сви различити, опет без умањења општости, нека је $a_1 > b_1 > c_1$. Међутим, по (2), тада би морало бити $a_1 + b_1 + c_1 - d + x > 0$, а по (3) $a_1 + b_1 + c_1 - d + x < 0$, што је немогуће.
Следи $a_1 = b_1 = c_1$. То значи да за дато $a_1 < \frac{d}{2}$ постоји највише један шестоугао са особинама дефинисаним у задатку.



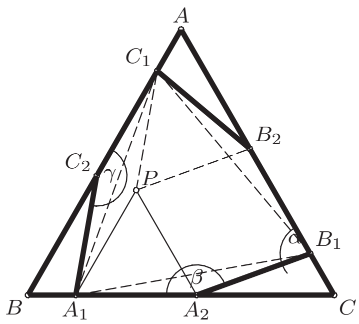
Слика 40.

Са друге стране, за дато $a_1 < \frac{d}{2}$ постоји такав шестоугао (тачка A_1 се добија као тачка за коју је $B - A_1 - C$ и $BA_1 = a_1$; тачка B_1 се добија као тачка за коју је $C - B_1 - A$ и $CB_1 = a_1$; тачка C_1 се добија као тачка за коју је $A - C_1 - B$ и $AC_2 = a_1$; тачке A_2, B_2, C_2 редом, се добијају као пресеци симетрала дужи A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 са BC, CA, AB редом; овако конструисан шестоугао задовољава услове задатка, што следи непосредно из $\triangle A_1CB_1 \cong \triangle B_1AC_1 \cong \triangle AC_1BA_1$ (два пара једнаких страница и угао између њих)).

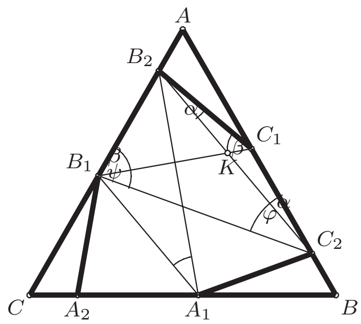
Међутим, за овакав шестоугао је тврђење задатка тривијално (дате три дужи се секу у центру датог троугла).

Друго решење. Нека је P тачка унутар $\triangle ABC$, таква да је $\triangle A_1A_2P$ једнакостраничан. Како је $A_1P \parallel C_1C_2$ и $A_1P = C_1C_2$, четвороугао $A_1PC_1C_2$ је ромб. Аналогно се показује да је и четвороугао $A_2PB_2B_1$

ромб, па је $\triangle C_1B_2P$ једнакостраничан. Нека је $\alpha = \sphericalangle B_2B_1A_2$, $\beta = \sphericalangle B_1A_2A_1$, и $\gamma = \sphericalangle C_1C_2A_1$. Тада су α и β спољашњи углови $\triangle CB_1A_2$, са $\sphericalangle A_2CB_1 = 60^\circ$, па је $\alpha + \beta = 240^\circ$. Како је $\sphericalangle B_2PA_2 = \alpha$ и $\sphericalangle C_1PA_1 = \gamma$, следи $\alpha + \gamma = 360^\circ - (\sphericalangle C_1PB_2 + \sphericalangle A_1PA_2) = 240^\circ$, одакле је $\beta = \gamma$. Аналогно се доказује да је и $\sphericalangle C_1B_2B_1 = \beta$, па $\triangle A_1A_2B_1 \cong \triangle B_1B_2C_1 \cong \triangle C_1C_2A_1$, тј. $\triangle A_1B_1C_1$ је једнакостранични. Следи да су праве B_1C_2, A_1B_2 и C_1A_2 симетрале страница овог троугла, па се секу у једној тачки.



Слика 41.



Слика 42.

Треће решење. Нека је $\alpha = \sphericalangle AC_2B_2$, $\beta = \sphericalangle AB_1C_1$ и K тачка пресека правих B_1C_1 и B_2C_2. Како су троуглови $B_1B_2C_1$ и $B_2C_1C_2$ једнакокраки, следи $\sphericalangle B_1C_1B_2 = \sphericalangle\beta$ и $\sphericalangle C_2B_2C_1 = \alpha$.

Нека је $\sphericalangle B_1C_2B_2 = \varphi$ и $\sphericalangle C_1B_1V_2 = \psi$. Из $\triangle AB_1C_2$ следи $\alpha+\beta+\varphi+\psi = 120^\circ$, а из $\triangle KB_1C_2$ и $\triangle KC_1B_2$ следи $\alpha + \beta = \varphi + \psi$. Дакле, важи $\alpha + \beta = 60^\circ$, па је четвороугао AB_2KC_1 тативан. Следи $\sphericalangle KAC_1 = \alpha$ и $\sphericalangle B_2AK = \beta$, па је $KC_2 = KA = KB_1$, тј. $\varphi = \psi = 30^\circ$.

Аналогно се доказује да је $\sphericalangle B_2A_1B_1 = \sphericalangle C_2B_1A_1 = 30^\circ$, па је права B_1C_2 симетрала $\sphericalangle C_1B_1A_1$ (троугла $A_1B_1C_1$). Слично се доказује и да су праве A_1B_2 и C_1A_2 симетрале $\sphericalangle B_1A_1C_1$ и $\sphericalangle A_1C_1B_1$, па следи тврђење задатка.

Четврто решење. Нека су

$$u = \overrightarrow{B_2C_1},\ u' = \overrightarrow{C_1C_2},\ v = \overrightarrow{C_2A_1},\ v' = \overrightarrow{A_1A_2},\ w = \overrightarrow{A_2B_1},\ u = \overrightarrow{B_1B_2}.$$

Како је $u' + v' + w' = 0$, следи $u + v + w = 0$, па пошто је $|u| = |v| = |w|$, следи да су углови међу векторима u, v, w једнаки 120°.

Дакле, праве B_2C_1, C_2A_1 и A_2B_1 чине једнакостраничан троугао.

Следи да је $\triangle AC_1B_2 \sim \triangle BA_1C_2 \sim \triangle CB_1A_2$, па како је $B_2C_1 = C_2A_1 = A_2B_1$ и $\triangle AC_1B_2 \cong \triangle BA_1C_2 \cong \triangle CB_1A_2$.

Следи закључак као у првом решењу (по претходном, дати шестоугао се може видети и као пресек троугла ABC и троугла добијеног од троугла ABC ротацијом око његовог центра за произвољан угао φ, $0 < \varphi < 120^\circ$).

ИМО '05.2

У датом низу не могу се јавити једнака члана (ако би било $a_i = a_j, i \neq j$, тада за $n > i, j$ чланови a_i и a_j дају исти остатак при дељењу са n). Нека је a_i највећи, а a_j најмањи број међу $a_1, \ldots, a_n$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Како су ови бројеви различити, мора бити $a_i - a_j \geqslant n-1$. Ако би било $a_i - a_j = m > n-1$, тада је $n \leqslant m$, па се a_i и a_j налазе међу $a_1, \ldots, a_m$, тј. међу овим бројевима се налазе два који дају исти остатак при дељењу са m, што је немогуће. Следи $a_i - a_j = n-1$, а како је n у горњем избору било произвољно, следи да је $\{a_1, \ldots, a_n\}$ скуп облика $\{k, k+1, \ldots, k+n-1\}$ за неко $k \in \mathbb{Z}$, тј. скуп састављен од узастопних целих бројева (за свако $n \in \mathbb{N}$).

Нека је $k \in \mathbb{Z}$. Како се у датом низу јавља бесконачно много позитивних и бесконачно много негативних бројева, и како се не јављају два иста броја, постоје i и j, такви да је $a_i < k < a_j$. Међутим, како је $\{a_1, \ldots, a_{\max\{i,j\}}\}$ састављен од узастопних целих бројева, међу њима се налази и k, одакле следи тврђење задатка.

ИМО '05.3

Како је $\dfrac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \dfrac{(x^5 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)}{x^5 + y^2 + z^2} = 1 - \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2}$ и слично за други и трећи члан који се јавља у датој неједнакости, она је еквивалентна са

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leqslant 3.$$

Из неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског и услова $xyz \geqslant 1$ следи

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geqslant \left(x^{\frac{5}{2}} \cdot (yz)^{\frac{1}{2}} + y \cdot y + z \cdot z\right)^2 \geqslant \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2,$$

одакле је

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leqslant \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Сличном проценом за друга два члана, следи

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leqslant 2 + \frac{yz + zx + xy}{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 3\,,$$

јер је $yz + zx + xy \leqslant x^2 + y^2 + z^2$. Да би важила једнакост, мора важити и једнакост у последњој неједнакости, тј. мора бити $x = y = z = 1$. Са друге стране, за $x = y = z = 1$ је испуњена једнакост у почетној неједнакости, тј. једнакост важи ако и само ако је $x = y = z = 1$.

Друго решење. Важе следеће неједнакости:

$$\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5}{z^5+x^2+y^2}\geqslant 1 \tag{1}$$

$$\text{и}\quad \frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqslant 1\,, \tag{2}$$

из којих непосредно следи тражена неједнакост.

Заиста, из $yz(y^2+z^2)=y^3z+yz^3\leqslant y^4+z^4$ $(\Leftrightarrow 0\leqslant (y-z)(y^3-z^3))$, следи $x(y^4+z^4)\geqslant xyz(y^2+z^2)\geqslant y^2+z^2$, односно

$$\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}\geqslant \frac{x^5}{x^5+xy^4+xz^4}=\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}\,.$$

Аналогно је и

$$\frac{y^5}{x^2+y^5+z^2}\geqslant \frac{y^4}{x^4+y^4+z^4}\quad \text{и}\quad \frac{z^5}{x^2+y^2+z^5}\geqslant \frac{z^4}{x^4+y^4+z^4}\,.$$

Сабирањем претходне три неједнакости, добија се (1).

Из $xyz\geqslant 1$ и Коши–Шварцове неједнакости, следи

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\geqslant (x^2+y^2+z^2)^2$$

(као у првом решењу), односно

$$\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}\leqslant \frac{x^2(yz+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,.$$

Аналогно је и

$$\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}\leqslant \frac{y^2(zx+z^2+x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\quad \text{и}\quad \frac{z^2}{x^2+y^2+z^5}\leqslant \frac{z^2(xy+x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,.$$

Сабирањем претходне три неједнакости, следи

$$\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^2}{z^5+x^2+y^2}\leqslant$$

$$\frac{2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+x^2yz+xy^2z+xyz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2-(x^4+y^4+z^4)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,,$$

па (2) следи непосредно из $x^2yz+xy^2z+xyz^2\leqslant x^4+y^4+z^4$, што је Мјурхедова неједнакост за $(2,1,1)$ и $(4,0,0)$. Једнакост важи ако и само ако је $x=y=z=1$.

Напомена. Тражена неједнакост се може добити непосредно из Мјурхедове и Шурове неједнакости (истина, после прилично посла око сређивања израза).

ИМО '05.4

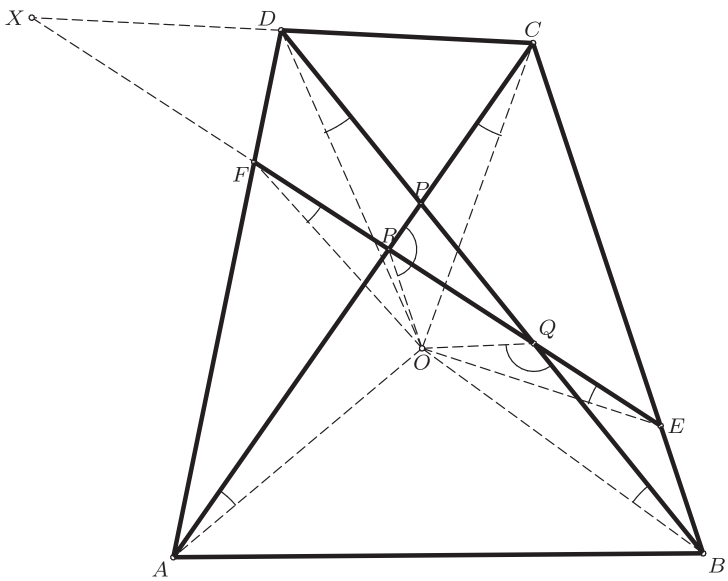
Сваки прост број дели неки члан низа. Заиста, ако је $p \in \{2,3\}$, тада $p \mid 48 = a_2$. Ако је $p > 3$, тада је $(2,p) = (3,p) = (6,p) = 1$ и $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \pmod p$ (мала Фермаова теорема), па је

$$a_{p-2} \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Дакле, природан број чији је делилац $p > 3$ није узајамно прост са a_{p-2}, па је једини број који задовољава услове задатка 1.

ИМО '05.5

Нека је O тачка пресека симетрала дужи AC и BD. Тада је $OA = OC, OB = OD$, а како је и $BC = DA$, следи $\triangle ODA \cong \triangle OBC$. Следи да ротација око тачке O за $\sphericalangle BOD$ слика тачке B и C у D и A, редом. Како је $BE = DF$, ова ротација слика тачку E у F, па је $OE = OF$ и $\sphericalangle EOF = \sphericalangle BOD = \sphericalangle COA$ (угао ротације). Следи да су троуглови EOF, BOD и COA слични.



Слика 43.

Ако линије AB, CD и EF нису све паралелне и (без губљења општости, нека је $EF \nparallel CD$ и $X = EF \cap CD$) из Менелајеве теореме примењене на троуглове ACD и BCD следи

$$\frac{AR}{RC}=\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DX}{XC}=\frac{CE}{EB}\cdot\frac{DX}{XC}=\frac{DQ}{QB}$$

(случај $AB \parallel EF \parallel CD$ је тривијалан, јер је тада четвороугао $ABCD$ једнакокраки трапез, а E и F су средишта кракова, па је $\frac{AR}{RC}=\frac{DQ}{QB}$ очигледно).

Из последње везе и сличности троуглова BOD и COA следи да је $\triangle BOQ \sim \triangle COR$, па је $\sphericalangle BQO = \sphericalangle CRO$, што значи да тачке P, Q, R и O припадају истој кружници.

Напомена. Тражена тачка је друга заједничка тачка (различита од P) кружница описаних око $\triangle BCP$ и $\triangle DAP$.

ИМО '05.6

Нека је n_i број учесника који су решили тачно i задатака ($0 \leqslant i \leqslant 6$; по условима задатка је $a_6 = 0$), а број учесника који су решили i-ти и j-ти задатак $n_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant 6, i \neq j$. Укупан број парова задатака који су решени је $S = \sum_{i=0}^{6}\binom{i}{2}n_i = n_2 + 3n_3 + 6n_4 + 10n_5$. Са друге стране, по тврђењу задака важи $S = \sum_{i<j} p_{ij} \geqslant \binom{6}{2}\cdot\frac{2n+1}{5} = 6n+3$, па следи $n_2 + 3n_3 + 6n_4 + 10n_5 \geqslant 6n + 3 = 6(n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5) + 3$, тј. након сређивања $4n_5 - 3 \geqslant 6n_0 + 6n_1 + 5n_2 + 3n_3$. Јасно је да мора бити $n_5 > 0$. Ако би било $n_5 < 2$, тада је $n_5 = 1$, па из задње везе следи $n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = 0, n_4 = n - 1$, тј. $S = 6(n-1) + 10 = 6n + 4$.

Ако $5 \nmid 2n + 1$, тада је $6n + 4 = S \geqslant \binom{6}{2}\cdot\frac{2n+2}{5} = 6n + 6$, што је немогуће.

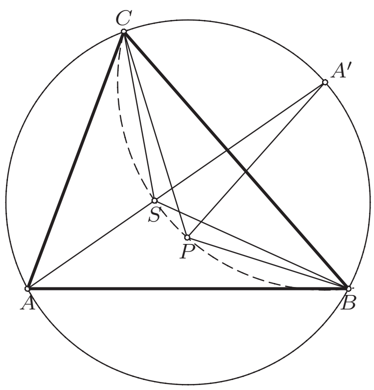
Следи $\frac{2n+1}{5} = z \in \mathbb{N}$. Из $S = 6n + 4$, како $15 \nmid 6n + 4$, следи да не могу бити сви p_{ij} једнаки z. Међутим, како је $15z = 6n + 3 = S - 1$, само један може бити $z + 1$. Без умањења општости, нека је учесник који је урадио 5 задатака урадио задатке 1,2,3,4 и 5 и нека је $p_{1i} = z$ за $2 \leqslant i \leqslant 6$. Ако је x број ученика који су решили шести задатак, а y број ученика који су решили четири задатка и међу њима први, следи да је $p_{16}+p_{26}+p_{36}+p_{46}+p_{56} = 3x$ (сваки ученик који је решио шести задатак у претходном збиру доприноси са 3), док је $p_{12}+p_{13}+p_{14}+p_{15}+p_{16} = 3y + 4$ (сваки ученик који је решио први задатак у претходном збиру доприноси са 3, сем једног, који доприноси са 4).

Следи $3x = p_{16}+p_{26}+p_{36}+p_{46}+p_{56} \in \{5z, 5z+1\}$, тј. $3x \in \{2n+1, 2n+2\}$, одакле је $(n, 3) = 1$. Како пар (i, j) за који је $p_{ij} = z + 1$ не учествује у $p_{12}+p_{13}+p_{14}+p_{15}+p_{16} = 3y+4$, следи $5z = 3y+4$, тј. $2n+1 = 3y+4$, одакле следи $3 \mid n$, што је контрадикција из које следи тврђење задатка.

Напомена. У оригиналној поставци тврђење које је горе доказано било је део (б) задатка. У делу (а) се захтевало да се докаже да ако је сваки проблем решило више од $\frac{2}{5}$ учесника, тада постоји три задатка која су решена од стране више од $\frac{1}{5}$ учесника и четири задатка која су решена од стране више од $\frac{1}{15}$ учесника. Такође, задатак се може отежати захтевом да се конструише пример који показује да постоји ситуација из задатка, тако да је тачно два ученика решило тачно пет задатака.

ИМО '06.1

Како је $\sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB = \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB) = \frac{\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA}{2}$, следи да је $\sphericalangle CPB = 90^\circ - \frac{\sphericalangle CAB}{2}$, тј. тачка P се налази на луку кружнице са тетивом BC.



Слика 44.

Како и тачка S припада овој кружници, то је кружница описана око $\triangle BCS$.

По познатој теореми („велики задатак“), центар те кружнице A' је тачка која се налази на средишту лука BC (који не садржи A) кружнице описане око $\triangle ABC$, тј. припада симетрали $\sphericalangle BAC$, односно тачка S припада дужи AA'.

Из $\triangle APA'$ следи $AP+PA' \geqslant AA' = AS+SA' = AS+PA'$, тј. $AP \geqslant AS$. Једнакост важи ако и само ако је тачка P на дужи AA', тј. ако и само ако је $P \equiv S$.

ИМО ’06.2

Нека је ABC једнакокраки троугао са две добре стране који учествује у уоченој подели и нека је $AB = AC$. Тада страна AC не може бити добра (између A и C има парно много страна P). Нека су све стране P које су између A и B (у делу руба који не садржи C), као и све стране P које су између A и C (у делу руба који не садржи B) додељене $\triangle ABC$. Тада у сваком од горња два скупа постоји страна P која не припада неком другом једнакокраком троуглу са две добре стране у датој подели (заиста, једнакокраком троуглу са теменима на ивици између A и B припада парно страна P, а на овој ивици их има непарно много).

Следи да сваки једнакокраки троугао са две добре стране у некој подели одређује бар две стране које, на горњи начин, не могу бити одређене неким другим таквим троуглом из те поделе, па тражени број није већи од $\frac{2006}{2} = 1003$. Са друге стране, ако у се 2006-тоугаонику $A_1A_2 \ldots A_{2006}$ повуку дијагонале A_iA_{i+2} за $i = 1, 3, 5, \ldots, 2005$, A_1A_{2005}, и остале до триангулације на произвољан начин, добија се подела која садржи 1003 тражених троуглова.

ИМО ’06.3

Без умањења општости може се претпоставити да је $a \leqslant b \leqslant c$. Како је $ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) = (b - c)(a - b)(c - a)(a + b + c)$, у овој ситуацији дата веза је еквивалентна са $(c - a)(c - b)(b - a)\,|a + b + c| \leqslant M(a^2 + b^2 + c^2)^2$. Како је $(b - a)(c - b) \leqslant \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 = \frac{(c-a)^2}{4}$, (неједнакост између аритметичке и геометријске средине, једнакост важи ако и само ако је $2b = a + c$) и, слично, $\left(\frac{(c-b)+(b-a)}{2}\right)^2 \leqslant \frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2}$, тј. $3(c-a)^2 \leqslant 2 \cdot \left[(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2\right]$ (једнакост ако и само ако је $2b = a + c$), следи

$$(c-a)(c-b)(b-a)\,|a+b+c| \leqslant \frac{1}{4} \cdot \left|(c-a)^3(a+b+c)\right| =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\left[\frac{2 \cdot \left[(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2\right]}{3}\right]^3 \cdot (a+b+c)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left\{ \sqrt[4]{\left[\frac{(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2}{3}\right]^3 \cdot (a+b+c)^2} \right\}^2 \leqslant$$

(по неједнакости између аритметичке и геометријске средине, једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}=(a+b+c)^2$)

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[\frac{3\cdot\dfrac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}+(a+b+c)^2}{4}\right]^2=$$

$$\frac{9\sqrt{2}}{32}\cdot(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Из услова за једнакост са $b=1$ (лако се види да у случају једнакости мора бити $b\neq 0$) следи $a=1-\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2}$ и $c=1+\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2}$, тј. $M=\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$ (горња процена се достиже). Једнакост са овом константом важи ако и само ако је тројка (a,b,c) пропоционална тројци $\left(1-\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2},1,1+\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$ (до на пермутацију).

ИМО '06.4

Ако је $x<-1$ следи $1<1+2^x+2^{2x+1}<1+2^{-1}+2^{-1}=2$, тј. $1+2^x+2^{2x+1}\notin\mathbb{Z}$, па у овом случају једначина нема решења. За $x=-1$ једначина постаје $y^2=2$, па и у овом случају нема решења. Слично се проверава да једначина нема решења за $x\in\{1,2,3\}$.

За $x=0$ једначина постаје $y^2=4$, па су $(0,2)$ и $(0,-2)$ решења.

Једначина се може записати у облику $2^x(1+2^{x+1})=(y-1)(y+1)$. За $x>0$ следи да је y непарно, па су $y-1$ и $y+1$ узастопни парни бројеви, тј. један од њих је дељив са 2, а није са 4, а други са 2^{x-1}, а није са 2^x.

Следи да је $y=2^{x-1}n\pm 1$, где је n непаран природан број (ако је (x,y) решење, тада је решење и $(x,-y)$, па се може претпоставити да је $y>0$). Уврштавањем у једначину и сређивањем се добија $1+n\geqslant 1\mp n=2^{x-2}(n^2-8)$, тј. $2n^2-n-17\leqslant 0$, па мора бити $n\in\{1,3\}$.

Ако је $n=1$, следи $1\mp 1=(-7)\cdot 2^{x-2}$, што је немогуће.

Ако је $n=3$ следи $1\mp 3=2^{x-2}$, што је могуће у ситуацији $1+3=2^{4-2}$, тј. $x=4$ и $y=2^{4-1}\cdot 3-1=23$.

Дакле, сва решења су $(0,2)$, $(0,-2)$, $(4,23)$ и $(4,-23)$.

ИМО '06.5

Ако су сва целобројна решења једначине $Q(x)=x$ истовремено и решења једначине $P(x)=x$, тврђење је тривијално ($\deg P=n$). Иначе, нека је x_0 такво да је $Q(x_0) = x_0$ и $P(x_0) \neq x_0$ и $x_{n+1} = P(x_n)$ за $n \geqslant 0$. Како за целе a, b важи $a - b \mid P(a) - P(b)$, следи да у низу

$$x_0 - x_1, x_1 - x_2, \ldots, x_n - x_{n+1} = x_0 - x_1$$

сваки члан дели следећи, тј. они су по апсолутној вредности једнаки. Ако је $x_k = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$, следи да је $x_{k-1} - x_k = -(x_k - x_{k+1})$, тј. $x_{k-1} = x_{k+1} \neq x_k$, тј. решења једначине $Q(x) = x$ су и решења једначине $P(P(x)) = x$.

Нека је $a \in \mathbb{Z}$ такав да је $P(P(a)) = a$ и $b = P(a) \neq a$. Тада је $P(b) = a$. Нека је $c \in \mathbb{Z}$ такав да је $P(P(c)) = c$ и $d = P(c)$. Из

$$c - a \mid P(c) - P(a), b - d \mid P(b) - P(d), c - b \mid P(c) - P(b), d - a \mid P(d) - P(a),$$

следи да се $c - a$ и $d - b$, односно $c - b$ и $d - a$, међусобно деле, тј. да је

$$c - b = \pm(d - a), \quad c - a = \pm(d - b).$$

Ако обе претходне везе важе са знаком $+$, добија се $a = b$, што је контрадикција. Иначе, важи $a + b = c + d$.

Нека је $F(x) = a + b - x - P(x)$. По горе доказаном следи да свако решење једначине $P(P(x)) = x$ задовољава и $F(x) = 0$ (ову једначину задовољавају и a и b). Како је F полином n-тог степена, и у овом случају следи тврђење задатка.

ИМО '06.6

Нека $P(X)$ означава површину фигуре X.

Лема. Сваки конвексан $(2n)$-тоугао (Π) има страну и теме, тако да троугао одређен њима има површину не мању од $\dfrac{P(\Pi)}{n}$.

Доказ. Нека је *главна дијагонала* $(2n)$-тоугла она дијагонала га која дели на два n-тоугла. Нека је $b = AB$ страница датог $(2n)$-тоугла, C пресек главних дијагонала које имају са крајеве A и B, редом, и Δ_b троугао ABC. Свака тачка Π се налази између две главне дијагонале, тј. припада Δ_b за неку страну b, односно унија оваквих троуглова прекрива Π, па постоје стране AB и $A'B'$, тако да су AA' и BB' главне дијагонале Π и $P(\Delta_{AB}) + P(\Delta_{A'B'}) \geqslant \dfrac{P(\Pi)}{n}$. Нека се AA' и BB' секу у D и нека је (без умањења општости) $DB \geqslant DB'$. Тада је

$$P(ABA') = P(ABD) + P(DBA') \geqslant P(ABD) + P(DA'B') =$$
$$P(\Delta_{AB}) + P(\Delta_{A'B'}) \geqslant \frac{P(\Pi)}{n}.$$

Нека је Π произвољан конвексан полигон са странама $b_1, \ldots, b_m$ и P_{b_i} површина додељена страни b_i као у тексту задатка. Нека не важи тврђење задатка. Тада је $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{P_{b_i}}{P(\Pi)} < 2$, па постоје $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Q}$, тако да је $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_i = 2$ и $q_i > \dfrac{P_{b_i}}{P(\Pi)}$ за $i = 1, \ldots, m$.
Нека је n најмањи заједнички садржалац именилаца бројева $q_1, \ldots, q_m$ и $k_i = n \cdot q_i$ за $i = 1, \ldots, m$ $(k_1 + \ldots + q_m = 2n)$. Ако се i-та страна Π подели на k_i једнаких делова, дати m-тоугао се може видети као $(2n)$-тоугао (са неким угловима од 180°). По горе доказаној леми, постоји страна b и теме B, тако да за троугао одређен њима (T) важи $P(T) \geqslant \dfrac{P(\Pi)}{n}$. Ако је b део i-те стране и ако је T' троугао одређен теменом B и страном b_i, важи

$$P(T') = k_i \cdot P(T) \geqslant k_i \cdot \frac{P(\Pi)}{n} = q_i \cdot P(\Pi) > S_i,$$

што је немогуће. Из добијене котрадикције следи тврђење задатка. Проучавањем услова једнакости у горе доказаној леми, долази се до закључка да једнакост важи ако и само ако је Π централно симетричан.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА БАЛКАНСКИХ МАТЕМАТИЧКИХ ОЛИМПИЈАДА

БМО '96.1

Нека је $a = BC, b = CA, c = AB$. Пошто је $3 \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, следи $9 \cdot OT^2 = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = 3R^2 + 2R^2 \cdot (\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)$, јер је $OA = OB = OC = R$ и $\sphericalangle BOC = 2\alpha, \sphericalangle COA = 2\beta, \sphericalangle AOB = 2\gamma$. Следи $OT^2 = 3R^2 + 2R^2\left(3 - 2\sin^2\alpha - 2\sin^2\beta - 2\sin^2\gamma\right) = 9R^2 - (2R\sin\alpha)^2 - (2R\sin\beta)^2 - (2R\sin\gamma)^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \quad (*)$.

Како за површину троугла ABC важи $P(ABC) = \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{(a+b+c)r}{2}$, следи $2Rr = \dfrac{abc}{a+b+c} \quad (**)$.

По $(*)$ и $(**)$ следи да је тражена неједнакост еквивалентна са

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{9} \geqslant \frac{abc}{a+b+c}, \quad \text{односно} \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3} \geqslant abc,$$

а последња следи из неједнакости аритметичке и геометријске средине (јер је $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ и $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$). Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$, тј. ако је троугао ABC једнакостраничан.

БМО '96.2

Нека је $p = k^2 + l$, где је k највеће могуће, тако да је $k^2 < p$. Следи да је $1 \leqslant l \leqslant 2k$ (иначе би било $p \geqslant k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$). Не може бити ни $l = 2k$, јер би било $p = k^2 + 2k = k(k+2)$, тј. p не би био прост број (по условима задатка је $k \geqslant 2$).

Ако је $l = 1$, нека је $x = p - (k-1)^2$ и $y = p - 1^2$. Следи $x = 2k$ и $y = k^2 = \frac{k}{2} \cdot x$, тј. $x > 1$ и $x \mid y$ ($2 \mid k$, јер је p непаран број; у овом случају важи и $k > 2$, па је $\frac{k}{2} > 1$).

Ако је $1 < l < 2k$, нека је $x = p - k^2$ и $y = p - |k - x|^2$. Следи $x = l$ и $y = p - (k^2 - 2kx + x^2) = x \cdot (2k + 1 - x)$, па $x \mid y$ (у овом случају је $2k+1-x = 2k+1-l > 1$, тј. $y \neq x$; не може бити ни $k = x$, јер би било $p = k(k+1), k \geqslant 2$, што је немогуће, јер је p прост).

БМО '96.3

Нека је пресечна тачка дужи AP, BQ, CR, DM тачка O. Тада су $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OP}$ вектори који имају исти правац, па је $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OP} = 0$. Како је P средиште дужи CD, следи $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$, па је $0 = \overrightarrow{OA} \times \dfrac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$, тј. $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OA}$. Аналогно се добија (јер O припада и дужима BQ, CR, DM) да је $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OD}$, па следи $\overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OE}$, одакле је $0 = \overrightarrow{OE} \times \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{ON}$, тј. тачке E, O и N су колинеарне.

БМО '96.4

У низу $2^n - 1, 2^{n+1} - 2, 2^{n+2} - 2^2, \ldots, 2^{2n} - 2^n, 2^{2n} - 1$ сваки члан почев од другог је два пута већи од претходног, сем последњег, који је једнак збиру првог и претпоследњег. На овај начин, уколико се конструише скуп са особином (б) из поставке задатка који садржи број $2^n - 1$, додавањем још $(n+1)$-ог елемента, може се добити скуп са истом особином који садржи $2^{2n} - 1$.

Нека је $A_n = \left\{2^{n+1} - 2, 2^{n+2} - 2^2, \ldots, 2^{2n} - 2^n, 2^{2n} - 1\right\}$. Тада скуп $B = \{1\} \cup \bigcup_{i=1}^{8} A_{2^{i-1}}$ задовољава особину (б) из поставке задатка и садржи $2^{2^8} - 1 = 2^{256} - 1$ (скуп B садржи $1 + (1+1) + (2+1) + (4+1) + (8+1) + (16+1) + (32+1) + (64+1) + (128+1) = 264$ елемента). Скуп

$$C = B \cup \left\{2^k \cdot \left(2^{256} - 1\right) \mid 1 \leqslant k \leqslant 243\right\} \cup$$

$$\cup \left\{2^{499} - 2^{115}, 2^{499} - 2^{51}, 2^{499} - 2^{19}, 2^{499} - 2^3, 2^{499} - 2, 2^{499} - 1\right\}$$

такође задовољава особину (б) из поставке задатка и садржи $2^{499} - 1$ (садржи све чланове скупа $\left\{2^k \cdot \left(2^{256} - 1\right) \mid 1 \leqslant k \leqslant 243\right\}$, јер је $2^{256} - 1 \in B$ и важи $2^{k+1} \cdot \left(2^{256} - 1\right) = 2 \cdot 2^k \cdot \left(2^{256} - 1\right)$; остатак се може видети из следећег низа једнакости:

$$2^{499} - 2^{115} = \left(2^{499} - 2^{243}\right) + \left(2^{243} - 2^{115}\right), 2^{243} - 2^{115} \in A_{128}$$

$$2^{499} - 2^{51} = \left(2^{499} - 2^{115}\right) + \left(2^{115} - 2^{51}\right), 2^{115} - 2^{51} \in A_{64}$$

$$2^{499} - 2^{19} = \left(2^{499} - 2^{51}\right) + \left(2^{51} - 2^{19}\right), 2^{51} - 2^{19} \in A_{32}$$

$$2^{499}-2^3=\left(2^{499}-2^{19}\right)+\left(2^{19}-2^3\right), 2^{19}-2^3\in A_{16}$$

$$2^{499}-2=\left(2^{499}-2^{3}\right)+\left(2^{3}-2\right), 2^{3}-2\in A_{2}$$

$$2^{499}-1=\left(2^{499}-2\right)+\left(2^{2}-1\right), 2^{2}-1\in A_{1}\,;$$

скуп C садржи $264+243+6=513$ елемената).

Коначно, скуп $A=C\cup A_{499}\cup A_{998}$ задовољава особину (б) из поставке задатка, садржи елементе 1 и $2^{1996}-1$ $(1996=2\cdot 998)$, а број елемената скупа A је $513+(499+1)+(998+1)=2012$.

БМО ’97.1

Нека је $P(XYZ)$ површина троугла XYZ. Како за $0<\alpha<\pi$ важи $0<\sin\alpha\leqslant 1$ и како је $xy\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$, следи

$$P(AOB)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\sphericalangle AOB\leqslant\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{OA^2+OB^2}{2}\,.$$

Једнакост важи ако и само ако је $\sin\sphericalangle AOB=1$ (тј. ако су праве OA и OB међусобно нормалне) и $OA=OB$.

Слично се добија да важи:

$$P(BOC)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{OB^2+OC^2}{2}\,,$$

$$P(COD)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{OC^2+OD^2}{2}\,,$$

$$P(DOA)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{OD^2+OA^2}{2}\,.$$

Сабирањем претходних неједнакости и коришћењем услова задатка добија се:

$$P(ABCD)=P(AOB)+P(BOC)+P(COD)+P(DOA)\leqslant$$

$$\frac{OA^2+OB^2+OC^2+OD^2}{2}=P(ABCD),$$

тј. важи једнакост, а то је тачно ако и само ако важи у свим претходним неједнакостима, тј. ако и само ако је $OA\perp OB$, $OB\perp OC$, $OC\perp OD$, $OD\perp OA$ и $OA=OB=OC=OD$, тј. ако и само ако је четвороугао $ABCD$ квадрат са центром O.

БМО '97.2

Нека је $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и нека је матрица $M = (m_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant k}$ дефисана са

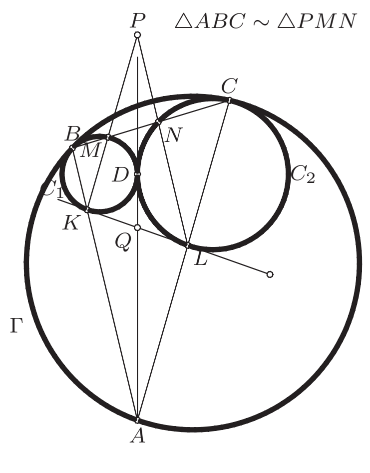
$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако} \quad x_i \in A_j \\ 0, & \text{ако} \quad x_i \notin A_j \end{cases} .$$

Према условима задатка матрица M на сме садржати две једнаке колоне (ако би било $i \neq k$ и $m_{ij} = m_{kj}$ за све $j = 1, \ldots, k$, тада би елементи x_i и x_k припадали истим подскуповима из $\mathcal{A}$, тј. не би постојао подскуп из $\mathcal{A}$ који садржи тачно један од x_i и x_k). Дакле, елемената скупа S не сме бити више од броја различитих низова дужине k чији су елементи 0 или 1, тј. $n \leqslant 2^k$.

БМО '97.3

Нека је P пресечна тачка права KM и LN и нека су $\mathcal{H}_B$ и $\mathcal{H}_C$ хомотетије са центрима у B и C, редом, које пресликавају кружнице C_1 и C_2 на кружницу Γ. Тада је $\mathcal{H}_B(K) = A, \mathcal{H}_B(M) = C, \mathcal{H}_C(L) = A, \mathcal{H}_C(N) = B$, па је $KM \parallel AC$ и

$$LN \parallel AB. \tag{$*$}$$



Слика 45.

Следи $\sphericalangle ACB = \sphericalangle KMB = \sphericalangle PMN$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle LNC = \sphericalangle PNM$, па је $\triangle PMN \sim \triangle ABC$, одакле је $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AC}{AB}$.

Како је AD тангента кругова C_1 и C_2, следи $AK{\cdot}AB = AD^2 = AL{\cdot}AC$, па је $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AK}{AL}$. Из $(*)$ следи да је четвороугао $ALPK$ паралелограм, па важи $AL = PK$ и $AK = PL$.

Следи $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{PL}{PK}$, тј. $PM \cdot PK = PN \cdot PL$ (потенција на C_1 из тачке P је једнака потенцији на C_2 из тачке P), па тачка P припада радикалној оси кругова C_1 и C_2, тј. (ако се они додирују споља) њиховој заједничкој унутрашњој тангенти, а то је права AD.

Напомена. Да је KL заједничка тангента C_1 и C_2 се може и брже показати. Нека је $\mathcal{I}$ инверзија са центром у A и полупречником AD. Тада је $\mathcal{I}(C_1) = C_1$, $\mathcal{I}(C_2) = C_2$, $\mathcal{I}(B) = K$, $\mathcal{I}(C) = L$ и $\mathcal{I}(\Gamma) = KL$, па је KL заједничка тангента кругова C_1 и C_2.

БМО '97.4

Из услова задатка, за $x = 0$ следи $f(f(y)) = (f(0))^2 + y$, па за $y = -(f(0))^2 \,(= a)$ следи $f(f(a)) = 0$. Опет из услова задатка, за $x = f(a)$ следи

$$f(f(y)) = y \quad \text{за свако} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Користећи $(*)$, заменом $f(x)$ уместо x у услов задатка, следи $f\left(xf(x) + f(y)\right) = \left(f(f(x))\right)^2 + y = x^2 + y$, тј.

$$\left(f(x)\right)^2 = x^2 \quad \text{за свако} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{$**$}$$

Нека је $f(1) = \delta \ \ (\in \{-1, 1\})$. Из услова задатка, за $x = 1$, користећи $(**)$ следи $f\left(\delta + f(y)\right) = \delta^2 + y = 1 + y$ за свако $y \in \mathbb{R}$. Квадрирањем и користећи $(**)$, следи $(\delta + f(y))^2 = \left(f\left(\delta + f(y)\right)\right)^2 = (1+y)^2$, тј. $f(y) = \dfrac{y}{\delta} = \delta \cdot y$.

Дакле, могућа решења су $f(x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$ и $f(x) = -x$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Ове две функције задовољавају услов задатка, па и јесу решења.

БМО '98.1

Ако је $a - b > 1$, тада је $[a] \neq [b]$. Како је $\dfrac{(k+1)^2}{1998} - \dfrac{k^2}{1998} = \dfrac{2k+1}{1998} > 1$ за $k \geqslant 999$, сви чланови почев од 1000-ог су различити. Са друге стране, за $k \leqslant 999$ је $\dfrac{(k+1)^2}{1998} - \dfrac{k^2}{1998} = \dfrac{2k+1}{1998} < 1$, па се у низу $\left(\left[\dfrac{k^2}{1998}\right]\right)_{k=1}^{999}$ налазе сви цели бројеви између $\left[\dfrac{1^2}{1998}\right] = 0$ и $\left[\dfrac{999^2}{1998}\right] = 499$. Дакле, у датом низу се налази $500 + (1997 - 999) = 1498$ различитих чланова.

БМО '98.2

Важи општије тврђење:
Нека је $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ и нека су $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2m+1}$ реални

бројеви. Тада је

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \ldots - \sqrt[n]{a_{2m}} + \sqrt[n]{a_{2m+1}} < \sqrt[n]{a_1 - a_2 + \ldots - a_{2m} + a_{2m+1}}\,.$$

Специјално за $m = n$ добија се тврђење задатка.

Ово општије тврђење може се доказати индукцијом по m. Сменом $a_i = x_i^n$ за $1 \leqslant i \leqslant 2m+1$ и степеновањем са n (обе стране неједнакости су позитивне), добија се еквивалентна неједнакост

$$(x_1 - x_2 + \ldots - x_{2m} + x_{2m+1})^n < x_1^n - x_2^n + \ldots - x_{2m}^n + x_{2m+1}^n,$$

где је $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m+1}$.

За $m = 1$ треба доказати да за $n \geqslant 2$ и $0 < x < y < z$ важи

$$(x - y + z)^n < x^n - y^n + z^n\,. \qquad (*)$$

Међутим, како за $0 < x < y < z$ важи $z \geqslant x - y + z$, $(*)$ је тачно због

$$z^n - y^n = (z - y)\sum_{k=0}^{n-1} z^k y^{n-1-k} \geqslant (z - y)\sum_{k=0}^{n-1}(x - y + z)^k x^{n-1-k} =$$

$$[(x - y + z) - x]\sum_{k=0}^{n-1}(x - y + z)^k x^{n-1-k} = (x - y + z)^n - x^n.$$

Нека је тврђење тачно за $m - 1$ и нека је $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m+1}$. Тада је

$$(x_1 - x_2 + \ldots - x_{2m} + x_{2m+1})^n =$$

$$[x_1 - x_2 + \ldots - x_{2m-2} + (x_{2m-1} - x_{2m} + x_{2m+1})]^n <$$

(по тврђењу за $m-1$ за $2m-1$-торку $x_1, x_2, \ldots, x_{2m-2}, x_{2m-1} - x_{2m} + x_{2m+1}$, јер је при датим условима $x_{2m-2} < x_{2m-1} - x_{2m} + x_{2m+1}$)

$$x_1^n - x_2^n + \ldots - x_{2m-2}^n + (x_{2m-1} - x_{2m} + x_{2m+1})^n <$$

(по $(*)$, јер је $0 < x_{2m-1} < x_{2m} < x_{2m+1}$)

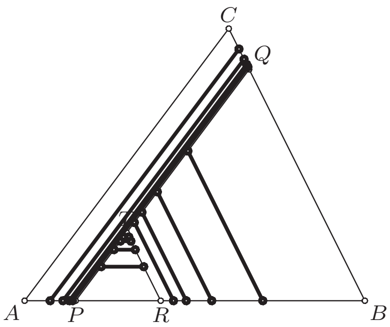
$$x_1^n - x_2^n + \ldots - x_{2m-2}^n + x_{2m-1}^n - x_{2m}^n + x_{2m+1}^n\,.$$

Овим је тврђење доказано индукцијом.

БМО '98.3

Нека је $\mathcal{S} = \triangle ABC \setminus \{T\}$ и нека су тачке P, Q, R на странама AB, BC, AB, редом, тако да је $PQ \parallel AC$ и $TR \parallel BC$. Нека је $\mathcal{S}_1$ троугао PRT без тачке T, $\mathcal{S}_2$ четвороугао $BQTR$ без дужи TR и $\mathcal{S}_3$ четвороугао $CAPQ$ без дужи PQ. Тада је $\mathcal{S}$ дисјунктна унија $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_3$.

Скуп $\mathcal{S}_1$ се једноставно представља као унија дужи којима је један крај на TP, а други на TR; скуп $\mathcal{S}_2$ се једноставно представља као унија дужи којима је један крај на TQ, а други на BR (без дужи TR); скуп $\mathcal{S}_3$ се једноставно представља као унија дужи којима је један крај на CQ, а други на AP (без дужи PQ) (видети слику 46).



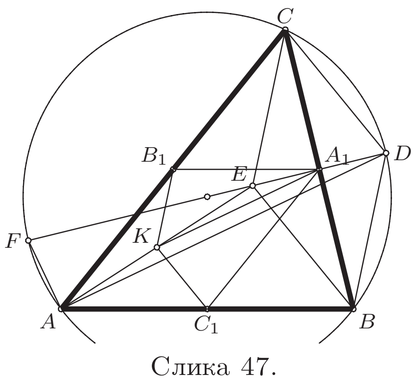
Слика 46.

БМО '98.4

Како је $x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$ или $x^5 \equiv 0 \pmod{11}$ за $x \in \mathbb{Z}$, следи да остатак који даје $x^5 - 4$ при дељењу са 11 може бити 6, 7 или 8. Са друге стране, остатак који даје квадрат целог броја при дељењу са 11 може бити 0, 1, 3, 4 или 9, па како је $\{6,7,8\} \cap \{0,1,3,4,9\} = \emptyset$, следи да дата једначина нема целобројних решења.

БМО '99.1

Нека је A_1 средиште дужи BC. У троуглу ADE, AA_1 и DK су тежишне дужи, тј. секу се у тачки T, тако да је $AT : TA_1 = 2 : 1$. Међутим, AA_1 је тежишна дуж и троугла ABC, па је T тежиште $\triangle ABC$. Дакле, хомотетија са центром у T и коефицијентом -2 ($\mathcal{H}_{T,-2}$) слика средишта страница троугла ABC у одговарајућа темена (самим тим кружницу која садржи средишта страница $\triangle ABC$ (Ојлерова кружница) у описану кружницу $\triangle ABC$).



Слика 47.

Како је $\mathcal{H}_{T,-2}(K) = D$ и D припада описаној кружници $\triangle ABC$, следи тврђење (а). Како је $\mathcal{H}_{T,-2}(K) = D$ и $\mathcal{H}_{T,-2}(A_1) = A$, следи $KA_1 \parallel AD$. Како је DF пречник кружнице описане $\triangle ABC$, следи $\sphericalangle DAF = 90°$, тј. $DA \perp AF$, одакле следи тврђење (б).

БМО '99.2

Нека је $a^3 \equiv b^3 \pmod p$ за неке $a, b \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ и нека је $p = 3k+2, k \in \mathbb{N}$ (по услову задатка). Како је $(a,p) = (b,p) = 1$, по малој Феармовој теореми је $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, па важи

$$a \equiv a^p \equiv a^{2p-1} = a^{6k+3} = (a^3)^{2k+1} \equiv (b^3)^{2k+1} = b^{6k+3} = b^{2p-1} \equiv b \pmod p\,,$$

тј. $a = b$. Дакле, бројеви $1^3, 2^3, \dots, (p-1)^3$ дају различите остатке при дељењу са p, тј. за свако $y \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ важи

$$\left|\left\{y^2 - x^3 - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant x \leqslant p-1\right\}\right| = p-1,$$

тј. највише један члан тог скупа може бити дељив са p, одакле следи тврђење задатка.

БМО '99.3

Нека је T тежиште, а $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ одговарајуће странице, односно углови троугла ABC. Како је површина троугла ABT три пута мања од $P(ABC)$ (T дели тежишну линију у односу $1:2$, па је и TP три пута мање од висине $\triangle ABC$ из темена C), следи да је $\dfrac{c \cdot TP}{2} = \dfrac{P(ABC)}{3}$, тј. $TP = \dfrac{2P}{3c}$. Аналогно је $TM = \dfrac{2P}{3a}, TN = \dfrac{2P}{3b}$. У четвороуглу $TPBM$ је $\sphericalangle TPB = \sphericalangle BMT = 90^\circ, \sphericalangle ABC = \beta$, па је $\sphericalangle MTP = 180^\circ - \beta$, па важи $P(TPM) = \dfrac{TP \cdot TM \cdot \sin\sphericalangle MTP}{2} = \dfrac{\frac{2P}{3c} \cdot \frac{2P}{3a} \cdot \sin\beta}{2} = \dfrac{2[P(ABC)]^2 \sin\beta}{9ac} = \dfrac{P(ABC)\sin^2\beta}{9}$ (јер је $P(ABC) = \dfrac{ac\sin\beta}{2}$). Аналогно је $P(TMN) = \dfrac{P(ABC)\sin^2\gamma}{9}$ и $P(TNP) = \dfrac{P(ABC)\sin^2\alpha}{9}$, па важи $P(MNP) = P(MTN) + P(NTP) + P(PTM) = \dfrac{P(ABC)}{9} \cdot \left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma\right)$, тј. тражена неједнакост је еквивалентна са

$$\frac{4}{3} < \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqslant \frac{9}{4} \quad \text{за} \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}, \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Коначно, она следи из $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =$

$$\frac{1}{2}\left(2 - (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + 2 - 2\cos^2\gamma\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(4 - 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\cos^2\gamma\right) = 2 + \cos\gamma\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma\right) =$$

$$2 - 2\cos\gamma\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma > 2 > \frac{4}{3}$$

и $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 2+\cos\gamma\,(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma) \leqslant 2+\cos\gamma\,(1-\cos\gamma) \leqslant 2+\left(\dfrac{\cos\gamma+(1-\cos\gamma)}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$ (неједнакост између геометријске и аритметичке средине, $\cos\gamma > 0$, јер је γ оштар угао). Једнакост (у процени одозго) важи ако и само ако је $\cos(\alpha-\beta)=1$ и $\cos\gamma = 1-\cos\gamma$, тј. ако и само ако је троугао ABC једнакостраничан ($\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$).

Напомена: из решења се види да је процена одоздо превише груба, тј. показано је да важи $\dfrac{2}{9} < \dfrac{P(MNP)}{P(ABC)}$. У тексту је остављено $\dfrac{4}{27}$ зато што је то био захтев задатка на самом такмичењу.

БМО '99.4

Ако је $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$, тада је $y_j \geqslant n+1$ за све $j \in \mathbb{N}_0$, па тражена неједнакост тривијално следи (∗).

Иначе, нека су $k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}$ такви да је $x_k = l$ и $x_i = 0$ за свако $0 \leqslant i \leqslant k-1$ и нека је низ $(x'_n)_{n\geqslant 0}$ дефинисан са $x'_n = \begin{cases} 0, & \text{за} \quad n=k \\ x_n, & \text{за} \quad n \neq k \end{cases}$. Нека је $(y'_n)_{n\geqslant 0}$ низ добијен на основу низа $(x'_n)_{n\geqslant 0}$, аналогно добијању низа $(y_n)_{n\geqslant 0}$ из низа $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Тада је $y'_n = \begin{cases} y_n+1, & \text{за} \quad n \leqslant l \\ y_n, & \text{за} \quad n > l \end{cases}$, па је

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \geqslant \sum_{i=0}^{n} x'_i + \sum_{j=0}^{m} y'_j\,,$$

јер се $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i$ смањи за l, а $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} y_j$ повећа за $\min\{l,m\} \leqslant l$. Настављајући поступак за $x_{k+1},\ldots,x_n$, лева страна неједнакости се не повећава, а десна се не мења. Како по (∗) у случају $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$ важи неједнакост, следи и да важи за произвољан $(x_n)_{n\geqslant 0}$ који задовољава услове задатка.

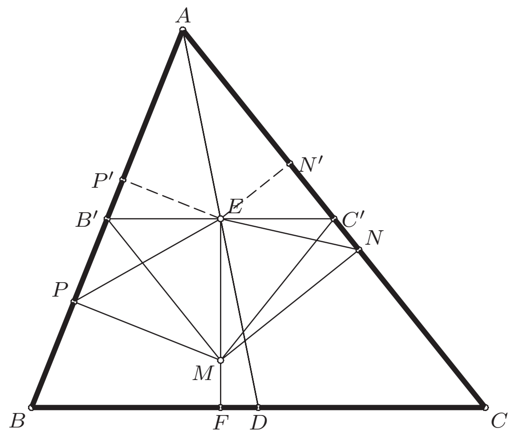
Напомена. У (∗) може важити једнакост, па самим тим и у неједнакости датој у задатку (ако се у горњем поступку ни лева страна не промени).

БМО '00.1

Видети решење **БМО '97.4.** на страни 107. Изненађујуће је да је у року од само три године на Балканској математичкој олимпијади поновљен задатак. Такође, интересантно је да га је једна комисија окарактерисала као лак, а друга као тежак задатак.

БМО '00.2

Четвороугао $PMNA$ је тетиван ($\sphericalangle MPA = \sphericalangle MNA = 90°$), па је $\sphericalangle PMN = 180° - \sphericalangle CAB$, одакле следи да су унутрашње симетрале углова $\sphericalangle PMN$ и $\sphericalangle CAB$ паралелне.



Слика 48.

Нека права паралелна са правом BC и која садржи тачку E сече странице AB и BC у тачкама B' и C', редом. Тада је $ME \perp B'C'$, па су четвороуглови $MNC'E$ и $MEB'P$ тетивни ($\sphericalangle MNC' = \sphericalangle MEC' = \sphericalangle MEB' = \sphericalangle MPB' = 90°$). Следи да је $\sphericalangle MPE = \sphericalangle MB'E = \sphericalangle MC'E = \sphericalangle MNE$ ($\triangle MC'B'$ је једнакокраки). Нека су P' и N' подножја нормале из E на странице AB и AC, редом. Тада је $PM \parallel EP'$ и $MN \parallel EN'$, па из углова са паралелним крацима следи $\sphericalangle P'EP = \sphericalangle MPE = \sphericalangle MNE = \sphericalangle NEN'$, па је симетрала углова $\sphericalangle PEN$ и $\sphericalangle P'EN'$ заједничка. Међутим, као и малопре, четвороугао $P'EN'A$ је тетиван, са $\sphericalangle P'EQ' = 180° - \sphericalangle CAB$, па је и симетрала $\sphericalangle PEN$ паралелна симетрали $\sphericalangle CAB$.

Дакле, уочене праве су паралелне. Ако би се поклапале, права ME би била и паралелна симетрали $\sphericalangle CAB$ и нормална на BC, па би симетрала $\sphericalangle CAB$ била нормална на BC, тј. троугао ABC би био једнакокраки. Из добијене контрадикције следи тврђење задатка.

БМО '00.3

Нека је правоугаоник $ABCD$ димензија 50×90 смештен у координатну раван, тако да му темена имају координате $A(0,0)$, $B(90,0)$, $C(90,50)$, $D(0,50)$. Нека су $E(60\sqrt{2},0)$ и $F(60\sqrt{2},50)$. Тада се из правоугаоника $AEFD$ може изрезати $300 (= 6 \cdot 50)$ тражених правоугаоника ($60\sqrt{2} < 90 < 70\sqrt{2}$), а из правоугаоника $EBCF$ још $15 (= 5 \cdot 3)$ (јер је $5 <$

$90-60\sqrt{2}<6$ и $30\sqrt{2}<50<40\sqrt{2}$). Дакле, може се исећи 315 правоугаоника који испуњавају захтеве задатка.

Нека је $X=ABCD\cap\Big\{(x,y)\mid x+y=n\cdot 10\sqrt{2}, n\in\mathbb{N}\Big\}$. Како је $90\sqrt{2}<140(=90+50)<100\sqrt{2}$, следи да је X унија 9 дужи. Прва дуж ($n=1$) је дијагонала квадрата странице $10\sqrt{2}$ (тј. дужине је 20). Слично, друга дуж ($n=2$) је дијагонала квадрата странице $20\sqrt{2}$ (тј. дужине је 40), а трећа дуж ($n=3$) је дијагонала квадрата странице $30\sqrt{2}$ (тј. дужине је 60). Како је $30\sqrt{2}<50<40\sqrt{2}$ и $60\sqrt{2}<90<100\sqrt{2}$, следи да одговарајуће дужи за $n\in\{4,5,6\}$ исте дужине (један крај им је на AB, а други на CD) и једнаке су дијагонали квадрата странице 50 (тј. дужина им је $50\sqrt{2}$). Аналогно, седма, осма и девета дуж су дијагонале квадрата странице $140-70\sqrt{2}$, $140-80\sqrt{2}$ и $140-90\sqrt{2}$, редом, тј. дужине су им $140\sqrt{2}-140$, $140\sqrt{2}-160$ и $140\sqrt{2}-180$, редом. Дакле, укупна дужина свих дужи у X износи $20+40+60+3\cdot 50\sqrt{2}+3\cdot 140\sqrt{2}-(140+160+180)=570\sqrt{2}-360$. Са друге стране, сума дужи из X које леже у произвољном правоугаонику димензија $1\times 10\sqrt{2}$ који задовољава услове задатка је $\sqrt{2}$. Како је $570\sqrt{2}-360<316\sqrt{2}$, следи да се у $ABCD$ не може сместити више од 315 правоугаоника са траженим својствима.

Дакле, тражени број је 315.

БМО '00.4

Важи следеће тврђење:
За свако $n\in\mathbb{N}$ постоји $d\in\mathbb{N}$ такав да су бројеви $d,2d,\ldots,nd$ степени.

Ово тврђење може се доказати индукцијом. За $n=1$ и $n=2$ може се узети $d=2^2$ (јер су 2^2 и 2^3 степени). Нека је тврђење тачно за n, тј. нека постоји $d\in\mathbb{N}$ такво да је $id=t_i^{s_i}$ за свако $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, где је $t_i,s_i\geqslant 2$. Нека је $m=\mathrm{NZS}(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ и $D=(n+1)^m d^{m+1}$. Тада је

$$iD=id\,[(n+1)d]^m=t_i^{s_i}\cdot[(n+1)d]^m=\left[t_i\cdot((n+1)d)^{\frac{m}{s_i}}\right]^{s_i}$$

за $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ и $(n+1)D=((n+1)d)^{m+1}$, па је тврђење тачно и за $n+1$, тј. дато тврђење је доказано индукцијом.

Дакле, постоји d, такво да су бројеви $d,2d,\ldots,n\cdot n!d$ степени. Нека је

$$A=\{n!d,2\cdot n!d,\ldots,n\cdot n!d\}\,.$$

Тада A има n елемената и сваки од њих је степен (тј. испуњени су услови (а) и (б) задатка). Нека су $r_1,r_2,\ldots,r_k\in A$ и нека је $r_i=a_i\cdot n!d$ за $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ (јасно је да је $a_i\in\mathbb{N}$ и $a_i\leqslant n$ за $i\in\{1,2,\ldots,k\}$). Тада је

$$\frac{r_1+r_2+\ldots+r_k}{k}=\frac{n!}{k}\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_k)d.$$

Како је $k \mid n!$, $a_i \in \mathbb{N}$ за $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leqslant k \cdot n$, следи да је $\dfrac{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}{k} = N \cdot d$, где је $N \in \mathbb{N}$ и $N \leqslant n \cdot n!$, па је, по избору броја d, и $\dfrac{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}{k}$ степен.

Дакле, тако изабран скуп A задовољава услове задатка.

БМО '01.1

Како је a непаран број, највећи степен броја 2 који дели бројеве $ab - (a-b) - 1 = (a+1)(b-1)$ и $a(a+1)(b-1)$ је једнак. По услову задатка је $a(a+1)(b-1) = (a+1)(ab-a) = (a+1)(2^n - (a+1))$. Ако је $(a+1) = 2^m \cdot l, 2 \nmid l$, тада је $2^n - (a+1) = 2^m \cdot \left(2^{n-m} - l\right)$ и како је $n > m$ следи да $2 \nmid \left(2^{n-m} - l\right)$, одакле следи и тврђење задатка.

БМО '01.2

Прво решење: Нека је $A_1A_2A_3A_4A_5$ петоугао који задовољава услове задатка и нека је права A_1A_5 сече A_2A_3 и A_3A_4 у C и D, редом. Како су унутрашњи углови петоугла једнаки (и то $\frac{3\pi}{5}$), троуглови A_4DA_5, A_4DA_5 и CA_3D су једнакокраки и важи $CA_3 = A_3D$, $2CA_2 \cos\dfrac{2\pi}{5} = A_1A_2$ и $CA_2 + A_2A_3 = A_3A_4 + A_4D$, па следи

$$2\cos\frac{2\pi}{5} \cdot (A_2A_3 - A_3A_4) = A_4A_5 - A_1A_2.$$

Како је $\sin\dfrac{\pi}{10} = \cos\dfrac{2\pi}{5} = 1 - 2\sin^2\dfrac{\pi}{5} = 1 - 2 \cdot \sin^2\dfrac{\pi}{10}(1 - \sin^2\dfrac{\pi}{10})$, следи да је $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ корен једначине $x = 1 - 8x^2(1 - x^2)$, тј. $0 = 8x^4 - 8x^2 - x - 1 = (x-1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(4x^2 + 2x - 1)$. Како је $0 < \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$, следи да је $\cos\frac{2\pi}{5}$ позитивно решење једначине $4x^2 + 2x - 1$, тј. $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Дакле, $\cos\frac{2\pi}{5}$ је ирационалан број, па следи $A_2A_3 = A_3A_4$ и $A_1A_2 = A_4A_5$. Аналогно се показују и преостале једнакости страница петоугла, па он мора бити правилан.

Друго решење: Нека је петоугао који задовољава услове задатка смештен у комплексну раван, тако да је једна страница петоугла паралелна реалној оси (без умањења општости може се узети да је та страница јединичне дужине). Тада преосталим страницама петоугла одговарају реални умношци бројева $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, где је $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{5}$ (због једнакости углова), тј. важи $1 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 = 0$ за $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Из другог услова задатка следи да је $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Q}$ (количник рационалних бројева је рационалан број), а из тога и да је $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1 \in \mathbb{R}$, јер је $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ минимални полином α у $\mathbb{Q}[x]$ (то следи нпр. из Ајзенштајновог критеријума, јер је $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$, тј. за $y = x - 1$ следи $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \dfrac{(y+1)^5 - 1}{y} = y^4 + 5y^3 + 10y^2 + 10y + 5$, коефицијент уз y^4је 1, остали су дељиви са 5, а слободан члан није дељив са 25).

БМО '01.3

Нека је $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, y = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$. Услов задатка постаје $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant xyz$, а треба доказати да важи $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geqslant xyz$. Из неједнакости између квадратне и аритметичке средине, следи

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geqslant \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

(из неједнакости између аритметичке и геометријске средине, односно из услова задатка)

$$\geqslant (\sqrt[3]{xyz})^{\frac{3}{2}} \cdot (xyz)^{\frac{1}{2}} = xyz,$$

што је требало доказати. Због једнакости средина, да би важила једнакост мора бити $x = y = z$, а како је коришћен и услов задатка, следи $x = \dfrac{x+y+z}{3} = xyz = x^3$, па како је $x > 0$ следи да је $x = y = z = 1$, тј. $a = b = c = \sqrt{3}$. За ову тројку једнакост је испуњена.

БМО '01.4

Нека су ћелије обојене у црвено и бело, тако да суседне ћелије имају различиту боју (такво бојење је могуће; нпр. нека су црвене јединична коцка која нема додирних тачака са странама дате коцке и 12 јединичних коцки које имају тачно 2 стране на странама дате коцке) и нека је свакој ћелији додељен број који је додељен јединичној коцки која се у почетном положају налази у њој. Нека је преосталој ћелији додељен симбол r. Тада се почетни положај може видети као пермутација

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 25 & 26 & r \\ 1 & 2 & \dots & 25 & 26 & r \end{pmatrix},$$

док дозвољени потез представља транспозиција облика

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & 26 & r \\ 1 & 2 & \dots & r & \dots & 26 & i \end{pmatrix}, \text{ за } i \in \{1, 2, \dots, 26\}. \quad (*)$$

Дакле, питање задатка је да ли се помоћу коначно много оваквих пермутација из почетне пермутације (јединична) може доћи до пермутације

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 25 & 26 & r \\ 26 & 25 & \dots & 2 & 1 & r \end{pmatrix} (= q),$$

тј. да ли постоје $t \in \mathbb{N}$ и $p_1, p_2, \dots, p_t$ облика $(*)$, тако да важи $q = p_1 p_2 \dots p_t$.

Како је се q представља као производ непарно много транспозиција ($q = (1,26)(2,25)\dots(13,14)$), следи да је q непарна пермутација, па како су све пермутације облика $(*)$ непарне, t мора бити непарно. Са друге стране, свака пермутација облика $(*)$ мења боју коцке којој је додељен симбол r, а како је та боја иста у почетном и крајњем положају, t мора бити парно.

Из добијена контрадикције следи да помоћу дозвољених потеза није могуће добити тражени распоред.

БМО '02.1

Нека је $s \in \mathbb{N}$ такво да постоји пут дужине s (тј. $S = X_1 X_2 \dots X_s$, где је $X_i \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ за $1 \leqslant i \leqslant s$, $X_i \neq X_j$ за $i \neq j$, X_i и X_{i+1} су повезани за $1 \leqslant i \leqslant s-1$) и не постоји веће s са том особином (такво s очигледно постоји). Нека $S = X_1 X_2 \dots X_s$ такав пут. Како је X_1 повезан са бар три друге тачке, повезан је са бар две тачке различите од X_2 (Y и Z). Мора бити $\{Y, Z\} \subseteq \{X_3, \dots, X_s\}$ иначе би постојао пут дужине $s+1$ ($Y X_1 X_2 \dots X_s$ или $Z X_1 X_2 \dots X_s$), па је $Y = X_i$, $Z = X_j$ за неке i, j ($i \neq j$). Нека је $i < j$. Ако је i парно, тада су $X_1, X_2, \dots, X_i$ тачке које задовољавају услове задатка, ако је j парно, тада су $X_1, X_2, \dots, X_j$ тачке које задовољавају услове задатка, а ако су i и j непарни, тада су $X_i, X_{i+1}, \dots, X_j$ тачке које задовољавају услове задатка.

БМО '02.2

Из услова задатка следи да за $n \geqslant 2$ важи $5a_n = a_{n+1} + 2a_n + a_{n-1}$, па је

$$(1 + 5a_n a_{n+1}) - (1 + 5a_{n-1} a_n) = 5a_n (a_{n+1} - a_{n-1}) =$$

$$(a_{n+1} + 2a_n + a_{n-1})(a_{n+1} - a_{n-1}) = a_{n+1}^2 + 2a_n a_{n+1} - 2a_n a_{n-1} - a_{n-1}^2 =$$
$$(a_{n+1} + a_n)^2 - (a_n + a_{n-1})^2,$$

па следи

$$(1 + 5a_n a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_n)^2 = (1 + a_{n-1} 5a_n) - (a_n + a_{n-1})^2,$$

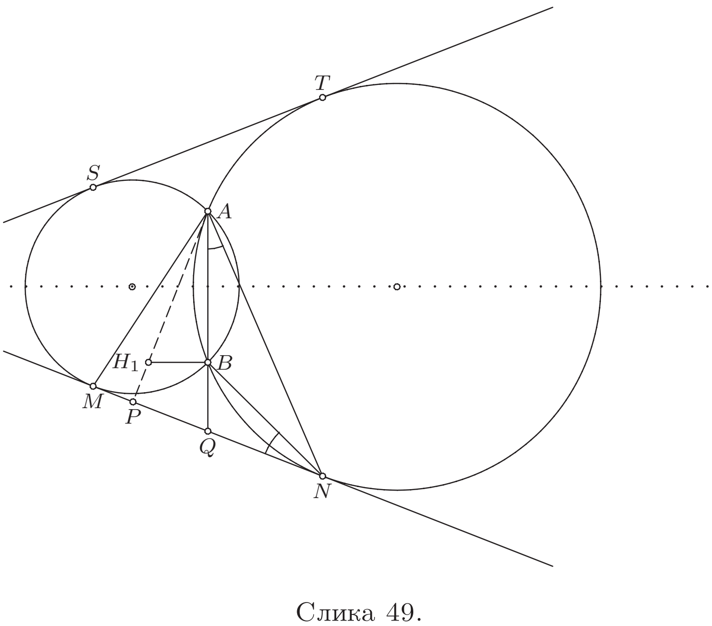
тј. вредност израза $(1 + 5a_n a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_n)^2$ не зависи од n и једнака је $(1 + 5a_2 a_1) - (a_2 + a_1)^2 = 501$.

Дакле, важи $1+5a_na_{n+1}=(a_n+a_{n+1})^2+501$ за свако $n\in\mathbb{N}$. Како је $(a_n+a_{n+1})^2$ потпун квадрат и како је $(k+1)^2-k^2=2k+1$, мора бити $a_n+a_{n+1}\leqslant 250$. Међутим, како низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ расте (индукција: $a_2=30>20=a_1$; ако $a_n>a_{n-1}$, следи $a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}>2a_n>a_n$ за свако $n\geqslant 2$) и како је $a_4=180$, следи да за $n\geqslant 4$ важи $a_n+a_{n+1}\geqslant a_4+a_4=360>250$, следи да $1+5a_na_{n+1}$ не може бити потпун квадрат за $n\geqslant 4$.

Како је $1+5a_1a_2=3001, 54^2<3001<55^2$, $1+5a_2a_3=10501, 102^2<10501<103^2$ и $1+5a_3a_4=63001=251^2$, следи да је $1+5a_na_{n+1}$ потпун квадрат само за $n=3$.

БМО '02.3

Нека су H_1, H_2, H_3 и H_4 ортоцентри троуглова AMN, AST, BMN и BST, редом. Због симетрије у односу на праву која спаја центре кружница, четвороугао $H_1H_2H_3H_4$ је једнакокраки трапез, са основицама паралелним правој AB. Дакле, довољно је још показати да су краци нормални на AB. Важи и више, наиме је $H_1B\perp AB$ и $H_2\perp AB$ (тачке A и B припадају крацима трапеза). Доказ за $H_2\perp AB$ је аналоган доказу за $H_1B\perp AB$, па остаје још да се последње покаже. Нека је $Q=AB\cap MN$. Тачка Q је средиште дужи MN, јер је због потенције у односу на дате кружнице $QM^2=QB\cdot QA=QN^2$.



Слика 49.

На основу теореме о тангентном и углом над тетивом, важи $\sphericalangle QNB=\sphericalangle NAQ$ и $\sphericalangle QMB=MAQ$. Следи $\triangle QNB\sim\triangle QNA$ и $\triangle MQB\sim$

$\triangle MQA$, па је $\sphericalangle NBM + \sphericalangle NAM = \sphericalangle MNA + \sphericalangle AMN + \sphericalangle NAM = 180°$, па тачка B', која је симетрична у односу на Q са тачком B припада описаној кружници $\triangle AMN$. Како је тачка симетрична тачки H_1 у односу на Q (H_1') дијаметрално супротна тачка ове кружнице у односу на A, следи $\sphericalangle H_1'B'A = 90°$, па је и $\sphericalangle H_1BA = 90°$ (права AQ је инваријантна при симетрији у односу на Q).

Друго решење. Важе сви закључци из првог пасуса првог решења. Нека је $P = AB \cap AH_1$. Довољно је доказати да је четвороугао H_1BPQ тетиван, тј. да је $AH_1 \cdot AP = AB \cdot AQ$.

Из потенције тачке P у односу на описану кружницу $\triangle AMN$ следи $PM \cdot PN = PH_1 \cdot PA$ (тачке симетричне ортоцентру у односу на странице троугла припадају његовој описаној кружници). Следи да је

$$\begin{aligned} AH_1 \cdot AP &= (AP - H_1P) \cdot AP = AP^2 - PM \cdot PN \\ &= (AQ^2 - AP^2) - (MQ - PQ) \cdot (NQ + PQ) \\ &= AQ^2 - PQ^2 - MQ^2 + PQ^2 = AQ^2 - PQ^2 \\ &= AQ^2 - AQ \cdot BQ = AQ \cdot (AQ - BQ) = AQ \cdot AB. \end{aligned}$$

БМО '02.4

Нека је низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $a_1 = n$, $a_{n+1} = f(a_n)$ за $n \geqslant 1$. Нека је низ $(b_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $b_n = a_{n+1} - a_n - 667$ за $n \geqslant 1$. Тада из услова задатка следи $b_{n+1} + 2b_n \in \{0, 1\}$ за $n \in \mathbb{N}$.

Ако је $b_n \leqslant -1$, тада је $b_{n+1} \geqslant -2b_n$, па је $b_{n+2} \leqslant 1 - 2b_{n+1} \leqslant 1 + 4b_n \leqslant 3b_n$. Дакле, ако је $b_1 < 0$, тада је $b_{2n+1} < -3^n$. (1)

Даље, како је $a_{n+1} = 2a_n + (2001 + \varepsilon_n) - a_{n+2} \leqslant 2a_n + 2001$, где је $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ низ који садржи само елементе из скупа $\{0, 1\}$, следи да ако је $a_n > 4002$, тада је $a_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{2} \cdot a_n$, па је $a_n < C \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ за неко $C \in \mathbb{R}$ (ако важи $a_n \leqslant 4002$, тим пре важи горња процена).

Међутим, из (1) следи $a_{2n+1} - a_{2n} - 667 < -3^n$, па је $a_{2n+1} < 667 + C \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^n - 3^n \to -\infty$ кад $n \to \infty$, тј. негативно је за неко n, што је контрадикција са чињеницом да је слика f у $\mathbb{N}$.

Следи $b_1 \geqslant 0$. Ако је $b_1 \geqslant 1$, тада је $b_2 = \varepsilon_2 - 2b_1 < 1 - 2b_1 < 0$, што је немогуће (понављањем истоветног поступка као у случају $b_1 < 0$).

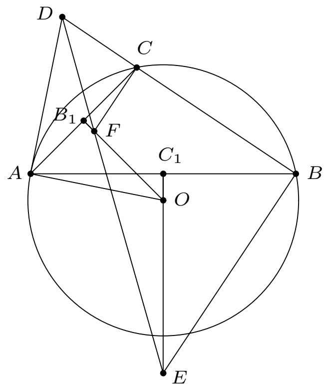
Дакле, $b_1 = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па мора бити $f(n) = n + 667$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Лако се проверава да ова функција задовољава услове задатка.

БМО '03.1

Нека је C скуп који се састоји од 2002 различита природна броја дељива са 2003, нпр. $\{2003k \mid 1 \leqslant k \leqslant 2002\}$, а D скуп који се састоји од 2002 различита природна броја, који при дељењу са 2003 дају остатак 1, нпр. $\{2003k + 1 \mid 1 \leqslant k \leqslant 2002\}$. Нека је $B = C \cup D$, а A произвољан његов подскуп од 2003 елемента. Нека $A \cap D$ има k елемената (важи $1 \leqslant k \leqslant 2002$, јер скупови C и D имају 2002 елемената). Тада $A \cap C$ има $2003 - k$ елемената, те збир бројева у A при дељењу са 2003 даје остатак $(2003-k)\cdot 0 + k \cdot 1 = k$, па није дељив са 2003, јер је $1 \leqslant k \leqslant 2002$. Дакле, тражени скуп постоји.

БМО '03.2

Нека су B_1 и C_1 средишта страница AC и AB, редом и нека је O центар описаног круга троугла ABC. Нека су у истом троуглу α, β, γ углови код темена A, B, C,редом, и a, b, c дужине страница BC, CA, AB, редом.



Слика 50.

Нека је распоред тачака као на слици 50 (за другачији положај тачака, на пример, када је $AB < AC$, тј. $\gamma < \beta$, или кад је угао γ оштар, доказ је аналогнан.

Из правоуглог троугла BC_1E добија се да је

$$BE = \frac{BC_1}{\cos(\sphericalangle C_1BE)} = \frac{c}{2\sin(\sphericalangle C_1EB)} = \frac{c}{2\sin\beta}$$

($\sphericalangle C_1EB = \sphericalangle ABC = \beta$ као углови са нормалним крацима). Аналогно из $\triangle CB_1F$ следи $CF = \dfrac{b}{2\sin\gamma}$ ($\sphericalangle B_1FC = \pi - \sphericalangle ACB$, али је опет $\sin(\sphericalangle B_1FC) = \sin\gamma$).

У троуглу ADC важи $\sphericalangle DAC = \beta$ и $\sphericalangle ADC = \gamma - \beta$. Из синусне теореме следи

$$\frac{DC}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin(\gamma-\beta)} \quad \Rightarrow \quad DC = \frac{b\cdot\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}.$$

У $\triangle ADB$ је $\sphericalangle DAB = \alpha + \beta = \pi - \gamma$ и $\sphericalangle ADB = \gamma - \beta$. Из синусне теореме следи

$$\frac{DB}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AB}{\sin(\gamma-\beta)} \quad \Rightarrow DB = \frac{c\cdot\sin(\pi-\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)} = \frac{c\cdot\sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}.$$

Како важи $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BE}{CF}$, добија се да су правоугли троуглови $\triangle BDE$ и $\triangle CDF$ слични. Следи да је $\sphericalangle BDE = \sphericalangle CDF$, па су тачке D, E и F колинеарне.

БМО ’03.3

Након сређивања, услов (а) постаје $f(x+y)+(x+y) = (f(x)+x)(f(y)+y)$, тј. ако је $g(x) = f(x) + x$, следи:
(а’) $g(x + y) = g(x)g(y)$, за свако $x, y \in \mathbb{Q}$,
(б’) $g(x) = 2g(x + 1)$, за свако $x \in \mathbb{Q}$,
(в’) $g(1) > 0$.
За $x = y = 0$ из (а’) следи $g(0) = (g(0))^2$, па је $g(0) = 0$ или $g(0) = 1$. За $x = 0$ из (б’) и (в’) следи $g(0) = 2g(1) > 0$, па је $g(0) = 1$. Из (б’) је $g(1) = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$, па из (а’) индукцијом следи да је

$$g(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{за свако} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ако се у једнакост (а’) замени $y = -x$ добија се $g(0) = 1 = g(x)g(-x)$, па је

$$g(-x) = \frac{1}{g(x)}\,. \tag{$*$}$$

Пошто је $g(0) = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ и $g(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, следи

$$g(z) = \left(\frac{1}{2}\right)^z \quad (\forall z \in \mathbb{Z}).$$

Ако се у (а’) x и y замене са $\frac{x}{2}$ добија се

$$g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right) = \left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$$

за свако $x \in \mathbb{Q}$. Због тога је m-ти корен једнозначно одређен и када је m паран број.
Индукцијом по m следи да је $g(m \cdot x) = g(x)^m$ за свако $m \in \mathbb{N}$. Коришћењем једнакости $(*)$ следи и

$$g(m \cdot x) = g(x)^m \tag{$**$}$$

за свако $m \in \mathbb{Z}$, одакле се за $x = \frac{1}{m}$ добија

$$g\left(m \cdot \frac{1}{m}\right) = g(1) = \frac{1}{2} = \left(g\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m,$$

одакле је

$$g\left(\frac{1}{m}\right) = \sqrt[m]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}}$$

за свако $m \in \mathbb{N}$. Ако се у једнакост $(**)$ замени $x = \frac{1}{k}$ добија се $g\left(\frac{m}{k}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{k}}$, односно

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (\forall x \in \mathbb{Q}).$$

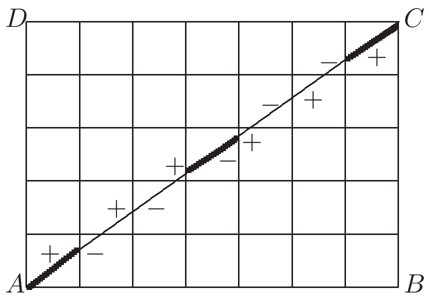
Следи да је

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x = 2^{-x} - x, \quad (x \in \mathbb{Q}).$$

Лако се проверава да ова функција задовољава сва три услова задатка.

БМО '03.4

Без умањења општости може се претпоставити да је $m \geqslant n$ (због симетрије). Нека је сегмент A_pA_{p+1} *првог типа* ако су A_p и A_{p+1} тачке пресека дијагонале AC са узастопним вертикалним линијама мреже (такви сегменти су на слици 51 представљени подебљаним линијама). Ако је једна од тачака A_p и A_{p+1} пресек дијагонале AC са вертикалном линијом мреже, а друга са хоризонталном линијом, сегмент A_pA_{p+1} је *другог типа*.



Слика 51.

Постоји $m-1$ пресечних тачака дијагонале AC са вертикалним линијама и $n-1$ пресечних тачака дијагонале AC са хоризонталним линијама, различитих од A и C.

Све те тачке су међусобно различите (ако би се поклапале неке, тада би дијагонала AC пролазила кроз тачку (a, b) са целобројним координатама, па би из Талесове теореме следило $a : b = m : n$, тј. $an = bm$, што је немогуће, јер је $(m, n) = 1$, а за природне бројеве a и b важи $0 < a < m$ и $0 < b < n$). Стога оне деле AC на $m+n-1$ сегмената (овај број је, по условима задатка, непаран). Први члан у суми је позитиван. Из непарности броја $m+n-1$ следи да у датој суми позитивних чланова има један више него негативних. Ако је A_p пресечна тачака дијагонале AC са хоризонталном линијом тада су њени околни сегменти $A_{p-1}A_p$ и A_pA_{p+1} сегменти другог типа и у суми учествују са супротним знаком. Стога у суми учествује једнак број „позитивних" и „негативних“ сегмената другог типа. Следи да „позитивних“ сегмената првог типа у датој суми има за један више од „негативних“ сегмената првог типа. Како сви сегменти првог типа имају исту дужину (из Талесове теореме се добија да је дужина оваквог сегмента $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$), следи да је „допринос“ сегмената првог типа траженој суми једнак дужини једног таквог сегмента, тј. $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$.

За фиксно $k = 1, 2, \ldots, n-1$, нека број km при дељењу са n даје количник t_k и остатак r_n, односно $km = t_k n + r_k$, где је $0 < r_k < n$. Пресечна тачка дијагонале AC са k-том хоризонталном линијом (где је AB нулта) је тачка A_s, где је $s = k + t_k + 1$ и има координате (у координатном систему у ком је A координатни почетак) $(t_k + \frac{r_k}{n}, k)$. Одавде се добија знак сегмената око тачке A_s:

$k+t_k$	$A_{s-1}A_s$	A_sA_{s+1}
парно	$-$	$+$
непарно	$+$	$-$

.

Даље, r_k има исту парност као и $k + t_k$:

ако је k паран и $km = t_k n + r_k$ је паран, па су бројеви r_k и t_k исте парности, па су и r_k и $k + t_k$ исте парности. Ако је k непаран и $km = t_k n + r_k$ је непаран, па су бројеви r_k и t_k различите парности, па су r_k и $k + t_k$ исте парности.

Са друге стране, како $r_p = r_q$ даје $pm \equiv qm \pmod n$, а ово повлачи $p \equiv q \pmod n$ (јер су m и n узајамно прости бројеви), односно $p = q$ (јер важи $0 < p, q < n$), следи да су бројеви r_k сви могући остаци (сем 0) по модулу n.

Када је r_k паран број следи да је

$$\begin{aligned}
-A_{s-1}A_s + A_sA_{s+1} &= -\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{r_k}{n} + \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{n-r_k}{n} \\
&= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{n-2r_k}{n}\,.
\end{aligned}$$

Како r_k узима по једном сваку од вредности $2, 4, \ldots, n-1$, ови чланови „доприносе“ суми са

$$\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-2\cdot(2i)}{n} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 1 - \frac{4}{n}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i\right)$$

$$= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\left(\frac{n-1}{2} - \frac{4}{n}\cdot\frac{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{1-n}{2n}\,.$$

Када је r_k непаран број је

$$A_{s-1}A_s - A_sA_{s+1} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{r_k}{n} - \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{n-r_k}{n} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{2r_k-n}{n}\,.$$

Како r_k узима по једном сваку од вредности $1, 3, \ldots, n-2$ ови чланови „доприносе“ суми са

$$\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2\cdot(2i-1)-n}{n} =$$

$$\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m} \cdot \left(\frac{4}{n} \cdot \frac{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}{2} - \frac{2}{n}\cdot\frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{2} \right) = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m} \cdot \frac{1-n}{2n}.$$

Стога је допринос свих сегмената другог типа траженој суми једнак $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m} \cdot \frac{1-n}{n}$, што са $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$ од сегмената првог типа даје

$$\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} |A_j A_{j+1}| = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}.$$

БМО '04.1

Заменом $n = 0$ се добија

$$a_{2m} = 4a_m - 2m - 3. \tag{1}$$

Заменом $m = 1$ и $n = 0$ следи $a_2 = 7$. Замена $n = 1$ у полазној релацији даје $a_{m+1} + a_{m-1} - m = \frac{1}{2} \cdot (a_{2m} + a_2)$, одакле је

$$a_{2m} = 2a_{m+1} + 2a_{m-1} - 2m - 7. \tag{2}$$

Одузимањем (2) и (1) и дељењем са 2 добија се нехомогена линеарна рекурентна једначина

$$a_{m+1} - 2a_m + a_{m-1} = 2,$$

па се тражењем њеног решења у облику $a_n = An^2 + Bn + C$ добија да је $A = B = C = 1$, тј. $a_n = n^2 + n + 1$, односно $a_{2004} = 2004^2 + 2005$.

БМО '04.2

Ако је $x = y$, једначина

$$x^y - y^x = xy^2 - 19 \tag{1}$$

нема решења, јер је тада лева страна једнака 0, а десна $x^3 - 19$, што је немогуће. Посматрањем једначине (1) по модулу y, а затим и по модулу x добија се

$$x + 19 \equiv 0 \pmod{y} \quad (2) \qquad\qquad 19 - y \equiv 0 \pmod{x}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следи да xy дели $x-y+19$. Не може бити $x-y+19=0$ (због парности би x морало бити $x=2$, али онда $y=21$ није прост), па следи $x+y+19>|x-y+19|\geqslant xy$, одакле је

$$(x-1)(y-1)<20.$$

Следи да су прости бројеви x и y мањи од 20, па је $|x-y|<19$. Стога је $|x-y+19|=x-y+19$, па је $x-y+19\geqslant xy$, тј.

$$(x+1)(y-1)\leqslant 18. \tag{3}$$

Из (3) следи да за $x\geqslant 5$ прост број y може бити само $y=2$ или $y=3$. За $y=2$ следи

$$x^y-y^x=x^2-2^x<0<5\cdot 2^2-19\leqslant x\cdot y^2-19$$

($x^2-2^x<0$, за $x\geqslant 5$, се лако показује математичком индукцијом), док за $y=3$ следи

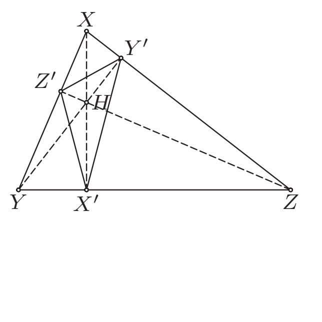
$$x^y-y^x=x^3-3^x<0<5\cdot 3^2-19\leqslant x\cdot y^2-19$$

(опет се $x^3-3^x<0$, за $x\geqslant 5$, лако показује математичком индукцијом). Стога за $x\geqslant 5$ полазна једначина нема решења.

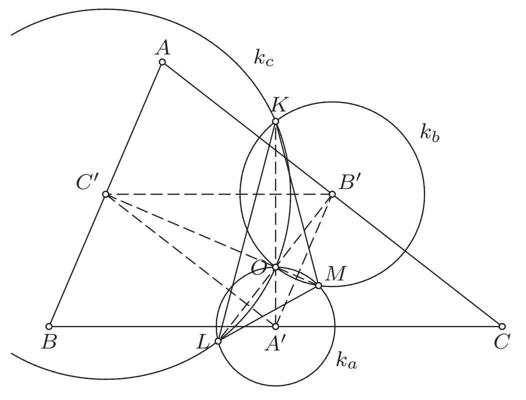
Остаје да се провери $(x,y)\in\{(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,5)\}$. Добија се да су једина решења $(x,y)=(2,3)$ и $(x,y)=(2,7)$.

БМО '04.3

Нека су A', B' и C' средишта страница BC, CA и AB, редом, а k_a, k_b и k_c кружнице кроз тачку O са центрима у тачкама A', B' и C', редом. Како су K и O пресечне тачке кружница k_b и k_c следи да је $KO\perp B'C'$ (притом $B'C'$ полови KO), а како је $B'C'\parallel BC$ (средња линија $\triangle ABC$), добија се да је $KO\perp BC$. Аналогно се добијају и $LO\perp CA$ и $MO\perp AB$.



Слика 52.



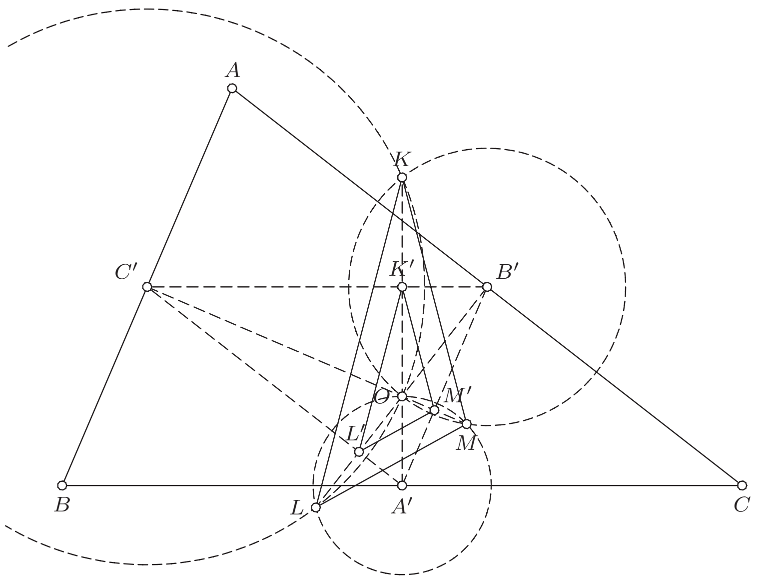
Слика 53.

Нека је O центар описаног круга $\triangle ABC$. Како је $OA' \perp BC$ ($\parallel B'C'$), следи да је O ортоцентар $\triangle A'B'C'$. Како је $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ и како је $\triangle ABC$ оштроугли, следи да је и $\triangle A'B'C'$ оштроугли, па је његов ортоцентар O у унутрашњости $\triangle A'B'C'$. Нека су K', L' и M' средишта дужи OK, OL и OM (то су подножја висина у $\triangle A'B'C'$).

Ради лакшег праћења, прво је показана лема:

> *Лема.* Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла XYZ и нека су X', Y' и Z' пројекције H на YZ, ZX и XY, редом. Тада је H центар уписаног круга у $\triangle X'Y'Z'$.
>
> *Доказ.* Четвороугао $XY'HZ'$ је тетиван јер је $\sphericalangle XY'H = \sphericalangle XZ'H = 90°$. Одатле је $\sphericalangle HZ'Y' = \sphericalangle HXZ$. Аналогно је и $\sphericalangle HZ'X' = \sphericalangle HYZ$. Међутим, важи $\sphericalangle HXZ = \sphericalangle HYZ = 90° - \sphericalangle YZX$ (из правоуглих $\triangle YZY'$ и $\triangle X'ZX$). Стога је $\sphericalangle HZ'Y' = \sphericalangle HZ'X'$, па је права HZ' симетрала угла $\sphericalangle X'Z'Y'$. Аналогно се показује и да је HY' симетрала угла $\sphericalangle X'Y'Z'$, па је H центар уписаног круга у троугао $\triangle X'Y'Z'$.

На основу претходне леме следи да је O центар уписаног круга у троугао $K'L'M'$. Како је $\triangle KLM$ слика $\triangle K'L'M'$ при хомотетији са центром у O и коефицијентом 2, следи да је O и центар уписаног круга у $\triangle KLM$.



Слика 54.

Обратно, нека је O центар уписаног круга у $\triangle KLM$. Тада тачка O припада унутрашњости $\triangle KLM$, па припада и унутрашњости троугла

$\triangle K'L'M'$, који се добија од $\triangle KLM$ хомотетијом са центром у O и коефицијентом $\frac{1}{2}$. Како K' припада дужи $B'C'$, L' припада дужи $C'A'$ и M' припада дужи $A'B'$, тачка O је и у унутрашњости $\triangle A'B'C'$.

Како је O центар уписаног круга у $\triangle KLM$, важи $\sphericalangle LKO = \sphericalangle MKO$, па из односа периферијских и централних углова у круговима k_b и k_c следи

$$\sphericalangle A'C'O = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle LC'O = \sphericalangle LKO = \sphericalangle MKO = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle MB'O = \sphericalangle A'B'O. \quad (1)$$

Аналогно је $\sphericalangle C'A'O = \sphericalangle C'B'O$ и $\sphericalangle B'A'O = \sphericalangle B'C'O$. Сабирањем ове три једнакости добија се $\sphericalangle C'A'O + \sphericalangle A'C'O + \sphericalangle B'C'O =$

$$\frac{\sphericalangle C'A'B' + \sphericalangle A'B'C' + \sphericalangle B'C'A'}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Одавде је $A'O \perp B'C'$, а због $B'C' \parallel BC$ је и $A'O \perp BC$. Аналогно се показује и $B'O \perp AC$, па је O центар описаног круга $\triangle ABC$.

Напомена. Једнакост (1) се може искористити и за доказ смера који је први доказан у горњем решењу. Наиме, из $\sphericalangle A'B'O = 90^\circ - \sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle A'C'O$ и из односа периферијских и централних углова у круговима k_b и k_c добија се

$$\sphericalangle LKO = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle LC'O = \sphericalangle A'C'O = \sphericalangle A'B'O = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle MB'O = \sphericalangle MKO.$$

Као и у решењу, тачка O је у унутрашњости $\triangle A'B'C'$, па и у унутрашњости $\triangle K'L'M'$. Због овога и $\sphericalangle LKO = \sphericalangle MKO$ добија се да је KO симетрала угла $\sphericalangle LKM$. Аналогно се показује да је и MO симетрала угла $\sphericalangle KML$, па је O центар уписаног круга у $\triangle KLM$.

БМО ’04.4

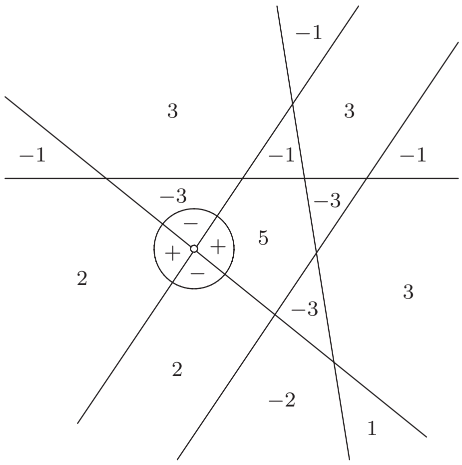
Ако су све праве паралелне, тада се коришћењем услова (б) за сваку од две праве које одређују неку област показује да су сви бројеви у областима једнаки 0 и тада није испуњен услов (а).

Ако постоје две праве које нису паралелне показаћемо да је могуће уписати целе бројеве који задовољавају оба услова.

Пре свега, могуће је уписати знаке + и − у све области, тако да су знаци у суседним областима различити, доказ индукцијом.
База индукције. За $n = 1$ се у једну област упише +, а у другу −.
Индукцијски корак. Нека је могуће уписати знаке тако да су знаци у суседним областима различити када је раван подељена на области са n правих од које нису све паралелне. Уколико се у равни налази $n+1$ правих, тако да бар две нису паралелне, може се уочити једну од њих (p), чијим одстрањивањем се добија n правих, које нису све паралелне. У области на које раван дели преосталих n правих се могу уписати

знаци према индукцијској претпоставци. Ако се приликом враћања праве p са једне њене промени знак $+$ у $-$, односно $-$ у $+$, а са друге стране ништа не промени, добија се тражено уписивање за $n+1$ правих. Заиста, нека су уочене две суседне области.

- Ако су оне биле на оној страни праве p где се није мењао знак оне имају исти знак као пре увођења праве p, тако да оне имају различит знак.
- Ако су оне биле на оној страни праве p где се мењао знак, онда су обе промениле знак, па како су пре увођења праве p имале различит знак, онда опет имају различит знак.
- Ако су ове области са разних страна праве p оне су настале од јединствене области која је подељена правом p, па оне имају различит знак.



Слика 55.

Дакле, могуће је уписати знаке $+$ и $-$ на наведени начин. Нека је у сваку област уписан број $z \cdot u$, где је $z = 1$, ако је у тој области био уписан знак $+$, а -1, ако је био уписан знак $-$, а u број углова у тој области.

Тада овако уписани бројеви задовољавају оба услова:

(а) у сваком пару суседних области су два цела броја (a и b), од којих је један позитиван, а други негативан. Нека је $a < 0 < b$. Тада важи $ab \leqslant a < a + b$;

(б) у свакој тачки пресека две праве броје се околни углови или два или четири пута са различитим знацима:

(1) $+$ и $-$ у случају да постоје 2 дела (тј. кад је та тачка пресека на правој у односу на коју се рачуна збир свих бројева са једне стране);

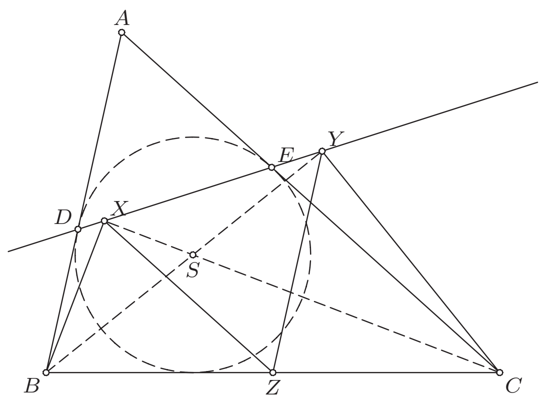
(2) $+,-,+,-$ у случају да постоје 4 дела (тј. кад се броје сви углови око неке пресечне тачке);

у сваком случју, како је збир уочених бројева за сваку тачку пресека 0, испуњен је услов (б).

На слици 55 је показан пример траженог уписивања бројева у области равни настале исецањем 5 правих.

БМО '05.1

Нека је S центар уписане кружнице, a дужина странице BC и нека су α, β, γ углови код темена A, B, C троугла ABC, редом.



Слика 56.

Како је $\triangle ADE$ једнакокрак ($AD = AE$) и како је

$$\sphericalangle XSB = 180^\circ - \sphericalangle BSC = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

и

$$\sphericalangle ADE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

добија се да је $\sphericalangle XSB = \sphericalangle ADE = 180^\circ - \sphericalangle BDX$, одакле следи да је четвороугао $DBSX$ тетиван. Даље је $\sphericalangle BXC = \sphericalangle BDS = 90^\circ$, па је $ZX = ZC = \dfrac{a}{2}$ полупречник описане кружнице око правоуглог $\triangle BXC$.

Аналогно се добија да је и $ESCY$ тетиван и одатле да је и $YZ = \dfrac{a}{2}$, тј. важи $XZ = YZ$.

Следи да је чињеница да је $\triangle XYZ$ једнакостраничан је еквивалентна са $\sphericalangle YXZ = 60°$. Из тетивног четвороугла $DBSX$ се добија да је $\sphericalangle YXC = \sphericalangle ABY = \dfrac{\beta}{2}$, а из једнакокраког троугла CXZ се добија да је $\sphericalangle CXZ = \sphericalangle XCZ = \dfrac{\gamma}{2}$, па је

$$\sphericalangle YXZ = \sphericalangle YXC + \sphericalangle CXZ = \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Коначно, како $\dfrac{\beta+\gamma}{2} = 60° \;\Leftrightarrow\; \alpha = 60°$, следи да је $\triangle XYZ$ једнакостраничан ако и само ако је $\sphericalangle BAC = 60°$, што је и требало доказати.

БМО '05.2

Једнакост $p^2 - p + 1 = b^3$ се може преуредити у облик

$$p(p-1) = (b-1)(b^2+b+1).$$

Како из $b^3 = p^2 - p + 1 < p^2 < p^3$ следи да је $b < p$, важи $p \mid b^2 + b + 1$. Дакле, следи

$$b^2 + b + 1 = k \cdot p$$
$$p - 1 = k \cdot (b-1)$$

за неки цео број $k \geqslant 2$. Из друге од ових једначина следи $p = kb - k + 1$, па се увршттавањем у прву добија да је

$$b^2 + b + 1 = k^2 b + k - k^2. \qquad (1)$$

Одавде је

$$b^2 + b < k^2 b \;\Rightarrow\; b + 1 < k^2 \quad \text{и}$$
$$k^2(b-1) \leqslant b^2 + b - 1 \;\Rightarrow\; k^2 \leqslant \frac{b^2+b-1}{b-1} = b + 2 + \frac{1}{b-1} < b + 3,$$

где последња неједнакост важи, јер је $b > 2$ (пошто једначине $p^2 - p + 1 = 1$ и $p^2 - p + 1 = 8$ немају решења у простим бројевима). Из претходних закључка следи да је $k^2 = b + 2$. Заменом у (1) се добија

$$b^2 + b + 1 = (b+2)\cdot b + k - (b+2) \;\Rightarrow\; k = 3 \;\Rightarrow\; b = 7 \;\Rightarrow\; p = 19.$$

БМО '05.3

Из $\dfrac{a^2}{b} - 2a + b = \dfrac{(a-b)^2}{b}$ и аналогних једнакости за преостала два сабирка на левој страни $\dfrac{b^2}{c} - 2b + c = \dfrac{(b-c)^2}{b}$ и $\dfrac{c^2}{a} - 2c + a = \dfrac{(c-a)^2}{b}$, тражена неједнакост се своди на

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geqslant \frac{(2a-2b)^2}{a+b+c}.$$

Последња неједнакост следи из неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског:

$$(b+c+a)\left(\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\right)\geqslant(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2$$

и чињенице да је $|a-b|+|b-c|+|c-a| = 2\cdot\max\{a,b,c\}-2\cdot\min\{a,b,c\} = 2\cdot\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}\geqslant 2|a-b|$. У неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског једнакост важи када је

$$\frac{(a-b)^2}{b^2}=\frac{(b-c)^2}{c^2}=\frac{(c-a)^2}{a^2}\,, \tag{1}$$

а у другој када је

$$\max\{|a-b|,|b-c|,|c-a|\}=|a-b|. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи да је $b\geqslant a$ и $b\geqslant c$, па опет из (2) следи $b-a = |a-b|\geqslant|b-c|$, тј. важи $b\geqslant c\geqslant a$. Сада се (1) може записати као

$$\frac{b-a}{b}=\frac{b-c}{c}=\frac{c-a}{a}\,.$$

Ако је $t=\dfrac{b}{c}$ и $z=\dfrac{c}{a}$, како је $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{a}=1$ добија се да је $1-\dfrac{1}{z}=t-1=\dfrac{z}{t}-1$, тј. $z=t^2$ и $1-\dfrac{1}{t^2}=t-1=t-1$, односно $\dfrac{t^3-2t^2+1}{t^2}=0$, тј. $(t-1)(t^2-t-1)=0$. Како је $t=\dfrac{b}{c}>0$ добију се решења $t_1=1$ и $t_2=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$. Стога следи да једнакост важи само када је

$$(a,b,c)\in\{(k,k,k),(k,k\cdot\frac{3+\sqrt5}{2},k\cdot\frac{1+\sqrt5}{2})\mid k\in\mathbb{R}^+\}\,.$$

БМО '05.4

Нека је *недозвољени пар* пар бројева од којих један дели други или пар бројева који су узајамно прости. Нека је S подскуп скупа $\{1,2,\ldots,n\}$ који не садржи недозвољене парове. Ако тај скуп има елементе који су не већи од $\dfrac{n}{2}$, и ако је s најмањи елемент скупа S, тада $2s\notin S$. Ако се елемент s замени са $2s$ у подскупу S добија се нови подскуп S' који има једнак број елемената као и S и који такође не садржи недозвољене парове. Ова процедура се може наставити док се не добије да су сви елементи подскупа бројеви који су већи од $\dfrac{n}{2}$. Стога, без умањења општости, може се предпоставити да су сви елементи скупа S већи од $\dfrac{n}{2}$.

Како за свака 2 узастопна природна броја важи да су узајамно прости то S може садржати највише по 1 елемент из сваког пара узастопних бројева већих од $\dfrac{n}{2}$. Стога S има највише $\left[\dfrac{n+3}{4}\right]$ елемената. Ако је $n = 4k+1$, $k \geqslant 1$, тада је $\left[\dfrac{n+3}{4}\right] = k+1$, па се из сваког пара $\{2k+1, 2k+1\}$, $\{2k+3, 2k+4\}$, $\ldots$, $\{4k+1\}$ (последњи члан се не може упарити) бира један елемент. Међутим, како је $(2k+1, 4k+1) = (2k+2, 4k+1) = 1$, међу ова три елемента у траженом скупу би се смело наћи највише 1. Следи да је за $n \equiv 1 \pmod 4$ број елемената скупа S не већи од $\left[\dfrac{n+2}{4}\right]$. За $n \not\equiv 1 \pmod 4$ је ово већ показано, пошто је за овакве бројеве $\left[\dfrac{n+3}{4}\right] = \left[\dfrac{n+2}{4}\right]$.

Остаје још да се покаже да се овај број може достићи за свако n. Подскуп парних бројева већих од $\dfrac{n}{2}$ има тачно $\left[\dfrac{n+2}{4}\right]$ елемената и да не садржи ниједан недозвољен пар.

БМО '06.1

Након множења обе стране неједнакости са $abc(1+a)(1+b)(1+c)(1+abc)$ и сређивања, добија се да је неједнакост из задатка еквивалентна са

$$a^3b^2c^2 + a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3 + a^2b^3c + ab^2c^3 + a^3bc^2 - 2ab^2c^2 - 2a^2bc^2 - a^2b^2c$$

$$-2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 + ab^2 + bc^2 + ca^2 + ab + bc + ca \geqslant 0,$$

односно са

$$bc^2(ab-1)^2 + ca^2(bc-1)^2 + ab^2(ca-1)^2 + bc(ab-1)^2 + ca(bc-1)^2 + ab(ca-1)^2 \geqslant 0,$$

која је испуњена. Једнакост важи ако и само ако су сви сабирци у претходној неједнакости једнаки 0, тј. ако и само ако је $ab = bc = ca = 1$, тј. ако и само ако је $a = b = c = 1$.

Друго решење. Нека је $a = \dfrac{kx}{y}$, $b = \dfrac{kz}{x}$, $c = \dfrac{ky}{z}$, $abc = k^3$. Тражена неједнакост се трансформише у

$$\frac{y}{kz+x} + \frac{x}{ky+z} + \frac{z}{kx+y} \geqslant \frac{3k}{k^3+1}. \tag{1}$$

Ако је $X = x+kz$, $Y = y+kx$, $Z = z+ky$, важи $x = X-kz = X-k(Z-ky) = X - kZ + k^2(Y-kx) = X - kZ + k^2Y - k^3x$, тј. $x = \dfrac{X - kZ + k^2Y}{k^3+1}$ и, аналогно, $y = \dfrac{Y - kX + k^2Z}{k^3+1}$ и $z = \dfrac{Z - kY + k^2X}{k^3+1}$, па се, кренувши од леве стране у (1), користећи $\dfrac{Z}{X}+\dfrac{Y}{Z}+\dfrac{X}{Y}\geqslant 3$, $\dfrac{Y}{X}+\dfrac{X}{Z}+\dfrac{Z}{Y}\geqslant 3$ и $k^2-2k+1\geqslant 0$ добија

$$\frac{Y-kX+k^2Z}{(k^3+1)X}+\frac{X-kZ+k^2Y}{(k^3+1)Z}+\frac{Z-kY+k^2X}{(k^3+1)Y}\geqslant$$

$$\frac{1}{k^3+1}\cdot\left[k^2\cdot\left(\frac{Z}{X}+\frac{Y}{Z}+\frac{X}{Y}\right)-3k+\left(\frac{Y}{X}+\frac{X}{Z}+\frac{Z}{Y}\right)\right]\geqslant$$

$$\frac{3}{k^3+1}\cdot(k^2-3k+1)\geqslant\frac{3k}{k^3+1}\,,$$

тј. (1). Једнакост важи ако и само ако је $a=b=c=1$.

Треће решење. Сређивањем се добија да је тражена неједнакост еквивалентна са

$$\left(\frac{1+abc}{a(1+b)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{b(1+c)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{c(1+a)}+1\right)\geqslant 6,\quad \text{тј. са}$$

$$\left(\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{1+b}\right)+\left(\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{c(1+a)}{1+c}\right)+\left(\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\right)\geqslant 6,$$

односно (другачијим груписањем чланова) са

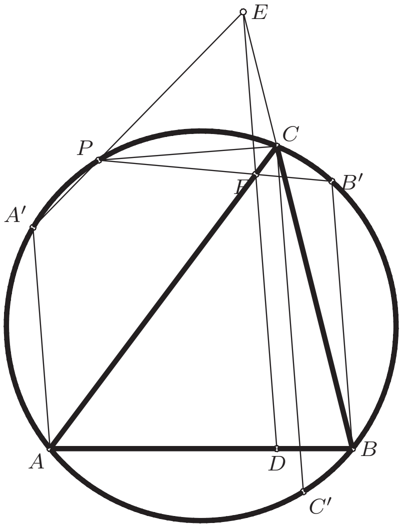
$$\left(\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\right)+\left(\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{b(1+c)}{1+b}\right)+\left(\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{c(1+a)}{1+c}\right)\geqslant 6,$$

која је директна последица неједнакости између аритметичке и геометријске средине (тј. $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ за $x>0$, при чему једнакост важи ако и само ако је $x=1$). Као и у претходна два решења, лако се добија да једнакост важи ако и само ако је $a=b=c=1$.

БМО '06.2

Нека права $A'E$ сече описану кружницу $\triangle ABC$ по други пут у тачки P. Тада је $\sphericalangle EPC=180^\circ-\sphericalangle A'PC=\sphericalangle A'AC=\sphericalangle EFC$, па је четвороугао $EPFC$ тетиван. Следи да је $\sphericalangle FPC=\sphericalangle FEC=\sphericalangle CBB'=\sphericalangle CPB'$, тј. тачка F припада правој $B'F$.

Аналогно је $P\in C'D$.



Слика 57.

Друго решење. Нека је дати троугао смештен у комплексну раван, тако да је кружница описана око датог троугла $\{z \mid |z| = 1\}$ и права m паралелна имагинарној оси (тачки A одговара комплексан број a и слично за друге тачке). Тада је $a \cdot \overline{a} = b \cdot \overline{b} = c \cdot \overline{c} = 1$, а d, e и f имају исти реални део (M), тј. важи $d + \overline{d} = e + \overline{e} = f + \overline{f} = 2M \quad (*)$.

Тачка E припада правој BC, па је број $\dfrac{e-c}{b-c}$, тј. $\dfrac{\overline{e}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}$, па следи $e + bc\overline{e} = b + c$, што са $(*)$ даје

$$e = \frac{2Mbc - b - c}{bc - 1} \qquad \text{и} \qquad \frac{b + c - 2M}{bc - 1} \qquad (**)$$

($bc - 1 = 0$ би значило да је $BC \parallel m$).

Тачкама A', B', C' одговарају бројеви $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$, редом. Ако тачка Z припада правој $A'E$ следи да је број $\dfrac{z - \frac{1}{a}}{z - e}$ реалан, тј. $\dfrac{z - \frac{1}{a}}{z - e} = \dfrac{\overline{z} - a}{\overline{z} - \overline{e}}$, одакле је, сређивањем и коришћењем $(**)$,

$$az(abc - a - b - c + 2M) + \overline{z}(2Mabc - ab - ac - bc + 1) =$$

$$2M + 2Ma^2bc - a^2b - a^2c - b - c.$$

Аналогно, тачка са праве $B'F$ задовољава

$$bz(abc - a - b - c + 2M) + \overline{z}(2Mabc - ab - ac - bc + 1) =$$

$$2M + 2Ma^2bc - b^2a - b^2c - a - c,$$

па одузимањем и скраћивањем са $a-b\neq 0$ следи

$$z(a-b)(abc-a-b-c+2M)=2Mabc(a-b)+ab(b-a)+c(b-a)(b+a)+(a-b),$$

$$z(abc-a-b-c+2M)=2Mabc-ab-c(b+a)+1,$$

$$\text{тј.}\qquad z=\frac{2Mabc-ab-ac-ac+1}{abc-a-b-c+2M}.$$

Аналогно се добија иста тачка и у пресеку $B'F$ и $C'D$ (последњи резултат показује да се тачка z представља изразом који је симетричан по a, b, c), односно следи тврђење задатка.

Напомена. Како је $|abc|=1$ и

$$2Mabc-ab-ac-ac+1=abc\overline{(abc-a-b-c+2M)},$$

следи да пресечна тачка задовољава $|z|=1$, што је било кључно да прво (елементарно) решење буде релативно једноставно.

БМО ’06.3

Производ наведена три цела броја је $mnp+3+\dfrac{3}{mnp}+\dfrac{1}{(mnp)^2}$, па, ако је $x=mnp$, следи да је број $k=x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ цео. Дакле, x је позитиван рационалан корен једначине $x^3-kx^2+3x+1=0$. Следи да је $x=1$, тј. $mnp=1$ и $m+\dfrac{1}{np}=m+\dfrac{m}{mnp}=2m$ је цео број (аналогно су цели и $2n$ и $2p$).

Нека је $m\geqslant n\geqslant p$. Тада је $p\leqslant 1$, па из горе утврђеног следи да је $p=1$ или $p=\dfrac{1}{2}$. У првом случају је $m=n=1$, а у другом $mn=2$, одакле ($mn=2$) следи да је $m=2$, $n=1$ или $m=4$, $n=\dfrac{1}{2}$.

Дакле, сва решења су $(1,1,1)$, $\left(2,1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(4,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ (и пермутације– укупно 10 решења).

БМО ’06.4

Ако $2\mid m$ и $a=2^k\cdot l$, $2\nmid l$, следи $a_{k+j}=l+jm$ за $j\geqslant 0$, па дати низ није периодичан.

Нека $2\nmid m$ и нека је $S=\{1,2,\ldots,m,m+1,m+3,\ldots,2m-2,2m\}$.

(a) Нека је $a\notin S$. У датом низу постоји најмањи члан (нека је то a_j). Тада је a_j непаран (иначе је $a_{j+1}=\dfrac{a_j}{2}<a_j$), па је $a_{j+2}=$

$\dfrac{a_j + m}{2} \geqslant a_j$, одакле је $a_j \leqslant m$. Сада индукцијом лако следи да је (за свако $i \geqslant j$) $a_i \leqslant 2m$ и да је $a_i \leqslant m$ ако је a_i непарно.

Дакле, у овом случају се после места j у датом низу не може више појавити a_0, па дати низ није периодичан.

(б) Нека је $a \in S$. Као и у (а), индукцијом следи да је (за свако $i \geqslant 0$) $a_i \leqslant 2m$ и да је $a_i \leqslant m$ ако је a_i непарно. Следи да је дати низ ограничен, па му се неки чланови понављају.

Нека је k најмањи број за који постоји $l > k$ тако да је $a_k = a_l$ (треба показати да је $k = 0$; одатле следи да је у овој ситуацији низ периодичан). Ако је $a_k \leqslant m$, из горњег разматрања следи да је $a_k = \dfrac{a_{k-1}}{2}$ и $a_l = \dfrac{a_{l-1}}{2}$, па је $a_{k-1} = a_{l-1}$. Аналогно, ако је $a_k > m$ следи $a_k = a_{k-1} + m$ и $a_l = a_{l-1} + m$, тј. $a_{k-1} = a_{l-1}$. Претходно је немогуће (због начина избора k), па мора бити $k = 0$.

Дакле, дати низ је периодичан ако и само ако је $2 \nmid m$ и $a \in S$.