ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Материјали за младе математичаре, св. 55

# ТАНГЕНТА 600

Збирка задатака објављених у рубрици

**Задаци из математике**

часописа **„Тангента“**

Б Е О Г Р А Д
2014

ТАНГЕНТА 600

Материјали за младе математичаре, свеска 55

Редактор: *проф. др Марија Станић*, ПМФ, Крагујевац

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Кнеза Михаила 35/IV
11000 Београд
Телефон: 011 30 36 818
Факс: 011 30 36 819
http://www.dms.rs/
E–mail: info@dms.rs

За издавача: *проф. др Александар Липковски*

Рецензент: *проф. др Зоран Каделбург*

Уредник: *проф. др Зоран Каделбург*

Слог: *проф. др Марија Станић*

Цртежи: *проф. др Марија Станић*

© Друштво математичара Србије, 2014.

ISBN 978-86-81453-98-8

Тираж: 500 примерака

Штампа: „Терција”, Бор

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51(076)

ТАНГЕНТА 600: збирка задатака објављених у рубрици Задаци из математике часописа "Тангента" / [уредник: Зоран Каделбург ; цртежи: Марија Станић]. - Београд : Друштво математичара Србије, 2014 (Бор : Терција). - 296 стр. : граф. прикази ; 25 cm. - (Материјали за младе математичаре / [Друштво математичара Србије] ; св. 55)

". . . садржи задатке који су се у рубрици Задаци из математике часописа ′Тангента′ појавили у бројевима од 41 до 72." – Предговор. - Тираж 500. - Стр. 5: Предговор / редактор [Марија Станић].

ISBN 978–86–81453–98–8

1. Каделбург, Зоран [уредник], 1950-
а) Математика - Задаци

COBISS.SR-ID 210901516

# САДРЖАЈ

# Предговор

Часопис **Тангента** је једини домаћи часопис намењен средњошколцима, који обрађује теме из математике и информатике. Друштво математичара Србије је 2006. године, објавило збирку задатака **Тангента 10**, која је садржала задатке који су се појавили у рубрици **Задаци из математике** чаосписа Тангента у току првих десет година излажења, односно закључно са 40. бројем часописа.

Ова збирка садржи задатке који су се у рубрици **Задаци из математике** чаосписа Тангента појавили у бројевима од 41 до 72. Задаци нису сортирани ни по тежини ни по областима, већ редослед задатака одговара редоследу појављивања у часопису. У овом периоду рубрику су уређивали др Слађана Димитријевић, Милош Ђорић, др Небојша Икодиновић и др Марија Станић. Велики допринос рубрици у часопису, а самим тим и овој збирци, дали су и бројне колеге математичари, али и поједини ученици који су слали предлоге занимљивих задатака. Наравно, сам часопис не би ни постојао да нема верних читалаца, који су небројено пута изненадили лепотом и елегантношћу својих решења, као и корисним сугестијама. Овом приликом се свима њима захваљујемо.

При уређивању ове збирке превасходна жеља нам је била да она допринесе бољој припреми ученика за домаћа и међународна такмичења. Као што је такмичарима познато, од школске 2005/2006. године на свим нивоима математичких такмичења се обавезно јавља одређен број задатака из часописа **Тангента**.

Размишљајући о математичким проблемима и њиховом решавању, веома је важно и за ученике и за њихове наставнике да схвате да иза коначних решења која се дају у књигама стоје гомиле одбаченог папира и многи неуспешни покушаји. Коначно решење често је клинички прецизно у поређењу са менталном конфузијом из које је проистекло. Зато је важно рвати се са проблемом самостално пре него се упознате са готовим решењем. Само на тај начин може се стећи представа о суштини проблема, развити извесна сопствена идеја решења и схватити у чему се крију тешкоће. Мало је користи од читања туђих решења ако претходно нисте уложили довољно напора да задатак решите самостално, чак и ако су ти напори били неуспешни. Из искуства које стичемо решавањем проблема рађа се разумевање мотивације у избору одређеног приступа, који води задовољавајућем решењу проблема.

Сви задаци у овој збирци су дати са решењима, али је избегавано сувишно детаљисање, како би се сваком читаоцу оставио простор да у извесној мери учествује у обликовању решења.

Београд,
октобар 2014.

Редактор

# Глава 1

# Задаци

1. Одредити све просте бројеве $n$ чији декадни запис има облик $n = \overline{10101\ldots01}$ (запис садржи $k$ јединица).

2. Одредити све парове природних бројева $x$ и $y$ за које је испуњено
$$x^2 = 4y + 3s(x, y),$$
где је $s(x, y)$ најмањи заједнички садржалац бројева $x$ и $y$.

3. Одредити све реалне бројеве $x$ који задовољавају једнакост
$$\{x\}^2\big(x + [x]\big)^2 + [x]^2\big(x + \{x\}\big)^2 = 4 + 2[x]^2\{x\}^2,$$
где је $[\,\cdot\,]$ функција цео део, а $\{\,\cdot\,\}$ функција разломљени део.

4. Имамо 300 јабука, при чему за сваке две важи да је једна највише 2 пута тежа од друге. Доказати да се јабуке могу распоредити у пакете од по две јабуке, тако да за свака два пакета важи да је један највише 1,5 пута тежи од другог.

5. Децимални запис $0, a_1a_2a_3\ldots$ формира се по следећем правилу: цифре $a_1$ и $a_2$ узимају се произвољно, а свака следећа цифра једнака је остатку који се добија при дељењу збира две претходне цифре са 10. Доказати да је добијени запис периодичан.

6. Дати су корени $x_0$ и $x_1$, $x_0$ и $x_2, \ldots, x_0$ и $x_n$, квадратних тринома $y = x^2 + a_1x + b_1$, $y = x^2 + a_2x + b_2, \ldots, y = x^2 + a_nx + b_n$, редом. Одредити корене квадратног тринома
$$y = x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\,x + \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

7. Одредити сва реална решења система једначина
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{2005} &= 2005,\\ x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2005}^4 &= x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2005}^3. \end{aligned}$$

**8.** За природан број $n$, означимо са $f(n)$ најмањи број $k$ такав да се $n$ може представити помоћу $k$ цифара 1, знаком операција $+, \cdot$ и заграда. На пример,

$$80 = (1+1+1+1+1) \cdot (1+1+1+1) \cdot (1+1+1+1)$$

и зато је $f(80) \leqslant 13$. Показати да за $n > 1$ важи

$$3 \log_3 n \leqslant f(n) \leqslant 5 \log_3 n.$$

**9.** Одредити углове $\alpha$ и $\beta$ правоуглог троугла ако је испуњена следећа једнакост

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{tg}^3 \beta = 70.$$

**10.** У троуглу $ABC$, $h_a$ и $h_b$ су висине из темена $A$ и $B$ редом, $l_c$ је симетрала $\sphericalangle ACB$, док су $O$, $I$ и $H$ редом центар описане кружнице, центар уписане кружнице и ортоцентар. Доказати да из једнакости

$$\frac{l_c}{h_a} + \frac{l_c}{h_b} = 2,$$

следи $OI = IH$.

**11.** За два различита троугла кажемо да су *пријатељски* ако имају две једнаке странице. Скуп пријатељских троуглова називамо *добрим* ако сви троуглови из тог скупа имају исти пар једнаких страница. Одредити минималну вредност за $N$, $N > 2$, за коју је сваки скуп од $N$ међусобно пријатељских троуглова добар скуп.

**12.** У координантној равни смештен је квадрат са теменима у целобројним тачкама (тачкама са целобројним координатама). Изометријском трансформацијом квадрат је пресликан у нови квадрат, тако да су му два темена поново пала у целобројне тачке. Доказати да су и друга два темена у целобројним тачкама.

**13.** Шест подударних кругова полупречника $r$ конструисано је око круга полупречника 1, тако да сваки споља додирује централни круг (полупречника 1) и два суседна круга (полупречника $r$). Око ових кругова конструисано је шест већих полупречника $R$ који споља додирују два круга полупречника $r$ и два круга полупречника $R$. Одредити полупречнике $r$ и $R$.

**14.** За праву кажемо да је висина $(2n+1)$-угла $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$ ако она пролази кроз једно његово теме и нормална је на супротну страницу (нпр. пролази кроз $A_1$ и нормална је на $A_{n+1}A_{n+2}$). Доказати да ако $2n$ висина $(2n+1)$-угла пролазе кроз једну тачку, онда и $(2n+1)$-ва висина пролази кроз ту тачку.

**15.** Над сваком страницом тетивног четвороугла $ABCD$ у спољашњости је конструисан правоугаоник са другом страницом чија је дужина једнака дужини наспрамне странице четвороугла $ABCD$. Доказати да су центри конструисаних правоугаоника темена новог правоугаоника.

**16.** Нека је $ABC$ правоугли троугао ($\sphericalangle C = 90^\circ$) и нека симетрале унутрашњих углова код темена $A$ и темена $B$ секу наспрамне катете у тачкама $M$ и $N$, респективно. Висина $CH$ троугла $ABC$ сече праве $AM$ и $BN$, редом у тачкама $P$ и $Q$. Доказати да је права која пролази кроз средишта дужи $QN$ и $PM$ паралелна хипотенузи.

**17.** Одредити скуп тачака $(x, y)$ координатне равни које задовољавају неједнакост

$$||x| + |y| - 2| \geqslant 1.$$

**18.** Одредити скуп свих тачака комплексне равни које задовољавају неједнакост

$$\left|\frac{1}{z} - i\right| \leqslant 1.$$

**19.** Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовољава једнакост

$$f(f(x)) = 2 - x$$

за сваки реалан број $x$. Доказати да се график функције $f$ пресликава у самог себе ротацијом око тачке $P(1, 1)$ за $90^\circ$.

**20.** а) Да ли је могуће разбити полуотворени интервал $[0, 1)$ на два дисјунктна скупа $A$ и $B$ и дефинисати непрекидну функцију $f$ тако да за свако $x \in A$, $f(x) \in B$ и за свако $x \in B$, $f(x) \in A$?

б) Да ли је исто могуће урадити са затвореним интервалом $[0, 1]$?

**21.** Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x - y &= 2005, \\ [x] + [y] &= 2007. \end{aligned}$$

**22.** Одредити две последње цифре броја $9^{9^9}$.

**23.** Нека су $m$ и $n$ различити 14-цифрени природни бројеви чији декадни записи садрже тачно по два пута сваку од цифара $1, 2, 3, 4, 5, 6$ и $7$. Да ли је могуће да број $\dfrac{m}{n}$ буде цео?

**24.** Нека су $a, b, c, d, e$ природни бројеви такви да је $a < b < c < d < e$. Доказати да је

$$\frac{1}{\mathrm{nzs}(a,b)} + \frac{1}{\mathrm{nzs}(b,c)} + \frac{1}{\mathrm{nzs}(c,d)} + \frac{1}{\mathrm{nzs}(d,e)} \leqslant \frac{15}{16}.$$

**25.** Решити једначину $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$ за $x, y \in \mathbb{Z}$.

**26.** Одредити све природне бројеве $n$ такве да једначина $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$ има позитивна целобројна решења.

**27.** Дато је $2n$ позитивних бројева $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n}$. Како их треба груписати у парове тако да:

(а) збир производа парова буде највећи;

(б) збир производа парова буде најмањи;

(в) производ збирова парова буде највећи;

(г) производ збирова парова буде најмањи?

**28.** Ако $a, b \in (0, 1)$, доказати да је

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geqslant 1.$$

**29.** Низ бројева $(a_n)$ задовољава $a_0 = 0, a_{n+1} \geqslant a_n + 1$. Доказати неједнакост

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

**30.** Одредити највећу дужину строго растућег геометријског низа природних бројева који се налази у интервалу $[100, 1000]$.

**31.** Одредити све полиноме $P$ најнижег могућег степена са следећим особинама:

(а) коефицијент уз највиши степен је 200;

(б) коефицијент уз најнижи степен је 2;

(в) сума свих коефицијената је 4;

(г) $P(-1) = 0$;

(д) $P(2) = 6$;

(ђ) $P(3) = 8$.

**32.** Кроз тачку $A$ која лежи унутар датог угла конструисати праву која од њега одсеца троугао најмање могуће површине.

**33.** Израчунати површину осмоугла уписаног у круг, чије су четири узастопне странице дужине 2, а преостале четири (такође узастопне) дужине 3.

**34.** Унутар круга полупречника 1 налази се 212 тачака. Доказати да постоји бар 2006 парова ових тачака које су на раздаљини не већој од 1.

**35.** Дијагонала $AC$ сече дијагоналу $BD$ конвексног четвороугла $ABCD$ у њеном средишту $S$. У троуглове $ABS$, $BCS$, $CDS$, $DAS$ уписане су редом кружнице са полупречницима $r_1, r_2, r_3, r_4$. Доказати да је

$$|r_1 - r_2 + r_3 - r_4| \leqslant \frac{1}{10}|AB - BC + CD - DA|.$$

**36.** У једнакокраком троуглу $ABC$ угао при врху (код темена $C$) је $40°$. Доказати да је $a^3 + b^3\sqrt{3} = 3ab^2$, где је $a$ дужина основице, а $b$ дужина крака тог троугла.

**37.** У троуглу $ABC$ означимо са $\alpha, \beta, \gamma$ углове наспрам страница $a, b, c$, респективно, са $s$ полуобим, а са $r$ и $R$ полупречнике уписаног и описаног круга. Доказати неједнакост

$$\sqrt{a}\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{b}\cos\frac{\beta}{2} + \sqrt{c}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \sqrt{3s\Big(1+\frac{r}{R}\Big)}.$$

**38.** Нека су $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$ сфере јединичног полупречника, такве да свака додирује тачно две друге сфере споља. Нека је $P$ тачка ван ових сфера и нека су $C_1, C_2, \ldots, C_n$ тачке додира датих сфера. Дужину тангенте из $P$ до сфере $\mathcal{S}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ означимо са $t_i$. Доказати да производ $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n$ није већи од производа $PC_1 \cdot PC_2 \cdot \ldots \cdot PC_n$.

**39.** Функција $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ испуњава услове:

а) $f(n+1) > f(n)$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$;

б) $f(n + f(m)) = f(n) + m + 1$ за све $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Одредити све могуће вредности за $f(2005)$.

**40.** Постоји ли функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која није константна, а испуњава услов

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f(x) - f(y))^2 \leqslant |x-y|^3\,?$$

**41.** Нека су $a, b, c, d$ позитивни реални бројеви. Доказати да је немогуће да важе све три неједнакости:

$$a + b < c + d, \quad (a+b)(c+d) < ab + cd, \quad (a+b)cd < (c+d)ab.$$

**42.** О бројевима $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ знамо да је $a_0 = a_n = 0$ и да је за свако $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ испуњено $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} > 0$. Доказати да ниједан од тих бројева није позитиван.

**43.** Елементи скупа $M$ су 20 различитих реалних бројева. Ако за свака два броја $a \in M$ и $b \in M, a < b$, постоји број $x \in M$ такав да важи $a < -x < b$, колико позитивних бројева може бити у скупу $M$?

**44.** За реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ који су већи или једнаки од $-1$, важи

$${x_1}^3 + {x_2}^3 + \cdots + {x_n}^3 = 0.$$

Доказати неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{n}{3}.$$

Да ли може важити једнакост?

**45.** Нека су $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ произвољни међусобно различити природни бројеви мањи од 1000 такви да је најмањи заједнички садржалац свака два од тих бројева већи од 1000. Доказати да је

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

**46.** Одредити све позитивне реалне бројеве $x$ који задовољавају једнакост

$$x+\left[\frac{x}{6}\right]=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{2x}{3}\right].$$

**47.** Ако су $a,b,c$ цели бројеви такви да је $a+b+c=0$, доказати да је $2a^4+2b^4+2c^4$ потпун квадрат.

**48.** Решити једначину $(x^2-4ab)(x-a+b)^2+(a-b)^2x^2=0$, где су $a$ и $b$ реални параметри.

**49.** Дата је фамилија парабола $y=mx^2+(m+2)x+3, m\neq 0, m\in\mathbb{R}$. Описати скуп свих тачака које не припадају графицима парабола дате фамилије.

**50.** Израчунати $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}+\sqrt{x^2+3x+5}+3x\right)$.

**51.** Имамо неколико лопти у боји (најмање три различите боје) и најмање три кутије. Лопте су распоређене по кутијама тако да ниједна кутија није празна и сваке три лопте различитих боја нису у три различите кутије. Доказати да постоји кутија таква да су лопте из свих осталих кутија исте боје.

**52.** У кругу полупречника 12,5 cm налази се 2006 тачака. Доказати да се међу њима налазе бар 4 тачке које одређују четвороугао површине мање од 1.

**53.** За тачку $P$ са целобројним координатама у правоуглом Декартовом координатном систему у равни кажемо да је *видљива* из тачке $A$ са целобројним координатама ако не постоји тачка са целобројним координатама на дужи $AP$ (сем тачака $A$ и $P$). Описати скуп свих тачака са целобројним координатама видљивих из координатног почетка.

**54.** Ако су $p$ и $q$ узајамно прости природни бројеви, доказати да је тада

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

**55.** Нека је $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\{-1,1\}$ $(n\in\mathbb{N})$. Доказати да је

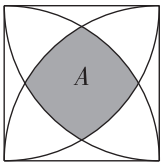
$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ$$
$$=a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+\cdots+a_n\sqrt{2}}}}.$$

**56.** Дат је оштроугли троугао $ABC$. Одредити све тачке $D$ у његовој унутрашњости за које је испуњено

$$DA\cdot DB\cdot AB+DA\cdot DC\cdot AC+DB\cdot DC\cdot BC=AB\cdot AC\cdot BC.$$

**57.** На симетрали $\sphericalangle BAC$ троугла $ABC$ уочене су таче $B_1$ и $C_1$ такве да је $BB_1\perp AB$, $CC_1\perp AC$. Нека је $M$ средиште дужи $B_1C_1$. Доказати да је $MB=MC$.

**58.** Ако је дужина странице квадрата 1 израчунати површину осенчене фигуре $A$ на слици 1.1.




Слика 1.1.

**59.** Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказати да су равни $A_1BC_1$ и $ACD_1$ нормалне на дијагоналу $B_1D$ и да деле ту дијагоналу на три једнака дела.

**60.** На колико најмање тетраедара може да се исече коцка?

**61.** Дат је бесконачан низ цифара декадног система $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ $(c_1 \neq 0)$, различитих од 9. Доказати да у низу $c_1, \overline{c_1c_2}, \overline{c_1c_2c_3}, \overline{c_1c_2c_3c_4}, \ldots$ има бесконачно много сложених бројева.

**62.** Доказати да за све реалне бројеве $x, y$ важи:

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

**63.** Нека је $y = x^2 - 11x + 46$ и $z = x^2 - 11x + 30$. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\left[\sqrt{\sqrt{y} - \sqrt{z}}\right]^x + \left[\sqrt{\sqrt{y} + \sqrt{z}}\right]^x = 2^{x+1}.$$

**64.** Нека је $n$ природан број $a, b, c, a_1, a_2, \ldots, a_n$ дати реални бројеви, при чему је $b^2 > ac$ и $a > n$. Доказати неједнакост:

$$(b + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \geqslant (a-n)(c - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2).$$

**65.** Над квадратним триномом $ax^2 + bx + c$ дозвољено је вршити следеће операције:
а) заменити $a$ са $c$,
б) заменити $x$ са $x + t$ где је $t$ неки реалан број.

Може ли се применом ових операција полином $x^2 - x - 2$ трансформисати у $x^2 - x - 1$?

**66.** Доказати да за сваки природан број $n$ постоји природан број $m$ такав да је испуњена једнакост

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}.$$

**67.** Коефицијенти $a, b, c, d$ полинома $ax^3 + bx^2 + cx + d$ су природни бројеви такви да је $ad$ непарно, а $bc$ парно. Доказати да је бар једна нула полинома ирационална.

**68.** Из скупа $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2006\}$ издвојени су и сабрани сви бројеви чији је збир цифара паран, а затим су из датог скупа сабрани сви бројеви чији је збир цифара непаран. Који је збир већи, и за колико?

**69.** Бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ припадају скупу $\{-1, 1\}$ и важи

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Доказати да $4 \mid n$.

**70.** На табли је написано неколико слова $e$, $a$ и $b$. Марко је по два од тих слова брисао и замењивао их једним словом, поштујући при томе следећа правила:

1) два слова $e$ замењује једно слово $e$;
2) два слова $a$ замењује једно $b$;
3) два слова $b$ замењује једно $a$;
4) слова $a$ и $b$ замењују се једним $e$;
5) слова $a$ и $e$ замењују се једним $a$;
6) слова $b$ и $e$ замењују се једним $b$.

Марко је са брисањем престао када је на табли остало само једно слово. Да ли он редоследом брисања може да утиче на то које ће слово остати на табли?

**71.** Нека је дата функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ са особинама:

1) $f(1) = 0$,
2) $f(p) = 1$, за сваки прост број $p$ и
3) $f(ab) = af(b) + bf(a)$, за све природне бројеве $a$ и $b$.

Одредити бројеве $n$ за које је $f(n) = n$.

**72.** Дато је $n$ тачака у равни. Сваке три од њих образују троугао површине мање или једнаке 1. Доказати да се свих $n$ тачака налази у троуглу површине мање или једнаке 4.

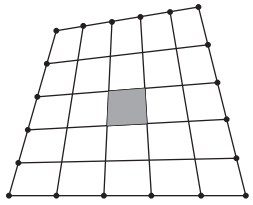
**73.** Да ли је могуће 1600 тачака сместити у унутрашњост квадрата странице 1, тако да сваки правоугаоник, површине 0,005, који лежи у унутрашњости квадрата и чије су странице паралелне страницама квадрата, садржи бар једну од датих тачака?

НАПОМЕНА. Тачке на страницама квадрата нису његове унутрашње тачке.

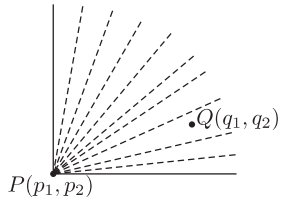
**74.** Коначан скуп тачака у равни $S$ има особину да права која пролази кроз две тачке тог скупа пролази и кроз трећу. Доказати да се све тачке скупа $S$ налазе на једној правој.

**75.** У сваком конвексном петоуглу постоје три дијагонале од којих се може конструисати троугао. Доказати.

**76.** Свака страница конвексног четвороугла површине 1 подељена је на пет једнаких делова и одговарајуће тачке на наспрамним страницама су спојене као на слици 2.85. Израчунати површину осенченог четвороугла.



Слика 1.2.




Слика 1.3.

**77.** Кажемо да рефлектор из тачке $P(p_1, p_2)$ осветљава тачку $Q(q_1, q_2)$ ако и само ако важе неједнакости $p_1 \leqslant q_1$ и $p_2 \leqslant q_2$ (слика 1.3). Доказати да није могуће наћи тачке $X, Y, Z$ и $A, B, C$ такве да рефлектор из $A$ осветљава тачке $Y$ и $Z$ али не и тачку $X$, рефлектор из $B$ осветљава тачке $X$ и $Z$ али не и тачку $Y$, а рефлектор из $C$ осветљава тачке $X$ и $Y$ али не и тачку $Z$.

**78.** Сваки конвексан многоугао површине 1 садржан је у правоугаонику површине 2. Доказати.

**79.** У квадрат $ABCD$ уписана је кружница $k$. За тачку $T$ кружнице $k$ нека су $\alpha_T$ и $\beta_T$ углови под којима се виде дијагонале $AC$ и $BD$. Доказати да је за свако $T \in k$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_T + \operatorname{tg}^2 \beta_T = 8.$$

**80.** Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чије су ивице дужине $a$. Нека је $\alpha$ раван која садржи средиште $O$ дијагонале $B_1D$ и нормална је на ту дијагоналу. Одредити површину пресека равни $\alpha$ и коцке.

**81.** Дата је гомила са $n$ каменчића. Гомила се дели на друге две од по $k$ и $n-k$ каменчића, и производ бројева $k$ и $n-k$ се пише на табли. Дељење и записивање производа се наставља све док постоје *нетривијалне* гомиле (гомиле са више од једног каменчића). Доказати да је збир свих бројева на табли једнак $n(n-1)/2$, без обзира на начин дељења.

**82.** Нека је $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ фамилија подскупова скупа $S$, где је $|S| = n$, таква да за свако $i$ и $j$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$ важи $|A_i \cap A_j| \neq 1$. Доказати да се елементи скупа $S$ могу обојити са две боје, тако да ниједан скуп из $\mathcal{F}$ није једнобојан.

**83.** На такмичењу је учествовало 100 ученика, који су решавали по пет задатака. Познато је да је сваки задатак решило бар 60 ученика. Доказати да постоје два ученика који су заједно решили све задатке.

**84.** Нека су прва четири члана низа бројеви $1, 9, 9, 3$, док се сваки следећи члан добија као остатак при дељењу са 10 збира претходна четири члана $(1, 9, 9, 3, 2, 3, 7, \ldots)$. Да ли ће се у том низу појавити четворка $7, 3, 6, 7$?

**85.** Каменчићи су распоређени на шаховској табли димензија $n \times n$ тако да ако је квадрат $(i, j)$ празан (ако на њему нема каменчића), тада се најмање $n$ каменчића налази у $i$-тој врсти и $j$-тој колони. Показати да је на табли најмање $\dfrac{n^2}{2}$ каменчића.

**86.** Може ли се полином $h(x) = x$ добити од полинома $f(x)$ и $g(x)$ помоћу операција сабирања, одузимања и множења ако је:

(а) $f(x) = x^2 + x, \;\; g(x) = x^2 + 2$;

(б) $f(x) = 2x^2 + x, \;\; g(x) = 2x$;

(в) $f(x) = x^2 + x, \;\; g(x) = x^2 - 2$?

**87.** Одредити све природне бројеве $n$ за које је $5^n + 12^n$ потпун квадрат.

**88.** Ако су $x_1, x_2, \ldots, x_n$, различити природни бројеви, где је $n > 1$, доказати да је:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} \neq 1.$$

**89.** Нека су $a, b, c$ позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да тада важи

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geqslant \frac{6}{ab+bc+ac}.$$

**90.** Доказати неједнакост: $(a^3 - a + 2)^2 > 4a^2(a^2+1)(a-2)$.

**91.** Одредити реалне бројеве $a, b, c$ за које је

$$|f(x)| = |ax^2 + bx + c| \leqslant 1 \quad \text{за} \quad |x| \leqslant 1,$$

а $\dfrac{8}{3}a^2 + 2b^2$ је максимално.

**92.** Одредити решења система

$$\ln \frac{1+x}{1+y} = \frac{4(x-y)}{(x+2)(y+2)}, \quad \sin x + \cos 2y > 1,$$

уз услов да $x, y \in (0, 2\pi)$.

**93.** Нека је $z = \cos \dfrac{2\pi}{n} + i \sin \dfrac{2\pi}{n}$, где је $n$ непаран природан број. Израчунати суму $S$,

$$S = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+z^3} + \cdots + \frac{1}{1+z^n},$$

у функцији од $n$.

**94.** Доказати да постоји јединствена функција $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, таква да за свако $x \in \mathbb{R}^+$ важи:

$$f(f(x)) = 6x - f(x). \tag{1.1}$$

**95.** Нека је $f(x) = a\cos x + b\cos 3x$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ако је познато да неједначина $f(x) > 1$ нема решења, доказати да је $|b| \leqslant 1$.

**96.** За углове $\triangle ABC$ важи $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 1 : 2 : 3$. Израчунати обим овог троугла, ако је страница наспрам угла $\gamma$ једнака $AB = 3$.

**97.** Нека је $O$ пресек дијагонала конвексног четвороугла. Ако су површине троуглова $ABO$, $BCO$, $CDO$ и $DAO$ једнаке, тада је четвороугао $ABCD$ паралелограм. Доказати.

**98.** Нека је $O$ пресек дијагонала конвексног четвороугла. Ако су обими троуглова $ABO$, $BCO$, $CDO$ и $DAO$ једнаки, тада је четвороугао $ABCD$ ромб. Доказати.

**99.** У троугао $ABC$ са страницама $a, b, c$ уписани су квадрати страница $x, y, z$, тако да се по два темена тих квадрата налазе на страницама $BC$, $CA$, $AB$, респективно. Тада $x = y = z$ имплицира $a = b = c$. Доказати.

**100.** Произвољна тачка $M$ је одабрана на дужи $AB$. Конструисани су квадрати $AMCD$ и $MBEF$ са исте стране дужи $AB$. Кругови описани око квадрата са центрима у $P$ и $Q$, респективно, секу се у тачкама $M$ и $N$. Означимо пресек правих $AF$ и $BC$ са $N'$.

а) Доказати да се тачке $N$ и $N'$ поклапају.

б) Доказати да права $MN$ пролази кроз фиксну тачку независну од избора $M$.

в) Одредити геометријско место средишта дужи $PQ$, када $M$ пролази између $A$ и $B$.

**101.** Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Над страницом $BC$ као пречником је конструисан круг $\mathcal{K}$. Тангенте из $A$ на овај круг додирују га у тачкама $P$ и $Q$. Доказати да ортоцентар $\triangle ABC$ лежи на дужи $PQ$.

**102.** Нека је $n > 1$ и $P_n$ број непразних подскупова $S$ од $\{1, 2, \ldots, n\}$, са особином да је аритметичка средина свих елемената из $S$ цео број. Доказати да су бројеви $P_n$ и $n$ исте парности.

**103.** Ако бројеви $n$ и $2006n$ имају исту суму цифара, доказати да је тада $n$ дељиво са $9$. Да ли исто тврђење важи и за бројеве $n$ и $2008n$?

**104.** Посматрајмо функције $f(x) = x^2 + 2bx + 1$ и $g(x) = 2a(x + b)$, где су $a$ и $b$ реални бројеви и дефинишимо скуп уређених парова бројева на следећи начин:

$S = \{(a, b) \mid$ графици функција $y = f(x)$ и $y = g(x)$ се не секу у координатној равни$\}$.

Описати скуп $S$ и одредити његову површину.

**105.** Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ и на страници $CD$ тачка $M$, тако да троугао $ADM$ и четвороугао $ABCM$ имају једнаке површине и обиме. Да ли четвороугао $ABCD$ има две једнаке странице?

**106.** Над дужи $BC$ конструисани су правоугли троуглови $BUC$ и $BVC$ с правим угловима редом код темена $U$ и $V$. Ако је $A$ било која тачка праве $BC$, доказати да је производ $\operatorname{tg} \sphericalangle BUC \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle CVA$ константан.

**107.** Нека је $H$ ортоцентар оштроуглог троугла $ABC$. Доказати неједнакост

$$\frac{AH}{a} \cdot \frac{BH}{b} \cdot \frac{CH}{c} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

**108.** Решити једначину $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arctg} x^3 = 0$.

**109.** Доказати да једначина

$$2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{x^2} + x^2$$

нема решења.

**110.** У јединичном квадрату дато је 2006 тачака, од којих је једна центар квадрата. За сваку тачку је узето растојање до најближе од осталих тачака. Доказати да је сума квадрата оваквих растојања мања од 3,6.

**111.** Дат је оштроугли $\triangle ABC$, са ортоцентром $H$ и центром описане кружнице $O$. Нормална пројекција темена $A$ на праву $BC$ лежи на симетрали странице $AC$. Одредити однос $\dfrac{|CH|}{|BO|}$.

**112.** Посматрајмо Фибоначијев низ дат са

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \geqslant 2.$$

Доказати да постоји Фибоначијев број који се завршава са 2006 деветки.

**113.** Дат је оштроугли $\triangle ABC$ и произвољна тачка $N$ на страници $AC$. На полуправој $CA$ одредимо тачку $M$, тако да је $NM = CA$. Подножје нормале из $M$ на страницу $BC$ је тачка $D$, а подножје нормале из $N$ на $AB$ је $E$. Доказати да описани круг око $\triangle BED$ садржи ортоцентар троугла $ABC$.

**114.** Одредити све природне бројеве $n$, такве да $n$ дели $5^n - 4^n$.

**115.** Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви, чија је сума 1. Доказати неједнакост

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(1 + \frac{1}{x_i}\Big) \geqslant \prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{n - x_i}{1 - x_i}\Big).$$

**116.** Одредити све $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ и цифре $a_1, a_2, \ldots, a_n$, тако да је

$$\sqrt{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}} - \sqrt{\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}} = a_n.$$

**117.** Нека су $\alpha \neq \beta$ корени једначине $x^2 + px + q = 0$. За сваки природан број $n$ означимо

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\,.$$

(а) Одредитии све $p, q \in \mathbb{Z}$ такве да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} = (-1)^n$.

(б) Доказати да за такве $p$ и $q$ за све $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$, и ако $3 \mid n$, да је тада $a_n$ паран број.

**118.** Доказати да низ $a_n = \left[n\sqrt{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, садржи бесконачно много потпуних квадрата.

**119.** Одредити центар дате кружнице користећи једино шестар са променљивим распоном.

**120.** **(Наполеонов задатак[1])** Дату кружницу, чији је центар познат, поделити на четири једнака дела користећи само шестар.

**121.** У десет кутија налази се по десет новчића. Утврђено је да се у једној кутији, али се не зна у којој, налазе неисправни новчићи, који су један грам лакши од исправних. Новчиће можемо мерити помоћу прецизне ваге са скалом. Колико мерења је потребно извршити да бисмо утврдили која кутија садржи неисправне новчиће? Тежина исправног новчића је позната.

**122.** Млади математичар се налази у центру круга, док се на ободу налази тигар који може да се креће само по кружници. Максимална брзина тигра је четири пута већа од максималне брзине човека. Да ли човек може да побегне из затвореног круга, а да га тигар при томе не поједе?

**123.** Дато је $2n$ карата, обележених бројевима од 1 до $2n$. Играчи $A$ и $B$ играју следећу игру. Карте се промешају и свако добије по $n$ карата. Наизменично избацују по једну карту на сто. Игра се завршава ако је сума бројева на избаченим картама дељива са $2n + 1$. Последња особа која је избацила карту је победник. Ако $A$ и $B$ играју оптималном стратегијом, који играч побеђује?

**124.** Да ли постоји реалан број $a$ за који једначина $x^2 - |x| + a = 0$ има јединствено решење?

**125.** Одредити услове које треба да задовољавају параметри $a_1, a_2, a_3, a_4$ да би систем једначина

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a_1a_2, \qquad & x_1 + x_3 &= a_1a_3, \qquad & x_1 + x_4 &= a_1a_4, \\ x_2 + x_3 &= a_2a_3, \qquad & x_2 + x_4 &= a_2a_4, \qquad & x_3 + x_4 &= a_3a_4, \end{aligned}$$

имао решење.

**126.** Доказати да се прости бројеви облика $p = 2^{2^n} + 1$ не могу представити као разлика петих степена два природна броја.

[1] Наполеон је био велики љубитељ геометрије. Овај задатак је, наводно, Наполеон поставио италијанском геометру Маскеронију.

**127.** За природне бројеве $a, b, c, d$ важи једнакост $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4abcd$. Доказати да производ $abcd$ није дељив са 5.

**128.** Нека је $n \geqslant 2$ природан број и скуп $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. За сваки број $1 \leqslant k \leqslant n-1$ нека је

$$x_k = \frac{1}{n+1} \sum_{|B|=k, B \subset A} (\min B + \max B).$$

Доказати да су $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ природни бројеви, и да нису сви бројеви дељиви са 4.

**129.** Доказати да је тачно један од природних бројева $a$, $b$ и $c$ већи од 1, ако за њих важи $abc = 1$ и $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

**130.** Доказати да за $a, b, c \in [0, 1]$ важи

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

**131.** Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми са рационалним коефицијентима, иредуцибилни над скупом $\mathbb{Q}$. Ако су реални бројеви $\alpha$ и $\beta$ такви да је $\alpha + \beta = 1$ и $P(\alpha) = Q(\beta) = 0$, доказати да су полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ истог степена.

**132.** Које су могуће вредности израза $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ када $x$ припада скупу реалних бројева?

**133.** Доказати да је производ решења једначине

$$x^{\log_{2007} x} \sqrt{2007} = x^{2007}$$

природан број и одредити му последње две цифре.

**134.** Решити једначину $\log_{\frac{1}{3}} \left(4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x}\right) = \operatorname{sgn}\left(\log_x 5^{\sqrt{1-x}}\right)$.

**135.** Одредити све целе бројеве $n$ за које једначина

$$x^3 - nx^2 + nx - (n^2 + 1) = 0.$$

има целобројно решење.

**136.** На јединичној кружници је дато $n$ тачака. Нека је $N$ број тетива са крајевима у датим тачкама, чија је дужина већа од $\sqrt{3}$. Доказати да је $4N \leqslant n^2$.

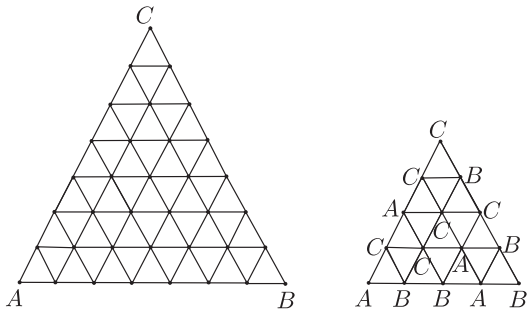
**137.** У стаклену посуду која има облик коцке треба сипати воду тако да она заузима $\frac{1}{3}$ запремине тог суда. Како се то може урадити без средстава за мерење?

**138.** Дат је троугао $ABC$, тако да је $AC > AB$. Тачка $X$ се налази на полуправој $AB$ иза тачке $A$, тако да је $BX = AC$, док се тачка $Y$ налази на дужи $AC$, тако да је $CY = AB$. Права $XY$ сече симетралу странице $BC$ у тачки $P$. Доказати да је $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BPC = 180°$.

**139.** Нека је $I$ центар уписаног круга у троугао $ABC$. На дужима $IA$, $IB$ и $IC$ су одабране тачке $P, Q$ и $R$ редом, тако да је $IP \cdot IA = IQ \cdot IB = IR \cdot IC$. Доказати да Ојлерова права за троугао $PQR$ садржи тачке $I$ и $O$, где је $O$ центар описаног круга троугла $ABC$.

**140.** У једнакокраком троуглу $ABC$, важи $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 80°$. На страници $AB$ дата је тачка $D$, тако да је $AD = BC$. Одредити $\sphericalangle BDC$.

**141.** Једнакостранични троугао $ABC$ подељен је на мале једнакостраничне троуглове тако што му је свака страна подељена на $n$ једнаких дужи које су онда повезане дужима паралелним страницама троугла (случај $n = 7$ је приказан на слици 1.4 лево). Свако од новонасталих темена је означено једним од слова $A$, $B$ или $C$ (једно такво означавање је за случај $n = 4$ приказано на слици 1.4 десно).




Слика 1.4.

Доказати да важи бар једно од следећих тврђења.

(а) Постоји мали троугао коме су темена означена словима $A, B, C$.

(б) Постоје три колинеарне тачке које су означене различитим словима.

**142.** Сто мрава је стављено на штап дужине 2 метра. Сваки мрав почне да се креће константном брзином од једног метра у минути на лево или на десно. Када се два мрава сусретну они се сударе, одбију један од другог и наставе кретање истим брзинама, али у супротним смеровима. Када мрав дође до краја штапа падне на земљу. Доказати да ће се после 2 минута и 10 секунди сви мрави наћи на земљи. Који је, при томе, највећи могући број мрављих судара?

**143.** Одредити број свих начина на које се могу распоредити 4 куглице у 7 кутија ако се:

(а) и куглице и кутије разликују;

(б) куглице се не разликују, а кутије се разликују;

(в) куглице се разликују, а кутије не разликују;

(г) не разликују се ни куглице, ни кутије.

**144.** Доказати да у правоуглом троуглу важи неједнакост

$$\frac{c+h}{a+b} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

где су $a$ и $b$ катете, $c$ хипотенуза, а $h$ хипотенузина висина.

**145.** Странице троугла $ABC$ имају дужине $AB = 48\,\mathrm{cm}$, $AC = 55\,\mathrm{cm}$ и $BC = 73\,\mathrm{cm}$. На страници $BC$ одабране су тачке $D$ и $E$ тако да је $BD = 18\,\mathrm{cm}$ и $CE = 25\,\mathrm{cm}$. Израчунај $\sphericalangle DAE$.

**146.** Доказати да су праве које садрже висине троугла уједно бисектрисе углова троугла чија су темена подножја тих висина.

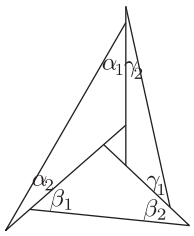
**147.** Нека је $M$ произвољна тачка странице $BC$ квадрата $ABCD$. Ако је $N$ тачка пресека странице $AB$ и симетрале $\sphericalangle ADM$ доказати да је $AN + MC = DM$.

**148.** Доказати да за странице произвољног троугла $a, b, c$ и углове $\alpha, \beta, \gamma$ важи неједнакост

$$\frac{\cos^3\alpha}{a} + \frac{\cos^3\beta}{b} + \frac{\cos^3\gamma}{c} < \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}. \tag{1.2}$$

**149.** Доказати да за углове троуглова на слици 1.5 важи неједнакост

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 \geqslant \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2.$$




Слика 1.5.

**150.** Нека је $M$ произвољна тачка странице $BC$ квадрата $ABCD$. Ако је $N$ тачка странице $AB$ таква да је $\sphericalangle DMN = \sphericalangle CMD$, доказати да је $\sphericalangle MDN = 45^\circ$.

**151.** Нека је $ABCA_1B_1C_1$ правилна тространа призма. Конструисана је раван $A_1BC$ и у део призме изнад те равни уписана је сфера полупречника $r$ (сфера додирује равни $B_1BCC_1$, $A_1BC$, $A_1B_1C_1$, $A_1B_1B$, $A_1C_1C$). Одредити запремину призме $ABCA_1B_1C_1$.

**152.** У зависности од природног броја $n$ одредити највећи заједнички делилац бројева $n^2+1$ и $(n+1)^2+1$.

**153.** Нека је $P(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Одредити остатак при дељењу полинома $P(x^7)$ полиномом $P(x)$.

**154.** Одредити природне бројеве $a$ и $b$ тако да за $x, y \in [a, b]$ добијамо $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \in [a, b]$.

**155.** За $x, y, z \in \mathbb{R}$ одредити највећу вредност израза $\dfrac{x^3y^2z}{x^6 + y^6 + z^6}$.

**156.** За ненегативне бројеве $a$, $b$, $x$, $y$ важи $a^5 + b^5 \leqslant 1$ и $x^5 + y^5 \leqslant 1$. Доказати да је $a^2x^3 + b^2y^3 \leqslant 1$.

**157.** Решити неједначину $\sqrt{4x - x^2 - 3} \geqslant \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

**158.** За које $a \in \mathbb{R}$ сва решења једначине $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$ задовољавају услов $|x| < 1$?

**159.** Одредити све парове реалних бројева $p$ и $q$ за које неједначина $|x^2 + px + q| > 2$ нема решења у интервалу $[1, 5]$.

**160.** Одредити све вредности реалног параметра $b$, за које систем

$$\begin{aligned} bx^2 + 2bx + y + 3b - 3 &= 0, \\ by^2 + x - 6by + 11b + 1 &= 0 \end{aligned}$$

има јединствено решење.

**161.** Да ли је број $10^{5^{10^{5^{10}}}} + 5^{10^{5^{10^5}}}$ дељив са 11? Зашто?

**162.** Одредити шест последњих цифара броја $57^{2008}$.

**163.** Број $2^{29}$ је деветоцифрен и зна се да се у његовом декадном запису користе све цифре осим једне. Која је то цифра?

**164.** Одредити коефицијент уз $x^2$ у развоју

$$\underbrace{((\cdots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\cdots-2)^2-2)^2}_{2007}.$$

**165.** Нека су $a, b, c$ и $d$ позитивни реални бројеви такви да је

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} = 3.$$

Доказати да је тада

$$\frac{1}{9a+1} + \frac{1}{9b+1} + \frac{1}{9c+1} + \frac{1}{9d+1} \geqslant 1.$$

**166.** Да ли међу природним бројевима мањим од $10^9$ има више оних који садрже цифру $0$ или оних у којима се могу наћи две једнаке суседне цифре?

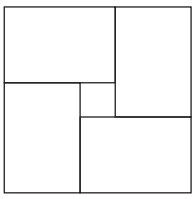
**167.** На колико начина се природан број $n$ може представити као збир једног или више природних бројева? Два представљања са истим сабирцима су различита ако редослед сабирака није исти, на пример, број $3$ може се представити на $4$ начина: $3, 2+1, 1+2, 1+1+1$.

**168.** На кошаркашком турниру учествовало је $8$ екипа и свака је са сваком одиграла по једну утакмицу. Екипе су сакупиле редом $14, 12, 8, 8, 6, 4, 2, 2$ поена. Колико утакмица су последње четири екипе са табеле изгубиле од прве четири? За победу се добијају $2$ поена.

**169.** Све чворове квадратне мреже $m \times n$ повезати најкраћом затвореном линијом. Колика је њена дужина?

**170.** Ако је у равни дато $3000$ неколинеарних тачака (сваке три од њих не припадају истој правој), да ли постоји $1000$ дисјунктних троуглова чија су темена ове тачке?

**171.** Велики квадрат са слике 1.6 састављен је од четири подударна правоугаоника и једног малог квадрата. Ако је размера површина већег према мањем квадрату једнака $9+5\sqrt{5}$, одреди размеру страница правоугаоника.



Слика 1.6.

**172.** Дат је троугао $ABC$ и нека је $M$ средиште странице $BC$. Симетрала спољашњег угла код темена $A$ сече праву $BC$ у тачки $D$. Описани круг $\omega$ око $\triangle AMD$ сече праве $AB$ и $AC$ у тачкама $E$ и $F$, респективно. Ако је тачка $N$ средиште дужи $EF$, доказати да је $MN \parallel AD$.

**173.** Дата је тачка $D$ на страници $BC$ троугла $ABC$. Нека су $K_1$ и $K_2$ уписани кругови у троуглове $ABD$ и $ACD$. Заједничка тангента ових кругова, различита од $BC$, сече $AD$ у тачки $K$. Доказати да дужина дужи $AK$ не зависи од положаја тачке $D$.

**174.** На папиру је нацртано срце (затворена непрекидна крива без самопресецања). Доказати да за сваку унутрашњу тачку срца $P$, постоје две тачке $A$ и $B$ са руба криве, тако да је $P$ средиште дужи $AB$.

**175.** За тачку $X$ неког скупа тачака у равни кажемо да је *издвојена* ако постоји права $p$, таква да $X \in p$, а све остале тачке тог скупа су са исте стране те праве. Нека су

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \quad \text{и} \quad \mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}, \quad m, n \geqslant 3,$$

два скупа тачака у равни таква да ни једна права не садржи више од две тачке из скупа $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Нека је $\mathcal{C}$ скуп свих тачака $X$ таквих да је $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OB_j}$ за неке индексе $i$ и $j$. Доказати да скуп $\mathcal{C}$ не може имати више од $m + n$ издвојених тачака.

**176.** Решити једначину

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x}.$$

**177.** Нека су $ABC$ и $XYZ$ правоугли троуглови чији прави углови имају темена $C$ и $Z$, редом, и нека су $h_c$ и $h_z$ висине на хипотенузе $c$ и $z$, редом. Ако је $a \geqslant b$ и $x \geqslant y$, доказати да је

$$\sqrt{cz} + 2\sqrt{h_c h_z} \leqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{ax} + \sqrt{by}\right).$$

**178.** Нека су $a$, $b$, $c$ странице, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ углови (мерени у радијанима) и $s$ полуобим троугла $ABC$. Доказати да је тада

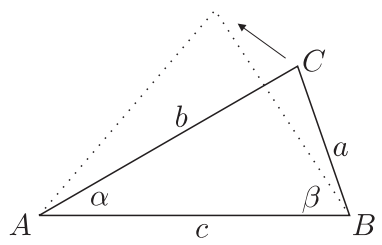
$$\frac{a}{\alpha(s-a)} + \frac{b}{\beta(s-b)} + \frac{c}{\gamma(s-c)} \geqslant \frac{18}{\pi}.$$

**179.** Ако су $a, b, c$ странице, $t_a, t_b, t_c$ тежишне дужи оштроуглог троугла $ABC$, тада важи:

$$\frac{t_a^2}{b^2+c^2} + \frac{t_b^2}{c^2+a^2} + \frac{t_c^2}{a^2+b^2} > \frac{3}{4}.$$

Доказати.

**180.** Нека је $\alpha = f(b)$ функција која изражава зависност угла $\alpha$ од дужине странице $AC = b$ када троугао почне да се мења тако што $b$ почне да расте, а дужине $a$ и $c$ остану исте. Нека је $\beta = g(a)$ функција која изражава зависност угла $\beta$ од дужине странице $BC = a$ када троугао почне да се мења тако што $a$ почне да расте, а дужине $b$ и $c$ остану исте (слика 1.7).




Слика 1.7.

Доказати да важи следећа „синусна теорема” за прве изводе тих функција

$$\frac{f'(b)}{\sin\alpha} = \frac{g'(a)}{\sin\beta}.$$

**181.** Одредити све тројке $(x, y, z)$ природних бројева за које важи

$$xy^2z^3 = 384 \quad \text{и} \quad x^2y^3z = 1152.$$

**182.** Нека је природан број $n+1$ дељив са $24$. Доказати да је сума свих делилаца броја $n$ такође дељива са $24$.

**183.** За природан број $n$ дефинишемо $f(n) = 4^n + 6^n + 9^n$. Доказати да је за свако $n \geqslant m$ број $f(2^n)$ дељив са $f(2^m)$.

**184.** Број $n$ је „добар" ако се може написати као збир нека два и као збир нека три узастопна природна броја. Да ли је производ два добра броја добар број?

**185.** Од цифара $0, 1, 2, \ldots, 9$ (употребити сваку цифру само једном) саставити пет двоцифрених бројева, тако да производ тих пет бројева буде максималан.

**186.** Да ли међу милион бројева $0, 1, 2, \ldots, 999999$ има више оних чији запис не садржи цифру $1$ или пак оних у чијем запису постоји бар једна цифра $1$, и за колико?

**187.** Колико има $n$-тоцифрених бројева, састављених од цифара $2$, $3$ и $4$, који имају паран збир цифара?

**188.** У купеу има 6 седишта. На колико начина се на та седишта може разместити:

(а) 6 путника,

(б) 4 путника,

(в) 8 путника (два увек стоје)?

**189.** У биоскопској сали има $n$ редова, а у сваком реду $n$ седишта. Сваки ред је нумерисан бројевима од $1$ до $n$, и свако седиште у једном реду је нумерисано од $1$ до $n$. Шта је вероватније: да ће збир редног броја реда и редног броја седишта бити паран, или пак непаран број?

**190.** Решити једначину $x + a^3 = \sqrt[3]{a - x}$ у зависности од параметра $a$.

**191.** Нека су $z_1$ и $z_2$ комплексни бројеви. Ако је $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1z_2 \neq -1$, онда је $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}$ реалан број. Доказати.

**192.** За сваку параболу $x^2 + bx + c$ која сече координатне осе у три различите тачке, опишемо круг око тих тачака. Доказати да сви кругови имају заједничку тачку.

**193.** Нека је $\triangle ABC$ оштроугли. На продужетку странице $BC$ иза тачке $B$, конструишемо тачку $D$, тако да је $AB = BD$ и важи распоред тачка $C - B - D$. Тачка $M$ је средиште странице $AC$. Означимо пресечну тачку симетрале $\sphericalangle ABC$ и праве $DM$ са $E$. Израчунати $\sphericalangle BAE$.

**194.** Дат је квадрат $ABCD$ странице $a$. Конструисати кружницу $k$ која додирује странице $AB$, $BC$ и пролази кроз тачку $D$. Изразити полупречник кружнице у функцији од $a$.

**195.** Збир нормала спуштених из било које тачке основице једнакокраког троугла на краке је сталан. Доказати.

**196.** Збир дужина $m, n, p$ дужи које спајају унутрашњу тачку троугла са његовим теменима мањи је од збира две дуже странице тог троугла. Доказати.

**197.** Нека је $ABCDE$ правилан петоугао, тачка $O$ центар тог петоугла, а $T$ произвољна тачка у простору. Доказати да је тада

$$5\overrightarrow{TO} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TE}.$$

**198.** Одредити коефицијент уз $x^{15}$ у полиному $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^3$.

**199.** Нека је $|q| < 1$. Израчунати $T_n = 1 + 3q + 5q^2 + \cdots + (2n+1)q^n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

**200.** Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тако да за свако $x, y, z \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x^2 + yf(z)) = xf(x) + zf(y).$$

**201.** Природни бројеви $m$ и $n$ су такви да је сума природних бројева мањих од $m$ и већих од $n$ једнака 1000. Одреди бројеве $m$ и $n$.

**202.** Доказати да је израз $a^4 - 10a^2 + 9$ дељив са 1920 за сваки прост број $a > 5$.

**203.** Нека су $x$ и $y$ природни бројеви такви да је $xy = 2007^{2008}$. Доказати да тада број $x + y$ није дељив бројем 2008.

**204.** Одредити све парове простих бројева $p$ и $q$ за које је вредност израза $p^2 + 3pq + q^2$:

(а) квадрат неког природног броја;

(б) степен броја 5.

**205.** Одреди све целе бројеве $x, y, z$ такве да је $x^2(x^2 + y) = y^{z+1}$.

**206.** Нека су $x, y, z$ различити реални бројеви. Доказати да је

$$\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-z} + \sqrt[3]{z-x} \neq 0.$$

**207.** Одредити производ решења једначине $(x^2 - 7x + 11)^{x^2-11x+30} = 1$.

**208.** Одредити вредност израза

$$A = \sqrt[3]{28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} + \sqrt[3]{28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}\,.$$

**209.** Решити једначину $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$.

**210.** Да ли је могуће у круг поређати 200 реалних бројева тако да је збир свих бројева једнак 200, збир свака три узастопна броја није већи од 3 и да је један од бројева 3?

**211.** У библиотеци се налази $n$ полица, и на свакој се налази бар по једна књига. Управник је саградио нових 2008 полица и наредио да се књиге прерасподеле на $n+2008$ полица, тако да на свакој буде бар по једна књига. Књига је привилегована, ако се налази на полици која има мање књига него у првобитном распореду. Доказати да постоји бар 2009 привилегованих књига у преуређеној библиотеци.

**212.** Бројеви од 1 до $n$ су поређани у низ, тако да је сваки број или већи од свих претходних бројева или мањи од свих претходних. На колико начина је то могуће учинити?

**213.** Одреди збир свих бројева из таблице

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ 2 & 3 & 4 & \dots & k+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & k+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k & k+1 & k+2 & \dots & 2k-1. \end{array}$$

**214.** Низ бројева је дефинисан на следећи начин:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_k = \frac{2k-3}{2k} \cdot a_{k-1}.$$

Доказати да за сваки природан број $n$ важи $\sum_{k=1}^{n} a_k < 1$.

**215.** Нека су $AA_1, BB_1, CC_1$ паралелне тетиве неког круга. Тачке $A', B', C'$ су симетричне тачкама $A_1$, $B_1$, $C_1$ редом, у односу на средишта дужи $BC$, $CA$, $AB$. Доказати да су тачке $A', B', C'$ колинеарне.

**216.** Дат је квадрат $K$ странице $a$ у који је уписан квадрат $K_1$, тако да му темена припадају страницама квадрата $K$. У квадрат $K_1$ и у сва четири добијена троугла уписани су кругови. Одредити положај темена уписаног квадрата $K_1$ тако да збир површина свих пет уписаних кругова буде минималан.

**217.** У круг $K$ је уписан седмоугао чија су три угла једнака $120°$. Доказати да су бар две странице тог седмоугла једнаке.

**218.** Дати су правилан једнакоивичан тетраедар и правилна једнакоивична четворострана пирамида ивице $a$. Разрезати ова тела и од добијених делова саставити коцку.

**219.** На кругу, полупречника $r$, дата је тачка $A$. Конструисати тетиву $BC$ тог круга, паралелну тангенти у тачки $A$ тако да површина троугла $ABC$ буде највећа.

**220.** Уписани круг $\triangle ABC$ са центром у $O$ додирује странице $BC$, $AC$ и $AB$ у тачкама $D$, $E$, $F$, редом. Права $EF$ сече круг над пречником $BC$ у тачкама $P$ и $Q$, тако да је тачка $P$ ближа темену $B$ него тачка $Q$. Доказати да је $\sphericalangle POA + \sphericalangle ABO = 90°$.

**221.** Свежи краставци садрже $99\%$ воде. Ако оставимо свеже краставце да преноће, они ујутру садрже $98\%$ воде. Ако је увече, у продавници, остављено $100$ килограма краставца, колико ће килограма ујутру бити за продају?

**222.** Доказати да у конвексном десетоуглу, који нема паралелних дијагонала, постоје дијагонале чији правци заклапају угао мањи од $6^\circ$.

**223.** На шаховској табли $8 \times 8$ постављена су $33$ топа. Доказати да међу њима постоји $5$ топова који се међусобно не нападају.

**224.** У скупу $\mathbb{Z}$ решити једначину $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$.

**225.** У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину $\sqrt{5x+1} - 2\sqrt{4-x} + \sqrt{5}\sqrt{x+2} = \sqrt{61-4x}$.

**226.** Доказати да за реалне бројеве $x_i > 0, i = 1, \ldots, n$, такве да је $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, важи неједнакост

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant (n+1)^n.$$

**227.** Нека је $(a_n), n \in \mathbb{N}$, низ такав да је $a_1 = 2$ и за свако $n$ важи

$$2a_{2n} = na_n^2 + 2a_n \quad \text{и} \quad (2n+1)a_{2n+1} = 3n^2a_n^2 + 6na_n + 2.$$

Доказати да:

(а) $a_{3n}$ није цео број ни за које $n$;

(б) постоји бесконачно много природних бројева у низу $(a_n)$.

**228.** Ако је

$$f(x) = \frac{x\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}}{-x\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

одредити $f^{2008}(x) = \underbrace{f(f(\cdots(f}_{2008\text{ пута}}(x))\cdots))$.

**229.** За које вредности реалног параметра $a$ систем једначина

$$\begin{aligned} 2^{1+\sqrt{xy}} + 3^{x+y+1} &= a, \\ 8^{1+\sqrt{xy}} + 27^{x+y+1} &= a^3 - 3a^2 + 3a \end{aligned}$$

има бар једно решење $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

**230.** Нека је $A_1A_2\ldots A_n$ конвексан $n$-тоугао чије се никоје три дијагонале не секу у једној тачки. Колико има различитих троуглова чија су темена темена тог $n$-тоугла или пресечне тачке његових дијагонала?

**231.** Нека $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ и $d \neq 0$. Функција $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ је дата са

$$f(x) = \left[\frac{ax+b}{cx+d}\right].$$

Доказати да је функција инјективна ако и само ако је $c = 0$ и $a \geqslant d$.

**232.** На тениском турниру учествује $2n$ играча. Одредити број парова за први ниво такмичења.

**233.** Ако су у $\triangle ABC$ тежишне дужи $t_b$ и $t_c$ узајамно нормалне, доказати да важи неједнакост

$$\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geqslant \frac{2}{3}.$$

**234.** Играч $C$ треба да одигра три тениска меча са играчима $A$ и $B$ наизменично. Познато је да је $A$ бољи играч од играча $B$. Ако су играчу $C$ потребне две узастопне победе, који распоред противника му више одговара: $ABA$ или $BAB$?

**235.** Доказати да функција $f(x) = \cos x + \cos x\sqrt{2}$ није периодична.

**236.** Нека је $x_1$ произвољан реалан број, а $x$ такав реалан број да важи $|x - x_1| \leqslant \frac{1}{100}$.

(а) Доказати да разлика вредности функције $\sin x$ у тачкама $x$ и $x_1$ није већа од $\frac{1}{100}$.

(б) Да ли се за функцију $\sin x^2$ може одредити интервал $\Delta = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, где је $\delta$ коначан позитиван број који не зависи од $x_1$, тако да за све $x \in \Delta$ важи

$$|\sin x^2 - \sin x_1^2| \leqslant \frac{1}{100}?$$

**237.** Дат је полукруг над пречником $AB$ и на њему тачке $C$ и $D$, тако да $C$ припада луку $AD$ и да је угао $CSD$ прав, где је $S$ средиште дужи $AB$. Нека је $E$ пресек правих $AC$ и $BD$, а $F$ пресек правих $AD$ и $BC$. Доказати да вектор $\overrightarrow{EF}$ не зависи од избора тачака $C$ и $D$.

**238.** Дата је кружница $k$. Конструисати центар кружнице употребом само шестара.

**239.** Нека су $P$ и $R$ тачке у којима наспрамне странице $AB$ и $CD$ просторног четвороугла $ABCD$ секу произвољну раван $\pi_1$ паралелну другим двема страницама, а $Q$ и $S$ тачке у којима странице $BC$ и $AD$ тог четвороугла секу произвољну раван $\pi_2$ паралелну са другим двема страницама. Доказати да тада тачке $P, Q, R, S$ припадају једној равни.

**240.** Нека је $p$ прост број. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева $n$ таквих да је $2^n - n$ дељиво са $p$.

**241.** Одредити све просте бројеве $p$ и $q$ такве да је $(p+1)^q$ потпун квадрат.

**242.** Означимо са $d(n)$ број делилаца природног броја $n$. Одредити све природне бројеве $n$ такве да међу бројевима $n, d(n), d(d(n)), d(d(d(n))), \ldots$ нема ниједног потпуног квадрата.

**243.** У групи од $n$ девојчица и $n$ дечака, сваки дечак је послао неким девојчицама позив за матурско вече. Испоставило се да постоји јединствена комбинација од $n$ парова, тако да се у сваком пару налазе по један дечак и девојчица коју је он позвао. Одредити максималан број свих позива.

**244.** Дато је шест ћупова са златницима тежина од 1 до 6. У сваком ћупу се налазе златници исте тежине. Јанко је залепио налепнице са тежинама на сваки ћуп. Међутим, како није сигуран да ли је тачно поставио све налепнице, одлучио је да то провери уз најмањи број мерења. На располагању му је вага са два таса, а у једном мерењу може да извади највише по један новчић из сваког ћупа и стави га на произвољан тас. Колико је најмање мерења потребно да би Јанко увидео да ли су све налепнице на својим местима?

**245.** Нека $c_k$ представља производ првих $k$ непарних, а $d_k$ представља производ првих $k$ парних природних бројева. По дефиницији је $c_0 = d_0$. За сваки природан број $n$, израчунати

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{2^{n-k}n!}{k!}c_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{2^{n-k}n!}{k!}d_k.$$

**246.** Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ природни бројеви, тако да је сваки од њих мањи или једнак $m$. Нека су $y_1, y_2, \ldots, y_m$ природни бројеви, тако да је сваки од њих мањи или једнак $n$. Доказати да постоје непразан скуп неких од бројева $x_i$ и непразан скуп неких од бројева $y_i$ такви да су суме чланова та два скупа једнаке.

**247.** У скупу комплексних бројева решити једначину

$$(x-3)^4 + (x-4)^4 = (2x-7)^4.$$

**248.** У скупу реалних бројева решити једначину

$$10^{-3}x^{\log_{10} x} + x\left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x\right) = x^2 + 3x.$$

**249.** Нека су $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ чланови аритметичког низа са разликом $d$ $(a_{n+1} - a_n = d)$. Доказати да тада за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = \frac{(a_n a_{n+1})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d}.$$

**250.** Доказати да функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ није инјективна ако за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

**251.** Задата је стого растућа функција $f$ на скупу природних бројевима таква да за свако $n$ важи $f(f(n)) = 3n$. Одредити $f(2008)$.

**252.** Да ли постоји конвексан многоугао који се може исећи на неконвексне четвороуглове?

**253.** У датом троуглу $ABC$ конструисати тачку $M$ чији је збир квадрата растојања од правих $AB$, $BC$ и $CA$ минималан.

**254.** Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_8$ произвољне тачке. Означимо са $M_1, M_2, \ldots, M_8$ средишта дужи $A_1A_2$, $A_2A_3$, $\ldots$, $A_8A_1$, тим редом. Ако су $P_1$, $P_2$, $\ldots$, $P_8$ средишта дужи $M_1M_3$, $M_2M_4$, $M_3M_5$, $M_4M_6$, $M_5M_7$, $M_6M_8$, $M_7M_1$, $M_8M_2$, тим редом, доказати да се дужи $P_1P_5$, $P_2P_6$, $P_3P_7$, $P_4P_8$ секу у једној тачки.

**255.** Нека је троугао $ABC$ оштроугли. Правоугаоници $BCKL$ и $ACPQ$ су конструисани споља тако да имају једнаке површине. Доказати да су теме $C$, центар описаног круга троугла $ABC$ и средиште сегмента $PK$ колинеарни.

**256.** У равни су дати круг $K$ са центром у $O$ и полупречником $r$, и права $p$ која не сече $K$. Нека је $A$ подножје нормале из $O$ на праву $p$. Тачка $P$ припада дужи $OA$, тако да важи $AP^2 = AO^2 - r^2$. Тачке $M$ и $N$ су променљиве са праве $p$, тако да круг са пречником $MN$ додирује споља круг $K$. Доказати да је за сваку дуж $MN$ угао $MPN$ константан.

**257.** Дат је правоугли троугао $ABC$ са правим углом код темена $A$. У њега уписани круг $k$ са центром $O$ додирује странице $AB$ и $BC$ у тачкама $P$ и $Q$, редом. Нека је $F$ средиште странице $AC$, а тачка $E$ пресек праве $AB$ и $FO$. Права $PQ$ сече висину из темена $A$ у тачки $M$. Доказати да је $AM = AE$.

**258.** Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви из интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, такви да важи једнакост $\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \cdots + \sin^2 x_n = 1$. Доказати неједнакост

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \cdots + \cos x_n}{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n} \geqslant \sqrt{n-1}\,.$$

**259.** Израчунати површину правилне четворостране призме чија је запремина $V = 12\sqrt{3}$, а збир дужина свих ивица је најмањи могући.

**260.** Ако је $(x, y, z)$ целобројно решење једначине $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, доказати да бар један од бројева $x$, $y$ и $z$ мора бити дељив са 7.

**261.** У скупу реалних бројева решити једначину $2(x^4 - 2x^2 + 3)(y^4 - 3y^2 + 4) = 7$.

**262.** У скупу целих бројева решити једначину $m^2 + (m+1)^2 = n^4 + (n+1)^4$.

**263.** Да ли постоје ненегативни цели бројеви $x$ и $y$ такви да су $x + y$, $2x + y$ и $x + 2y$ потпуни квадрати?

**264.** Одредити природан број $n$ чији је кубни корен једнак броју који се из броја $n$ добија брисањем последње три цифре.

**265.** Нека је $M_n$ скуп свих $n$-тоцифрених бројева који у свом запису садрже само цифре 1 и 2. Да ли је могуће разбити $M_n$ на два дисјунктна подскупа, тако да збир било која два различита броја из једног подскупа у свом запису садржи барем две цифре 3?

**266.** Дат је природан број $n > 2$ и реални бројеви $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$, такви да важи $|x_i| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right| > 1$. Доказати да постоји природан број $k$ такав да је

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i\right| \leqslant 1.$$

**267.** Колико има полинома $P$ чији коефицијенти припадају скупу $\{0, 1, 2, 3\}$ и за које важи $P(2) = n$?

**268.** Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ненегативни бројеви и нека је $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Доказати да тада важи

$$\frac{S}{S - x_1} + \frac{S}{S - x_2} + \cdots + \frac{S}{S - x_n} \geqslant \frac{n^2}{n - 1}.$$

**269.** Доказати да за сваке четири тачке простора важи

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

**270.** У неправоуглом троуглу $ABC$, тачка $H$ је ортоцентар, а тачке $D$, $E$ и $F$ су подножја висина из темена $A$, $B$ и $C$ редом. Тачка $X$ је пресек правих $AH$ и $EF$, а $Y$ друга пресечна тачка круга описаног око троугла $AHC$ и троугла $EBC$. Доказати да су тачке $C, X$ и $Y$ колинеарне.

**271.** Четвороугао $ABCD$ је уписан у круг. На луку $CD$, који не садржи тачке $A$ и $B$, налази се произвољна тачка $M$. Нека дужи $MA$ и $MB$ секу страницу $CD$ у тачкама $X$ и $Y$, респективно. Доказати да однос $\dfrac{DX \cdot CY}{XY}$ не зависи од положаја тачке $M$.

**272.** Нека је $I$ центар уписаног круга у оштроугли троугао $ABC$. Уписани круг додирује странице $AB$ и $AC$ у тачкама $X$ и $Y$, респективно. Права $XI$ сече уписани круг у тачки $M$. Означимо пресечну тачку праве $CM$ и странице $AB$ са $X'$. Тачка $L$ се налази на дужи $X'C$, тако да важи $X'L = CM$. Доказати да су тачке $A, L, I$ колинеарне ако и само ако важи $AB = AC$.

**273.** Ако су $h_a, h_b$ и $h_c$ висине, а $r$ полупречник уписане кружнице $\triangle ABC$, доказати да је

$$\frac{h_a - r}{h_a + r} + \frac{h_b - r}{h_b + r} + \frac{h_c - r}{h_c + r} \geqslant \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{h_a + r}{h_a - r} + \frac{h_b + r}{h_b - r} + \frac{h_c + r}{h_c - r} \geqslant 6.$$

**274.** Дужине страница троугла су $a, b$ и $c$. Колика је дужина симетрале $s_c$ угла $\gamma$?

**275.** Одредити минимум израза $\dfrac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ за $0 < x < \pi$.

**276.** За $x \in \mathbb{R}$ задата је функција $f$ са

$$f(x) = a|x + 1| + |x - 1| + (2 - a)x - a - 1.$$

Одредити реалан параметар $a$ тако да $f$ буде бијекција и у тим случајевима наћи $f^{-1}$.

**277.** Одредити све реалне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које испуњавају услов

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4. \tag{1.3}$$

**278.** Одредити највећу могућу запремину правилне четворостране пирамиде бочне ивице 1.

**279.** На колико начина можемо распоредити $m$ различитих птица у $n$ различитих кавеза ($n \leqslant m \leqslant 2n$) тако да сваки кавез садржи бар једну, али не више од две птице?

**280.** У разреду има 25 ученика. Доказати да се од њих не може формирати више од 30 кошаркашких екипа са по 5 играча у свакој, ако ма које две од њих немају више од једног играча који је члан обе екипе.

**281.** Дата је таблица $2008 \times 2008$ и у сваком пољу је уписан број $+1$ или $-1$. Нека је $A_k$ производ свих бројева у $k$-тој врсти, а $B_k$ производ свих бројева у $k$-тој колони таблице. Доказати да је број $A_1 + A_2 + \cdots + A_{2008} + B_1 + B_2 + \cdots + B_{2008}$ дељив са 4.

**282.** Дужине страница два правоугаоника су природни бројеви. У сваком од њих дужина једне странице је већа од 2000, а дужина друге није већа од 60. Доказати да су таква два правоугаоника подударна ако су им дијагонале једнаких дужина.

**283.** Ако је $p$ непаран прост број и $a$ цео број који није дељив са $p$, онда је један и само један од бројева

$$A = a^{1+2+\cdots+(p-1)} + 1 \quad \text{и} \quad B = a^{1+2+\cdots+(p-1)} - 1$$

дељив са $p$. Доказати.

**284.** Нека су $p$ и $q$ прости бројеви, број $q^3 - 1$ дељив са $p$, а број $p - 1$ дељив са $q$. Доказати да је тада $p = 1 + q + q^2$.

**285.** Ако је $a$ реалан број, одредити сва решења система

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 &= 0, \\ x_2 + a^2 x_3 &= 0, \\ &\vdots \\ x_{2008} + a^{2008} x_{2009} &= 0, \\ x_{2009} + a^{2009} x_1 &= 0. \end{aligned}$$

**286.** Нека је $f(x) = x^2 + 2009x + 1$. Доказати да за сваки природан број $n$, једначина $f^n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)}_{n}\cdots)) = 0$ има бар један реалан корен.

**287.** Нека су $x, y, z$ позитивни реални бројеви. Доказати неједнакост:

$$\frac{2}{x^2+yz} + \frac{2}{y^2+xz} + \frac{2}{z^2+xy} \leqslant \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}.$$

**288.** Нека су $x$ и $y$ ненегативни реални бројеви такви да је $x+y=2$. Доказати да тада важи $x^2y^2(x^2+y^2) \leqslant 2$. Када важи једнакост?

**289.** Доказати да сви комплексни бројеви $z$ за које важи $|z-1| = 2|z+1|$, припадају једном кругу. Одредити центар и полупречник тог круга.

**290.** Нека су $p$ и $q$ прости бројеви такви да је $q \geqslant p > 2$. Доказати да тада важи

$$pq \left| \left( \binom{p+q}{q} - \binom{q}{p} - 1 \right). \right.$$

**291.** Нека су $f(x)$ и $g(x)$ полиноми степена $n$, а $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ различите вредности променљиве $x$. Ако је

$$f(x_0) = g(x_0),\ f(x_1) = g(x_1),\ f(x_2) = g(x_2),\ \ldots,\ f(x_n) = g(x_n),$$

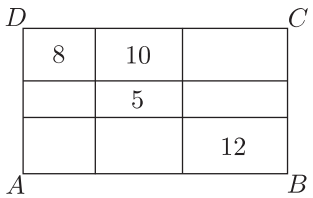
доказати да је $f(x) \equiv g(x)$.

**292.** Израчунати (на што је могуће краћи начин без употребе калкулатора) површину троугла чије су дужине страница $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$.

**293.** Основице правоуглог трапеза у који се може уписати круг су $a$ и $b$. Израчунати површину тог трапеза.

**294.** Дата су два круга са центрима $O$ и $O_1$ и полупречницима $r$ и $\frac{r}{2}$. Кругови се додирују изнутра у тачки $T$. Конструисати круг који додирује оба дата круга и праву $OO_1$.

**295.** Правоугаоник $ABCD$ је подељен на 9 мањих правоугаоника, тако да су површине четири од њих $8, 10, 5$ и $12$, као што је приказано на слици 1.8.




Слика 1.8.

Одреди најмању могућу вредност површине правоугаоника $ABCD$.

**296.** Ако у троуглу $ABC$ важи $\alpha = 3\beta$, онда је $(a^2-b^2)(a-b) = bc^2$. Доказати.

**297.** Дат је конвексан петоугао $ABCDE$. Дијагонале тог петоугла граде конвексан петоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$ и петокраку звезду.

(a) Одредити збир углова при врховима $A, B, C, D$ и $E$ петокраке звезде.

(б) Ако је петоугао $ABCDE$ правилан, наћи однос површине тог петоугла и површине петоугла $A_1B_1C_1D_1E_1$.

**298.** Дат је троугао $ABC$ и тачке $A'$ и $D$ на страници $BC$, тако да је $AA'$ тежишна дуж, а $AD$ симетрала угла из темена $A$. Нормала из темена $B$ на $AD$ сече праву $AA'$ у тачки $E$. Доказати да је $DE$ паралелно са $AB$.

**299.** Одреди у равни $xOy$ скуп тачака $(x, y)$ за чије координате важи $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right) \leqslant y \leqslant 1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin 4x}+\sqrt{1-\sin 4x}\right).$$

**300.** Колико има шестоцифрених бројева са различитим цифрама чија је највећа цифра за 7 већа од најмање цифре?

**301.** У ходнику се налази $n$ угашених сијалица, нумерисаних бројевима од 1 до $n$. Сваки од $n$ ученика редом пролази ходником и мења стање сијалица на следећи начин: $k$-ти ученик притиска прекидач за сијалице које су означене редним бројем који је дељив са $k$ (ако је сијалица била упаљена – она се гаси; уколико је била угашена – пали се). Одредити број упаљених сијалица након проласка последњег ученика.

**302.** Одредити сва реална решења једначине

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{2008}-x_{2009})^2+x_{2009}^2=\frac{1}{2010}.$$

**303.** У зависности од реалног параметра $a$ одредити скуп решења (у $\mathbb{R}$) неједначине

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}<a. \tag{1.4}$$

**304.** Одредити скуп решења (у $\mathbb{R}$) неједначине

$$\log_{\sqrt{x}}\log_2\left(4^x-12\right)\leqslant 2. \tag{1.5}$$

**305.** Одредити комплексне бројеве $x, y$ и $z$ јединичног модула за које важи

$$x+y+z=1 \quad \text{и} \quad xyz=1.$$

**306.** Одредити све просте бројеве $p$, за које постоје природни бројеви $n, x, y$ тако да важи

$$p^n=x^3+y^3.$$

**307.** Доказати да је израз $\dfrac{\mathrm{nzd}(n,m)}{n}\dbinom{n}{m}$ природан број када је $n \geqslant m \geqslant 1$.

**308.** Доказати да је природан број $n$ прост ако и само ако $n \mid N$, где је $N=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-3} k\cdot k!$.

**309.** Доказати да постоји $k$ узастопних природних бројева од којих је сваки дељив квадратом природног броја већег од 1.

**310.** (а) Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различити природни бројеви узајамно прости у паровима. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева $b$ таквих да су $b + a_1, b + a_2, \ldots, b + a_n$ такође узајамно прости у паровима.

(б) Дато је $n$ различитих природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За сваки прост број $p$ означимо са $r_i(p)$ остатак који се добија при дељењу броја $a_i$ са $p$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказати да постоји бесконачно много целих бројева $b$ таквих да су бројеви $b + a_1, b + a_2, \ldots, b + a_n$ узајамно прости у паровима ако важи следећи услов: за сваки прост број $p$ бар један елемент скупа $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ се не појављује више од једанпут међу остацима $r_1(p), r_2(p), \ldots, r_n(p)$.

**311.** Да ли постоји функција $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ таква да за произвољне целе бројеве $m$ и $n$ важи

$$f(n) - f(n + f(m)) = m?$$

**312.** Одредити производ $(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdot \ldots \cdot (1 + \operatorname{tg} 45^\circ)$.

**313.** У правоугаоној мрежи са доњим левим теменом $(0, 0)$ и горњим десним теменом $(9, 4)$ одабрана је 21 целобројна тачка. Доказати да постоји правоугаоник чија су темена међу датим тачкама, а странице паралелне координатним осама.

**314.** Нека је $ABCD$ паралелограм, тако да важи $\sphericalangle A = 60^\circ$. Нека је $O$ центар описаног круга око троугла $ABD$. Права $AO$ сече симетралу спољашњег угла $BCD$ у тачки $E$. Доказати да је $OE = 2AO$.

**315.** Нека је $H$ ортоцентар оштроуглог троугла $ABC$, а тачка $M$ средиште странице $BC$. Права која садржи тачку $H$ и нормална је на праву $HM$ сече странице троугла $AB$ и $AC$ у тачкама $E$ и $F$, редом. Доказати да је $HE = HF$.

**316.** (а) Троугао је подељен на два слична троугла. Доказати да су тада та два троугла правоугла.

(б) Доказати да није могуће оштроугли троугао поделити на пет подударних троуглова правим које не пролазе кроз темена тог троугла.

**317.** Нека је $CD$ симетрала $\sphericalangle ACB$ троугла $ABC$ ($D \in AB$) и $AC + BD = BC + AD$. Доказати да је тада $\triangle ABC$ једнакокрак.

**318.** У купу чији је осни пресек правоугли троугао уписан је равностранi ваљак. Одредити однос запремина купе и ваљка.

**319.** Дат је троугао са страницама $a$, $b$ и $c$ и три сфере које додирују раван тог троугла у његовим теменима и све се међусобно додирују. Израчунај полупречнике сфера у зависности од $a, b$ и $c$.

**320.** На табли су написани бројеви $1, 2, 3, \ldots, 30$. Онда су избрисана два броја и написана је њихова разлика (од већег је одузет мањи број). Овај поступак је понављан све док на табли није остао само један број. Која је парност овог броја? Зашто?

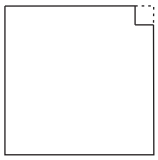
**321.** Природни бројеви од $1$ до $n^2$ су поређани на случајан начин у таблицу $n \times n$. За дати број $m < n$, обојимо $m$ највећих бројева у свакој врсти у плаво и $m$ највећих бројева у свакој колони у црвено. Одредити колики је најмањи број поља у таблици која су обојена и плаво и црвено (у зависности од $m$).

**322.** Из квадрата странице $8$ исечен је угаони квадрат странице $1$, као што је приказано на слици 1.9. Да ли је могуће преостали део квадрата исећи на:

(а) троуглове једнаке површине;

(б) $18$ троуглова једнаке површине;

(в) мање од $18$ троуглова једнаке површине?



Слика 1.9.

**323.** Квадрат странице $100$ је подељен на $10000$ мањих квадрата странице $1$. За два квадрата који имају заједничку страницу рећи ћемо да су суседни.

(а) Да ли је могуће обојити паран број квадрата тако да сваки обојени квадрат има паран број обојених суседних квадрата?

(б) Да ли је могуће обојити непаран број квадрата тако да сваки обојени квадрат има непаран број обојених суседних квадрата?

**324.** (а) Одредити све тројке природних бројева $(x, y, z)$ за које важи

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 243.$$

(б) Одредити све цифре $x, y, z$ такве да важи

$$\overline{xyz} + \overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx} + x + y + z = 243.$$

**325.** Одредити све природне бројеве $a$ за које важи

$$(a^2 + 2a + 9)^2 + 3a(a^2 + 2a + 9) - 4a^2 = 4131.$$

**326.** Ако је $x + y \geqslant 0$ одредити минималну вредност израза

$$x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 + x^2 + 4x + 7,$$

као и вредности за $x$ и $y$ за коју се ова вредност достиже.

**327.** Решити једначину

$$3(1+a^2+a^4)x=(1+a+a^2)^2x+a^5+a^4+a^3-a^2-a-1$$

по $x$, ако је $a$ реални параметар.

**328.** У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{4-x\sqrt{4-(x-2)\sqrt{1+(x-5)(x-7)}}}=\frac{5x-6-x^2}{2}.$$

**329.** Доказати да за сваки природан број $n$ важи:

$$n+1<\frac{\log 4}{\log 3}+\frac{\log 44}{\log 33}+\frac{\log 4444}{\log 3333}+\cdots+\frac{\log \overbrace{44\ldots44}^{2^n}}{\log \underbrace{33\ldots33}_{2^n}}<n+2.$$

**330.** Нека су $m$ и $n$ природни бројеви, такви да $mn$ дели $m^2+n^2+m$. Доказати да је тада $m$ потпун квадрат.

**331.** Одредити све природне бројеве $n>2$, за које постоји пермутација бројева од 1 до $n$ са следећим својством: за свака два броја $i$ и $j$ исте парности, број $\frac{i+j}{2}$ се не налази између бројева $i$ и $j$ у пермутацији.

**332.** Нека је $A$ скуп од $n$ природних бројева. Доказати да постоји скуп $B$, који је подскуп од $A$ са више од $\frac{n}{3}$ елемената за који важи: за свака два не обавезно различита елемента $a$ и $b$ скупа $B$ њихов збир не припада скупу $B$.

**333.** Дати су реални бројеви $a_1,a_2,\ldots,a_n$, такви да је $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. Доказати неједнакост

$$\sum_{i<j}\frac{4a_ia_j}{a_i+a_j}\leqslant n\cdot\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).$$

**334.** Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми са целобројним коефицијентима 1 или 2008, тако да је $\deg(P)=n$ и $\deg(Q)=m$. Ако $P(x)$ дели $Q(x)$, доказати да $n+1$ дели $m+1$.

**335.** Дата је тачка $P$ ван круга $\Omega$. Нека су тачке $A$ и $B$ тачке додира тангенти из $P$ на круг $\Omega$. Произвољна права из $P$ сече круг у две тачке $C$ и $D$. Кроз тачку $B$ конструишимо праву $p$ паралелну са $PA$ и нека су $E$ и $F$ тачке пресека праве $p$ и правих $AD$ и $AC$, респективно. Доказати да је $B$ средиште дужи $EF$.

**336.** Нека је $ABC$ оштроугли троугао ($BC>CA$). Нека је $O$ центар описаног круга, $H$ ортоцентар и $F$ подножје нормале из $C$ на $AB$. Нормала на $OF$ у $F$ сече $AC$ у $P$. Доказати да је $\sphericalangle FHP=\sphericalangle BAC$.

**337.** Нека је $ABC$ оштроугли троугао. Кружница $k$, над пречником $AB$, сече странице $AC$ и $BC$ редом у тачкама $M$ и $N$. Тангенте кружнице $k$ у тачкама $M$ и $N$ секу се у тачки $P$. Ако је $CP=MN$, одредити $\sphericalangle ACB$.

**338.** Нека су $PC$ и $PD$ тангентне дужи из тачке $P$ на круг са пречником $AB$. Нека је $K$ пресек правих $AC$ и $BD$. Доказати да је $PK \perp AB$.

**339.** Дат је троугао $ABC$. Нека је центар уписаног круга $I$ и нека уписани круг додирује странице троугла $BC$, $AC$, $AB$ у тачкама $L$, $M$, $K$, редом. Нека је $p$ права која садржи тачку $B$ и паралелна је дужи $KL$. Пресек правих $ML$ и $p$ је тачка $S$, а пресек правих $MK$ и $p$ је $R$. Доказати неједнакост

$$\operatorname{tg} \sphericalangle RIS \geqslant \frac{\sin \beta}{\sin^3 \frac{\beta}{2}}.$$

**340.** За природне бројеве $a, b, c, d$ важи $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Да ли је $a + b + c + d$ сложен број?

**341.** За природне бројеве $m$ и $n$ кажемо да су *пријатељски бројеви* ако је сваки од њих једнак збиру правих делилаца другог. Ако су $p = 3 \cdot 2^{k-1} - 1, q = 3 \cdot 2^k - 1$ и $r = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1$ прости бројеви, доказати да су тада $A = 2^k pq$ и $B = 2^k r$ пријатељски бројеви.

**342.** Фермаови бројеви су бројеви облика $2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Доказати да су свака два различита Фермаова броја узајамно проста.

**343.** Из скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ на произвољан начин изабран је $n + 1$ број. Доказати да међу изабраним бројевима увек постоји број дељив неким другим од изабраних бројева.

**344.** За природан број $n$ нека је $S(n)$ збир његових цифара. Одредити највећу вредност израза $\dfrac{S(n)}{S(16n)}$.

**345.** Табла $2010 \times 2010$ је попуњена бројевима од 1 до $2010^2$. Суседним пољима сматрамо она која имају заједничку страницу или теме. Доказати да постоје два суседна поља таква да је збир бројева на њима дељив са 4.

**346.** Квадрат $23 \times 23$ је поплочан квадратима $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3$. Колико је најмање квадрата $1 \times 1$ потребно за такво поплочавање?

**347.** Дат је скуп $A$ који садржи $n$ природних бројева. Доказати да сваки низ од $2^n$ бројева из $A$ садржи узастопни подниз бројева чији производ је потпун квадрат. Да ли исто важи за низ од $2^n - 1$ бројева из скупа $A$?

**348.** Неки расејани човек има 6 написаних писама које треба да стави у 6 коверата са написаним адресама шесторице људи. На колико начина он може ставити писма у коверте тако да ниједно писмо не стигне ономе коме је намењено?

**349.** У равни је дато 1000 тачака. Било које три формирају троугао површине не веће од 1. Доказати да се онда свих 1000 тачака налазе у троуглу површине не веће од 4.

**350.** Доказати да је полином $p(x) = x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ дељив полиномом $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

**351.** Дата је једначина $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Ако су $x_1$, $x_2$ и $x_3$ корени те једначине израчунати $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2$.

**352.** Доказати да за позитивне бројеве $a$ и $b$ и природан број $n, n \geqslant 2$, важе неједнакости

$$\frac{2}{n+1} \leqslant \frac{a}{a+nb} + \frac{b}{b+na} < 1.$$

**353.** Доказати да за позитивне бројеве $a, b, c$, такве да је $a + b + c = 2$, важи

$$\frac{bc}{2+a} + \frac{ca}{2+b} + \frac{ab}{2+c} \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

**354.** Доказати да за позитивне бројеве $x, y, z$, такве да је $x + y + z = 3$, важи

$$\frac{x^2(y+1)}{x+y+xy} + \frac{y^2(z+1)}{y+z+yz} + \frac{z^2(x+1)}{z+x+xz} \geqslant 2.$$

**355.** У зависности од $n$ и $x$ израчунати $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$.

**356.** Не рачунајући вредности израза $\dfrac{\sin 1}{\sin 2}, \dfrac{\sin 2}{\sin 3}, \dfrac{\sin 3}{\sin 4}$ одредити њихов поредак.

**357.** Нека је тачка $O$ координатни почетак. Нека тачка $B$ има координате $(0, 1)$, тачке $A_i$ имају координате $(i^2 + i + 1, 0)$ за $i = 0, 1, \ldots, n$, а тачка $A_{n+1}$ координате $(n+1, 0)$. Доказати да је тада

$$\sphericalangle OA_0B + \sphericalangle OA_1B + \cdots + \sphericalangle OA_nB + \sphericalangle OA_{n+1}B = 90^\circ.$$

**358.** Дат је квадрат $ABCD$. Изван квадрата је конструисан полукруг над пречником $AB$. Одредити тачку $P$ са полукруга тако да је израз $AP^2 + CP^2$ максималан.

**359.** Одредити пројекцију криве $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$ на $y$-осу.

**360.** Одредити најмању могућу вредност израза

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)}$$

за позитивне реалне бројеве $a, b$ и $c$, ако је $a + b + c \leqslant 3$.

**361.** Нека је дат полином $P(n) = n^3 - n^2 - 5n + 2$. Одредити све целе бројеве $n$ такве да је $(P(n))^2$ квадрат неког простог броја.

**362.** Кажемо да је природан број *савршен* ако је једнак збиру свих својих правих делилаца (свих делилаца тог броја осим њега самог). На пример, 28 је савршен број јер је $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Одредити све бројеве $n$ такве да је $n!$ савршен број.

**363.** Природан број $n$ има следећу особину: ако је $d$ (позитиван) делилац броја $n$, онда је $d + 1$ делилац броја $n + 1$. Доказати да су сви такви бројеви $n$ прости.

**364.** Доказати да сем парова $(0,0)$ и $(0,-1)$ не постоје други парови целих бројева $(x,y)$ такви да је $y+y^2=x+x^2+x^3$.

**365.** Реални бројеви $\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ задовољавају:

(i) $a_1 = 1$,

(ii) $a_{m+n} - mn = a_m + a_n + 1$ за све целе бројеве $m$ и $n$.

Изразити $a_n$ као функцију од $n$.

**366.** Одредити све реалне бројеве $a$, тако да полином $x^3 + ax - 2(a+4)$ има тачно два различита реална корена.

**367.** За позитивне реалне бројеве $a$, $b$ и $c$ важи $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Доказати следеће неједнакости

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ac} \leqslant \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} + \frac{1}{4-c^2} \leqslant 1.$$

**368.** Доказати да једначина $x^3 + y^3 = a(x^2y + y^2x + 1)$, где је $a > 1$ природан број, нема целобројних решења за $a = 4$ и одредити бесконачно много вредности $a$ за које једначина има решења у скупу целих бројева.

**369.** Доказати да постоји бесконачно много бројева $n$, таквих да $n$ дели $2^n + 2$.

**370.** Одредити све природне бројеве $n$ за које важи да $n$ има тачно два позитивна делиоца, док $n+1$ има тачно три позитивна делиоца.

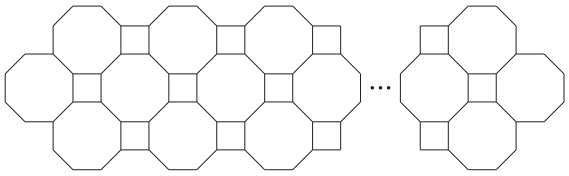
**371.** У скупу реалних бројева решити неједначину $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geqslant 9^{\sqrt{x}}$.

**372.** На такмичењу из математике било је 5 задатака различите тежине, па никоја два нису носила исти број поена. Ако се за два (тачно урађена) најлакша задатка добијало 10, а за два најтежа 18 поена, колико поена се добијало за свих 5 задатака?

**373.** На листу је са три боје нацртано 36 кенгура. Од тога њих 25 има жуте делове, 28 има браон делове, а 20 има делове обојене црном бојом. Ако само 5 кенгура има делове све три боје, колико је једнобојних кенгура?

**374.** Праве $a$ и $b$ секу се у тачки $Q$ „ван цртежа". Конструисати праву кроз задату тачку $P$ и недостижну тачку $Q$.

**375.** Користећи металну жицу направљен је мозаик приказан на слици 1.10. Ако он садржи 61 осмоугао странице 1, колико жице је утрошено за његово прављење?



Слика 1.10.

**376.** Дати су позитивни реални бројеви $a, b, c, x, y, z$ тако да важи $a+x=b+y=c+z=2010$. Доказати да је $az+bx+cy<2010^2$.

**377.** Дат је круг $\Omega$ са центром у тачки $O$. Нека је $P$ произвољна тачка ван круга $\Omega$. Конструишимо произвољну праву кроз $P$ која сече круг у тачкама $A$ и $B$. Нека је $PC$ тангента на круг $\Omega$ и тачка $D$ дијаметрално супротна тачки $C$. Праве $BD$ и $OP$ се секу у тачки $E$. Доказати да је $\sphericalangle ACE = 90^\circ$.

**378.** У оштроуглом троуглу $ABC$ важи $AB > AC$. Нека је $H$ подножје нормале из $A$ на $BC$ и нека је $M$ средиште висине $AH$. Уписани круг у троугао $ABC$ са центром у $I$ додирује страницу $BC$ у $D$. Тачка $K$ је средиште странице $BC$. Нека права $DM$ сече уписани круг у тачки $N$ и симетралу странице $BC$ у тачки $P$. Доказати да је четвороугао $BNCP$ тетиван.

**379.** У троуглу $ABC$, симетрала угла $ABC$ сече описани круг у тачки $D$. Доказати да је $BD^2 > BA \cdot BC$.

**380.** Дата је таблица $2010 \times 2012$, где свако поље садржи по једну сијалицу. На почетку број упаљених сијалица у таблици је већи од $2009 \cdot 2011$. Ако се у неком делу димензија $2 \times 2$ налазе три угашене сијалице, тада се и четврта сијалица тог дела аутоматски гаси. Доказати да се не могу угасити све сијалице у таблици.

**381.** Да ли постоји 2011 различитих бројева, таквих да је сума сваких 2010 (од тих бројева) потпун куб?

**382.** Одредити број пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_{2011})$ скупа $\{1, 2, \ldots, 2011\}$, таквих да ниједан од бројева

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ s_{2011} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2011}$$

није дељив са 3.

**383.** Доказати да за свака два цела броја $A$ и $B$, постоји цео број $C$, такав да су скупови $\{x^2 + Ax + B : x \in \mathbb{Z}\}$ и $\{2x^2 + 2x + C : x \in \mathbb{Z}\}$ дисјунктни.

**384.** Одредити општи члан низа $(x_n)$ ако је $x_n = 3x_{n-1} + 2^{n-1}$ за $n > 1$ и $x_1 = 1$.

**385.** Одредити сва решења система једначина:

$$\begin{aligned} x^{\log y} + \sqrt{y^{\log x}} &= 110, \\ xy &= 1000. \end{aligned}$$

**386.** Пронаћи грешку у датом доказу да је $1 = -1$:

$$\frac{1}{-1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{i} = i \Leftrightarrow 1 = i^2 \Leftrightarrow 1 = -1.$$

**387.** У скупу комплексних бројева решити једначину $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$.

**388.** Нека су $a, b$ и $c$ комплексни бројеви такви да је модул сваког од три решења једначине $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ једнак $1$. Доказати да је онда и модул сваког од три решења једначине $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$ једнак $1$.

**389.** Колико најмање тегова треба изабрати да би се помоћу њих могао измерити сваки терет са целобројном тежином од $1$ до $40\,\mathrm{kg}$? Посматрати одвојено случајеве:

1) тегови се стављају само на један тас;
2) тегови се могу стављати на оба таса.

**390.** У троуглу $ABC$ важи:

1) $DE \parallel AB, D \in AC$ и $E \in BC$,
2) $DF \parallel CB, F \in AB$,
3) $AE \cap DF = \{G\}$ и $CF \cap DE = \{H\}$.

Доказати да је $GH \parallel AC$.

**391.** На страници $AD$ правоугаоника $ABCD$ $(AB < BC)$ одабрана је тачка $E$ тако да је $BE = BC$. Нормала из темена $C$ на дијагоналу $BD$ сече продужетак странице $AB$ у тачки $F$. Доказати да је троугао $BEF$ правоугли.

**392.** Дат је троугао $ABC$. Нека је $M$ средиште лука $BC$ (који не садржи тачку $A$) описаног круга око троугла $ABC$, и нека је $N$ средиште лука $AB$ (који не садржи тачку $C$). Нека је $\Omega_1$ круг са центром у тачки $M$ који додирује праву $BC$, а $\Omega_2$ круг са центром у тачки $N$ који додирује праву $AB$. Доказати да је спољашња тангента кругова $\Omega_1$ и $\Omega_2$ паралелна са $AC$ и да садржи центар уписаног круга троугла $ABC$.

**393.** (а) Правилан петоугао има страницу дужине $a$ и дијагоналу дужине $b$. Доказати да је

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} = 3.$$

(б) Правилан седмоугао има страницу дужине $a$, краћу дијагоналу дужине $b$ и дужу дијагоналу дужине $c$ $(a < b < c)$. Доказати да је

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = 5.$$

**394.** Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао, такав да је $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Доказати да се нормале из тачке $A$ на праву $FB$, из тачке $C$ на праву $BD$ и из тачке $E$ на праву $DF$ секу у једној тачки.

**395.** Израчунати дужину полупречника лопте уписане у тространу пирамиду $SABC$, ако су ивице $SA$, $SB$ и $SC$ међусобно нормалне и $AB = BC = a$, $BS = b$.

**396.** Нека је $x \geqslant 1$ и $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, где је $\lfloor x \rfloor$ највећи цео број који није већи од $x$, а за $\{x\}$ важи $0 \leqslant \{x\} < 1$. Функција $f$ је дефинисана са

$$f(x) = \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor} + \sqrt{\{x\}}}{\sqrt{x}}.$$

Одредити најмањи број $z$ такав да је $f(x) \leqslant z$ за свако $x \geqslant 1$.

**397.** Нека је $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$ и $a_n = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}$. Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**398.** Доказати неједнакост $\sin^n(2x) + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leqslant 1$.

**399.** Одредити све функције $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ које задовољавају следеће услове:

(i) $f(1) + 1 > 0$;

(ii) $f(x+y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) - x - y + xy$, за све $x, y \in \mathbb{Q}$;

(iii) $f(x) = 2f(x+1) + x + 2$, за свако $x \in \mathbb{Q}$.

**400.** Бела раван је на произвољан начин попрскана црвеном бојом. Доказати да у тој равни постоји правоугли троугао чија је хипотенуза дужине 2010 и чија су сва темена исте боје.

**401.** Нека су $p$ и $q$ исказна слова. Низови исказних формула $(A_n), (B_n)$ задати су са: $A_0 = p$, $B_0 = (q \Rightarrow \neg p)$; $A_n = (\neg A_{n-1} \Rightarrow B_{n-1})$, $B_n = (A_{n-1} \underline{\vee} B_{n-1})$, $n \geqslant 1$. Испитати за које $n \in \mathbb{N}$ су формуле $A_n, B_n$ таутологије.

**402.** Нека је дат природан број $n$. Посматрајмо уређене парове $(u, v)$ природних бројева таквих да им је nzs једнак $n$. Доказати да је број таквих парова једнак броју позитивних делилаца броја $n^2$.

**403.** Нека су $K$ и $N$ средишта страница $AB$ и $CD$ четвороугла $ABCD$. Дужи $BN$ и $KC$ секу се у тачки $O$. Ако праве $AO$ и $DO$ деле дуж $BC$ на три једнака дела, доказати да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

**404.** У свако теме коцке је уписан по један цео број. Дозвољен потез је одабрати једно теме коцке са уписаним бројем $x$ и додати број $y$ који се налази на неком од три суседна темена. Доказати да је оваквим потезима могуће добити да сви бројеви дају исти остатак при дељењу са 2011.

**405.** Одредити $\min\limits_{z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \dfrac{\operatorname{Im} z^5}{\operatorname{Im}^5 z}$, као и све комплексне бројеве $z$ за које се тражени минимум постиже.

**406.** Одредити колико реалних решења има систем

$$\begin{aligned} \cos x_1 &= x_2, \\ \cos x_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \cos x_{n-1} &= x_n, \\ \cos x_n &= x_1. \end{aligned}$$

**407.** На једној вечери за округлим столом седи $n$ људи. Места за столом су нумерисана бројевима од 1 до $n$, у произвољном редоследу. Конобар креће да послужује присутне на следећи начин: одабира првог госта кога услужује, а затим се помера у смеру супротном од казаљке на сату за број места који је једнак редном броју места особе коју је непосредно пре тога услужио. Затим услужује госта код чијег се места тренутно налази, и тако докле год је то могуће, увек се крећући у истом смеру за број места који је једнак редном броју места госта кога је управо услужио. Одредити све природне бројеве $n$ за које постоји почетна нумерација места за столом тако да ће конобар, погодним одабиром првог госта кога послужује и поштујући поменуто правило, успети да услужи све госте.

**408.** Доказати да се сваки рационалан број из интервала $(0, 1)$ може написати у облику коначног збира међусобно различитих бројева облика $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

**409.** У равни су дате кружнице $k_1$ и $k_2$. Одредити геометријско место средишта свих дужи $MN$, при чему $M \in k_1, N \in k_2$.

**410.** Дат је полином $p$ са целобројним коефицијентима и цели бројеви $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$.

(а) Доказати да постоји цео број $a$ такав да $p(a_i)$ дели $p(a)$ за све $i = 1, 2, \ldots, k$.

(б) Да ли мора постојати цео број $a$ такав да производ $p(a_1) \cdot p(a_2) \cdot \ldots \cdot p(a_k)$ дели $p(a)$?

**411.** У свемиру (тј. тродимензионалном простору) је дато неколико планета сферног облика. Све планете су исте величине. Нека је $S$ скуп свих тачака на површини било које од планета које се не могу видети ни са једне друге планете (претпостављамо да су планете једини објекти у свемиру). Доказати да је површина скупа $S$ једнака површини једне планете.

**412.** Одредити све реалне бројеве $r$ такве да неједнакост

$$r(ab + bc + ca) + (3 - r)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$$

важи за све позитивне реалне бројеве $a, b, c$.

**413.** Нека је $A_1$ средиште ивице $BC$ троугла $ABC$. Ако је $\sphericalangle CAA_1 = 15^\circ$, одредити највећу могућу вредност $\sphericalangle ABC$.

**414.** Одредити све парове $(a, b)$ природних бројева такве да је $\dfrac{a^2(b-a)}{a+b}$ квадрат простог броја.

**415.** Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за свака два реална броја $x$ и $y$ важи

$$f(f(x) + xy) = f(x) \cdot f(y + 1).$$

**416.** У троуглу $ABC$ ($CA \neq CB$) права $CL$, $L \in AB$, је симетрала $\sphericalangle ACB$. Круг уписан у троугао $ABC$ додирује праве $AB$, $BC$, $CA$ у тачкама $M$, $N$, $P$, редом, а споља приписана кружница у односу на $C$ у тачкама $Q, L, K$, редом. Доказати да се кружнице описане око троуглова $PKL$, $NTL$ и $CMQ$ секу у једној тачки.

**417.** Бубамара шета ивицама квадрата произвољне странице који припадају датој квадратној мрежи димензија $25 \times 25$. Колико најмање квадрата она мора да обиђе да би сваку ивицу мреже прешла бар једном? Претпоставља се да бубамара прелети након сваког обиђеног квадрата до оног наредног.

**418.** Нека је $n$ природан број. Подскуп $A$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ зовемо *генеришућим* ако је

$$\{|x - y| : x, y \in A\} = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}.$$

(а) Доказати да постоји *генеришући* подскуп са највише $[2\sqrt{n}] + 1$ елемената.

(б) Да ли за свако $n$ постоји *генеришући* подскуп са највише $[\sqrt{2n}] + 2010$ елемената?

**419.** У троуглу $ABC$ са $R$ и $r$ означени су, редом, полупречник описаног и уписаног круга, а са $l_a, l_b, l_c$ одсечци симетрала унутрашњих углова. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r}{R}}.$$

**420.** Нека су $a$, $b$, $c$ позитивни бројеви. Ако са $A$, $G$ и $H$ означимо, редом, аритметичку, геометријску и хармонијску средину ових бројева, доказати да важи $2A + H \geqslant 3G$.

**421.** У правилном 2010-углу уочена су средишта свих страница и дијагонала. Колико највише уочених тачака може лежати на једном кругу?

**422.** На колико начина се $n$ нула и $m$ јединица могу поређати у низ тако да се на тачно $k$ места може уочити пар различитих суседних бројева?

**423.** У троуглу $ABC$ важи $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Нека су $M$ и $N$ средишта ивица $AB$ и $AC$ и нека је $\ell$ описани круг троугла $AMN$. Доказати да центар уписаног круга троугла $ABC$ припада кругу $\ell$.

**424.** Да ли постоји 30-цифрен природан број такав да је број добијен узимањем било којих 5 узастопних цифара тог броја (и спајањем истих у један број) дељив са 13?

**425.** Израчунати збир

$$\binom{2011}{1}3^{1005} - \binom{2011}{3}3^{1004} + \cdots + \binom{2011}{2009}3^1 - \binom{2011}{2011}.$$

**426.** Одредити све узајамно просте целе бројеве $b$ и $c$ за које квадратна једначина $x^2 + bx + c = 0$ има два различита реална корена $x_1$ и $x_2$ за које важи $x_1 = x_2^2 + x_2$.

**427.** Дат је троугао $ABC$. Нека је $G$ његово тежиште и тачке $M$, $N$ и $P$, редом, на страницама $AB$, $BC$ и $CA$ такве да је $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Означимо са $G_1$, $G_2$, $G_3$ тежишта троуглова $AMP$, $BMN$, $CNP$, редом. Доказати да за сваку тачку $D$ у равни троугла $ABC$ важе неједнакости

$$3DG < DG_1 + DG_2 + DG_3 < DA + DB + DC.$$

**428.** Доказати да је природан број $a$ потпун квадрат ако и само ако за сваки природан број $b$ постоји природан број $c$ такав да је $a + bc$ потпун квадрат.

**429.** Одредити све вредности реалног параметра $a$ за које једначина

$$\sin 2x \sin 4x - \sin x \sin 3x = a$$

има јединствено решење у интервалу $[0, \pi)$.

**430.** Дато је $\frac{n(n+1)}{2}$ новчића поређаних тако да образују једнакостраничан троугао (у првом реду 1, у другом 2, ... , у последњем $n$ новчића). На почетку су сви новчићи окренути на страну где је писмо. У једном потезу дозвољено је одабрати три суседна новчића који чине троугао и окренути их на другу страну. Одредити све природне бројеве $n$ за које је могуће на овај начин окренути све новчиће на страну где је глава.

**431.** Конструисати тетивни четвороугао такав да су му странице подударне датим дужима.

**432.** Одредити највећи природан број $n$ такав да систем једначина

$$(x+1)^2 + y_1^2 = (x+2)^2 + y_2^2 = \cdots = (x+k)^2 + y_k^2 = \cdots = (x+n)^2 + y_n^2$$

има бар једно целобројно решење $(x, y_1, \ldots, y_n)$.

**433.** Одредити бар једно бијективно пресликавање између скупова $[0, 1]$ и $(2010, +\infty)$.

**434.** У граду Мргудграду има $n \geqslant 4$ становника. Познато је да свака група од три становника овог града учествује у планирању завере против неког од преосталих суграђана. Доказати да постоји становник овог града против кога је бар $\sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$ суграђана умешано у планирање завере.

**435.** Одредити све природне бројеве $n$ који се не могу представити у облику $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$, $a, b \in \mathbb{N}$.

**436.** На пречнику $MN$ кружнице $k$ дата је тачка $A$ која није центар кружнице. Нека је $B$ произвољна тачка кружнице $k$, а $C$ тачка са исте стране пречника $MN$ таква да је $\sphericalangle NAB = \sphericalangle MAC$. Ако се тачка $B$ шета по кружници $k$, доказати да се све праве $BC$ секу у једној тачки.

**437.** Дати су реални бројеви $-1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant 1$. Доказати да важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 - a_i a_{i+1} - \sqrt{(1-a_i^2)(1-a_{i+1}^2)}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

**438.** Два круга различитих полупречника подељена су на 200 једнаких кружних исечака од којих је 100 обојено у црвено и 100 у бело. Затим је мањи круг постављен преко већег тако да им се центри поклапају. Доказати да се мањи круг може заротирати тако да се исечци поклопе и да се бар 100 исечака мањег круга налазе изнад исечака већег круга који су обојени истом бојом.

**439.** Доказати да постоји полином $p(x)$ степена 2010 са реалним коефицијентима, који има 2010 различитих реалних корена, такав да важи $p(x)p(4-x) = p(x(4-x))$.

**440.** Ако за реалне бројеве $a, b, c$ различите од 0 важи

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 4 \quad \text{и} \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 5,$$

израчунати вредност израза $\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{c^3} + \dfrac{c^3}{a^3}$.

**441.** Одредити све природне бројеве $a, b$ и просте бројеве $p$ за које важи $2^a + p^b = 19^a$.

**442.** Дат је оштроугли троугао $ABC$. Означимо са $B_1$ и $C_1$ подножја висина из темена $B$ и $C$. Нека је $D$ подножје нормале из $B_1$ на страницу $AB$ и $E$ пресечна тачка нормале из $D$ на $BC$ и висине $BB_1$. Доказати да је права $EC_1$ паралелна страници $AC$.

**443.** Два играча $A$ и $B$ играју следећу игру: $A$ и $B$ записују наизменично по једну цифру с лева удесно све док не напишу шестоцифрени број, при чему се ниједна цифра не сме поновити и прва цифра мора бити различита од 0. Играч $A$ игра први и побеђује уколико је написани шестоцифрени број дељив са 2, 3 или 5, а у супротном побеђује играч $B$. Доказати да играч $A$ има победничку стратегију.

**444.** Одредити све вредности реалног параметра $a$ за које неједначина

$$\sqrt{x - x^2 - a} + \sqrt{6a - 2x - x^2} \leqslant \sqrt{10a - 2x - 4x^2}$$

има јединствено решење.

**445.** Скицирати у $xOy$ равни скуп свих тачака $(x, y)$ које задовољавају услов

$$\operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{ctg}(x-y) = \operatorname{tg}(x-y) + \operatorname{ctg}(x+y).$$

**446.** Фигура се налази на произвољном пољу табле $2011 \times 2011$. Уколико се налази у $i$-тој колони фигура се потезом може преместити у произвољно поље $i$-тог реда. Доказати да у $2011^2$ потеза фигура може да обиђе целу таблу и врати се у почетно поље.

**447.** Угао између сваке две ивице које садрже теме $D$ тростране пирамиде $ABCD$ је $\alpha$, а угао између сваке две бочне стране које садрже $D$ је $\varphi$. Доказати да услов $\varphi = 2\alpha$ јединствено одређује углове $\alpha$ и $\varphi$.

**448.** Нека су $n$ и $k$ природни бројеви и $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Одредити број свих уређених $k$-торки $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, где су $A_i, i = 1, \ldots, k$, (не обавезно) дисјунктни подскупови од $S$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = S$.

**449.** Нека су $a$, $b$, $c$ позитивни реални бројеви чији је збир једнак 1. Доказати да важи неједнакост
$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leqslant 1.$$

**450.** На једном острву живе два племена. Чланови једног племена увек говоре истину, док чланови другог племена увек лажу. На једном састанку Великог Већа острва је било 2011 особа који су сели за округли сто произвољно. Након тога је свако од присутних изјавио: „Оба моја суседа за столом су из племена лажова". Сутрадан је на састанку један становник изостао због болести, па је свако од присутних опет насумично сео за округли сто и након тога изјавио: „Ниједан од мојих суседа није из мог племена". Из ког племена је особа која је изостала?

**451.** Низ $(a_n)$ дат је са
$$a_1=2,\quad a_{n+1}=\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}\ \text{ за }\ n\geqslant 2.$$
Доказати да важи $0{,}999<a_{2011}<1$.

**452.** Нека је $\mathcal{F}$ коначан скуп отворених дискова (кружна површ без кружнице) у равни који заједно покривају скуп тачака $E$. Доказати да постоји подскуп $\{D_1,\ldots,D_n\}\subset\mathcal{F}$ дискова који су у паровима међусобно дисјунктни, тако да унија $3D_1,\ldots,3D_n$ покрива $E$ ($3D$ је отворени диск са истим центром као и $D$ и 3 пута већим полупречником).

**453.** На располагању имамо неисправан калкулатор, при чему су једине дирке које раде исправно $\sin$, $\cos$, $\mathrm{tg}$, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\mathrm{tg}^{-1}$. На екрану је приказан број 0. Доказати да коначном применом ових операција можемо добити произвољан позитиван рационалан број $q$. Претпостављамо да калкулатор ради са реалним аргументима у радијанима, и то са бесконачном прецизношћу.

**454.** Дат је природан број $n$. У интервалу $(n^2,n^2+n)$ изабрана су два природна броја $a$ и $b$. Доказати да у том интервалу нема целобројних делилаца броја $ab$ различитих од $a$ и $b$.

**455.** Нека су $K$ и $L$ средишта дијагонала $AC$ и $BD$ четвороугла $ABCD$. Означимо пресеке праве $KL$ и страница $AD$ и $BC$ са $X$ и $Y$, редом. Доказати да се кружнице описане око троуглова $AKX$ и $BLY$ секу на страници $AB$.

**456.** На једном одбојкашком турниру учествује $2n+1$ тимова, при чему свака два тима играју тачно један међусобни меч. За три тима $A$, $B$, $C$ кажемо да чине *тријлет* ако је тим $A$ победио тим $B$, $B$ победио $C$ и $C$ победио $A$. Одредити минималан и максималан број *тријлета* (у зависности од $n$) међу овим тимовима.

**457.** (а) Доказати да постоји природан број $N$ такав да бројеви $N,2N,\ldots,2011N$ имају збир цифара дељив са 2011.

(б) Да ли постоји природан број $N$ такав да сви бројеви дељиви са $N$ имају збир цифара дељив са 2011?

**458.** Дата је диференцијабилна функција $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ за коју важи $|f'(x)|<1$ за свако $x\in\mathbb{R}$. Доказати да једначина $f(x)=x$ има јединствено решење у $\mathbb{R}$.

**459.** Уписани круг троугла $ABC$ додирује странице $AC$ и $BC$, $AC \neq BC$, у тачкама $P$ и $Q$. Спољa уписани кругови који одговарају страницама $AC$ и $BC$ додирују праву $AB$ у тачкама $M$ и $N$, редом. Одредити $\sphericalangle ACB$ ако су тачке $M$, $N$, $P$, $Q$ концикличне (припадају једном кругу).

**460.** Решити једначину $x^2 - 13[x] + 11 = 0$ у скупу реалних бројева.

**461.** На квадратну таблу димензија $29 \times 29$ постављено је, без преклапања, 99 квадрата димензија $2 \times 2$ тако да належу на јединична поља табле. Доказати да се, под истим условима, на таблу може ставити бар још један $2 \times 2$ квадрат.

**462.** Одредити све седмоцифрене бројеве који у свом декадном запису садрже само цифре 3 и 7 и дељиви су са 3 и 7.

**463.** Дат је правилан $2n$-тоугао са центром $S$. Посматрајмо све четвороуглове са теменима у теменима датог $2n$-тоугла. Означимо са $u$ број таквих четвороуглова који садрже тачку $S$ у својој унутрашњости, а са $v$ број преосталих четвороуглова. Израчунати $u - v$.

**464.** На страницама $AB$ и $BC$ конвексног четвороугла $ABCD$ дате су тачке $M$ и $N$ такве да сваки од сегмената $AN$ и $CM$ дели четвороугао на два дела једнаких површина. Доказати да дуж $MN$ полови дијагоналу $BD$.

**465.** Нека је $p(x)$ полином са целобројним коефицијентима. Доказати да постоји природан број $n$ такав да је број $p(1) + p(2) + \cdots + p(n)$ дељив са 2011.

**466.** Нека си $a, b, c, d$ цели бројеви. Одредити потребан и довољан услов да систем једначина

$$\begin{aligned} ax + by &= m, \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

има целобројна решења за све целе бројеве $m$ и $n$.

**467.** Дате су кружнице $k_1$ и $k_2$ које се секу. Означимо једну од пресечних тачака са $A$ и посматрајмо све правоугаонике $ABCD$ за које је $B \in k_1$ и $D \in k_2$. Одредити геометријско место тачака које описује тачка $C$ када тачке $B$ и $D$ описују кружнице $k_1$ и $k_2$, редом.

**468.** Доказати да у оштроуглом троуглу важи неједнакост

$$\sqrt{\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma} + \sqrt{\sin\beta \sin\gamma \cos\alpha} + \sqrt{\sin\gamma \sin\alpha \cos\beta} \leqslant \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

**469.** Да ли у равни постоји 9 тачака и $n$ правих таквих да се на свакој правој налазе тачно 3 од тих тачака, ако је:

(а) $n = 10$;

(б) $n = 11$?

**470.** Нека је $P$ произвољна тачка у унутрашњости троугла $ABC$. Означимо пресечне тачке правих $AP, BP, CP$ и страница троугла са $A', B', C'$, редом. Ако је $x = \dfrac{AP}{PA'}$, $y = \dfrac{BP}{PB'}, z = \dfrac{CP}{PC'}$, доказати да важи $xyz = x + y + z + 2$.

**471.** Доказати да се за свако $n$ број

$$\frac{1}{3} \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1$$

може приказати као збир два куба, али не и као збир два квадрата природних бројева.

**472.** Одредити све вредности реалног параметра $a$ за које је неједнакост

$$\log_{\frac{a+1}{a-1}}(x^2 - x + 1) < 1$$

тачна за све реалне бројеве $x$.

**473.** Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају услов

$$|f(x)| \leqslant 2011 \leqslant \left|\frac{xf(y) - yf(x)}{x - y}\right|$$

за све различите реалне бројеве $x, y$.

**474.** Доказати да је запремина тетраедра уписаног у ваљак јединичне запремине највише $\dfrac{2}{3\pi}$. Темена тетраедра припадају основи или омотачу ваљка.

**475.** Нека је $n$ природан број. Доказати да је могуће изабрати бар $2^{n-1} + n$ бројева из скупа $1, 2, \ldots, 2^n$ тако да за свака два различита изабрана броја $x$ и $y$, $x + y$ није делилац броја $xy$.

**476.** График функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има два центра симетрије. Доказати да се функција $f$ може приказати као збир једне линеарне и једне периодичне функције.

**477.** Унутар квадрата странице 38 смештено је 100 конвексних многоуглова, при чему је површина сваког од њих највише $\pi$, а обим највише $2\pi$. Доказати да унутар тог квадрата постоји круг полупречника 1 који нема заједничких тачака ни са једним многоуглом.

**478.** Дат је троугао $ABC$ и тачка $M$ која не лежи ни на једној висини тог троугла. Права кроз $M$ нормална на $AM$ сече праву $BC$ у тачки $A_1$. Тачке $B_1$ и $C_1$ дефинишу се аналогно. Доказати да су $A_1, B_1, C_1$ колинеарне тачке.

**479.** Пермутација $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ бројева $\{1, 2, \ldots, n\}$ је *квадратна* ако постоји бар један потпун квадрат међу бројевима $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Одредити све природне бројеве $n$ такве да је свака пермутација бројева $\{1, 2, \ldots, n\}$ *квадратна*.

**480.** У вестима је дата следећа временска прогноза за сутра:

1) биће облачно или ће падати снег или ће дувати ветар;
2) ако буде облачно са снегом, дуваће ветар;
3) ако не буде ветровито, биће облачно без снега.

Да ли се одатле може закључити да ће, ако буде падао снег, дувати ветар?

**481.** Дат је произвољан скуп од 2011 елемената. Колико има на том скупу дефинисаних релација које:

(а) су симетричне;
(б) су антисиметричне;
(в) су и симетричне и антисиметричне;
(г) нису ни симетричне ни антисиметричне?

**482.** Нека су $z_1, z_2, \ldots, z_{2011}$ комплексни бројеви модула 1 чији је збир 0 и $z \in \mathbb{C}$ произвољан. Изразити збир $\sum\limits_{k=1}^{2011} |z - z_k|^2$ у функцији од $z$.

**483.** На испиту је 21 ученик решавао три задатка. Први и други задатак решило је 6 ученика, други и трећи 7 ученика, а први и трећи 11 ученика. Показати да постоје бар два ученика који су решили сва три задатка и да постоји бар један ученик који је решио само један задатак.

**484.** Ако је $x > 0, x \neq 1$, израчунати вредност збира

$$\frac{1}{\log_x 2 \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \log_x 8} + \cdots + \frac{1}{\log_x 2^{2010} \log_x 2^{2011}}.$$

**485.** Основа косог паралелепипеда висине $H$ је квадрат странице $a$. Једна од бочних ивица гради са суседним ивицама основе оштре углове $\alpha$ и $\beta$. Наћи дужину бочне ивице и најдуже просторне дијагонале паралелепипеда.

**486.** Зарубљена купа пресечена је једном равни паралелно основама тако да је запремина преполовљена. Изразити полупречник $\rho$ пресечног круга преко полупречника основа $R$ и $r$.

**487.** Нека је у квадрату $ABCD$ тачка $E$ средиште странице $AB$. Тачке $F$ и $G$ леже на $BC$ и $CD$ тако да су праве $AG$ и $EF$ паралелне. Доказати да дуж $FG$ додирује кружницу уписану у квадрат $ABCD$.

**488.** Одредити константе $a$ и $b$ тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{4x}, & x < 0, \\ b^2x^2 + b(x+2), & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ e^{\frac{1}{2-x}} - 1, & x > 2, \end{cases}$$

буде непрекидна.

**489.** Дато је 2011 шибица произвољне дужине. Доказати да се највише две од њих могу преломити тако да се од свих добијених делова може саставити правоугаоник.

**490.** На продужетку странице $AC$ преко темена $C$ троугла $ABC$ ($AB > AC$) дата је тачка $B_1$ тако да важи $AB = AB_1$. Симетрала $\sphericalangle BAC$ сече $BC$ у $D$. Круг описан око троугла $B_1CD$ сече круг описан око троугла $ABC$ у тачки $E$. Доказати да је тангента круга описаног око троугла $B_1CD$ у тачки $E$ паралелна страници $AC$.

**491.** Доказати да за углове $\alpha, \beta, \gamma$ произвољног триедра важи

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}.$$

**492.** Доказати да једначина $x^7 + 92 = y^2$ нема решења у скупу целих бројева.

**493.** Нека је $P(x)$ полином степена $n$. Ако је $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ за $k = 0, 1, \ldots, n$, израчунати $P(m)$ за $m > n$.

**494.** Доказати да за прозивољне позитивне реалне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$ важи неједнакост

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Када важи једнакост?

**495.** Нека су $N$ и $S$ дијаметрално супротне тачке кружнице $\mathcal{C}$ и нека је $t$ тангента кружнице у тачки $S$. Нека је $k$ кружница са центром $O$, која кружницу $\mathcal{C}$ сече у тачкама $A$ и $B$ и ортогонална је на њу. Праве $NA$, $NB$ и $NO$ секу тангенту $t$ редом у тачкама $A'$, $B'$ и $O'$. Доказати да је тачка $O'$ средиште дужи $A'B'$.

**496.** У сваком врху правилног $n$-тоугла $A_1A_2\ldots A_n$ налази се одређени број новчића: у врху $A_k$ налази се тачно $k$ новчића, за свако $k = 1, 2, \ldots, n$. У сваком кораку вршимо следећу трансформацију: бирамо два новчића (не нужно из истог врха) и пребацујемо сваки од њих у суседни врх, тако да један померамо у смеру кретања казаљке на сату, а други у супротном смеру. Да ли је могуће постићи да након коначног броја корака за свако $k = 1, 2, \ldots, n$ у врху $A_k$ буде тачно $n + 1 - k$ новчића, ако је

(а) $n = 2010$;

(б) $n = 2011$?

**497.** Нека је $(a_n)_{n\geqslant 0}$ низ дефинисан са: $a_0 = 0, a_1 = 1$ и

$$\frac{a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}}{2} = (-1)^n,$$

за све природне бројеве $n$. Доказати да су сви чланови овог низа потпуни квадрати.

**498.** Нека је $\varphi(n)$ вредност Ојлерове функције броја $n$. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева $n$ за које је $\varphi(n) = \dfrac{n}{3}$.

**499.** Једнакокраки трапез чије су основице 1 и 5 и крак $\sqrt{7}$ прекривен је са 10 истих кругова полупречника $r$. Доказати да је $r \geqslant \frac{1}{2}$.

**500.** Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна ограничена функција. Доказати да за свако $a \neq 0$ постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да важи $f(x) = ax$.

**501.** Нека је $K$ тачка симетрична ортоцентру $H$ троугла $ABC$ у односу на средиште странице $BC$. Доказати да је $AK$ пречник круга описаног око троугла $ABC$.

**502.** У оштроуглом троуглу $ABC$ тачка $D$ је подножје висине из темена $C$ и важи $AD = BC$. Ако је $L$ подножје нормале из $D$ на висину из темена $A$, доказати да је $BL$ симетрала унутрашњег угла код темена $B$ троугла $ABC$.

**503.** Ако су $x_1, x_2$ корени једначине $x^2 + 2011x + 1 = 0$, а $x_1', x_2'$ корени једначине $x^2 + 2012x + 1 = 0$, израчунати $(x_1 - x_1')(x_2 - x_2')(x_1 - x_2')(x_2 - x_1')$.

**504.** Нека је пресликавање $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задато са $f(x) = x^2 + (a+1)x + 1$.

(а) Одредити све вредности реалног параметра $a$ такве да за све реалне бројеве $x$ важи $\left|\dfrac{f(x)}{x^2 + x + 1}\right| < 3$.

(б) Шта представља график функције $y = |f(x)|$, у зависности од реалног параметра $a$? Доказати да све тако добијене криве садрже фиксирану тачку.

(в) Одредити све вредности реалног параметра $a$ за које график функције $y = |f(x)|$ представља параболу и одредити геометријско место темена тих парабола.

**505.** Нека у тетраедру $ABCD$ важи $AB \perp CD$ и $AD \perp BC$.

(а) Доказати да важи $AC \perp BD$.

(б) Доказати да средишта свих ивица тетраедра припадају једној сфери и наћи њен центар.

**506.** Нека је $S$ центар уписаног круга троугла $ABC$. Изразити дужину дужи $AS$ у функцији страница $a$, $b$ и $c$ троугла.

**507.** Одредити угао између кривих $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = p^2$ и $y^2 = 2px$, где је $p$ реалан параметар.

**508.** Доказати да важи неједнакост $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$ за $x > 1$.

**509.** Нека су $a, b, c$ реални бројеви за које важи

$$a + b + c = 4,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 8.$$

Одредити све могуће вредности за $c$.

**510.** Пријатељице Ката и Ната играју игру тако да у сваком потезу, након што једна од њих каже број $k$, друга мора рећи неки број облика $a \cdot b$, при чему су $a$ и $b$ природни бројеви за које важи $a + b = k$. Игра се затим наставља на исти начин, од управо изреченог броја. Којим је све бројевима могла бити започета игра ако је након одређеног времена једна од њих рекла број 2011?

**511.** Под *тежиштем* система од $n$ тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ подразумевамо тачку $T$ која задовољава услов $\sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{TA_i} = \overrightarrow{0}$. Одредити највећи природан број $n$ такав да у равни постоји $n$ различитих тачака са целобројним координатама, при чему тежиште произвољне четворке тих тачака нема све координате целобројне.

**512.** Одредити све природне бројеве $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ који деле $(p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$, где је $p_1 p_2 \cdots p_k$ факторизација броја $n$ на просте, не обавезно различите факторе.

**513.** У зависности од реалног параметра $m$ решити једначину

$$x^4 - (2m+1)x^3 + (m-1)x^2 + (2m^2+1)x + m = 0.$$

**514.** Нека је $ABCD$ паралелограм такав да је $AC > BD$ и $O$ пресечна тачка дијагонала. Круг са центром $O$ и полупречником $OA$ пресеца продужетке страница $AD$ и $AB$ у тачкама $G$ и $L$ редом. Нека је $Z$ пресечна тачка правих $BD$ и $GL$. Доказати да је $\sphericalangle ZCA = 90°$.

**515.** Нека је $n$ природан број већи од 1 и $a$ ирационалан број. Доказати да је број $\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}$ такође ирационалан.

**516.** Израчунати производ $\sin\dfrac{\pi}{4022}\sin\dfrac{3\pi}{4022}\sin\dfrac{5\pi}{4022}\cdots\sin\dfrac{2009\pi}{4022}$.

**517.** Поља табле $m \times n$ обојена су у црно или бело. За црно поље ћемо рећи да је *заробљено* ако постоје бело поље лево од њега у истом реду и бело поље изнад њега у истој колони. Одредити број табли $2 \times n$ које немају *заробљених* поља.

**518.** У равни су дате тачке $A$ и $B$. Посматрајмо све трапезе $ABCD$ такве да су друга основица $CD$, као и збир кракова $AD + BC$ фиксиране дужине. Одредити геометријско место пресека дијагонала оваквих трапеза.

**519.** Да ли је за сваки низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ тачна еквиваленција

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 0?$$

**520.** Нека су $m_a, m_b, m_c$ тежишне дужи и $r_a, r_b, r_c$ полупречници одговарајућих споља приписаних кругова произвољног троугла $ABC$. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \leqslant \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}.$$

**521.** Одредити остатак при дељењу полинома $x^{2011}+1$ полиномом $(x+1)^2$.

**522.** Израчунати $[2011 \cdot \log_{10} 2] + [2011 \cdot \log_{10} 5]$, где је $[x]$ ознака за највећи цео број не већи од $x$.

**523.** На једном одбојкашком турниру учествовало је $n > 1$ екипа и сваке две екипе одиграле су тачно један међусобни меч. Доказати да је тимове могуће нумерисати бројевима $1, 2, \ldots, n$ тако да је тим нумерисан бројем $i$ победио у међусобном дуелу тим нумерисан бројем $i+1$, за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

**524.** У скупу од 17 особа свако познаје тачно четири особе међу преосталим (познанство је симетрично). Доказати да се међу тим особама могу пронаћи две које се не познају и немају заједничких пријатеља.

**525.** Дато је 2012 квадратних тринома са реалним коефицијентима који имају два реална корена, при чему разлика никоја два од њих нема реалне корене. Доказати да збир ових квадратних тринома има бар један реалан корен.

**526.** Доказати да за позитивне реалне бројеве $a, b, c, d$ који задовољавају услов $abcd = 1$ важи неједнакост

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \geqslant 4.$$

**527.** Одредити све троуглове чије су дужине страница природни бројеви и полупречник уписане кружнице једнак 1.

**528.** Одредити све реалне бројеве $x, y, z$ који задовољавају једначину ($a$ је целобројни параметар)

$$a(\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z) + 2(1-a)(\cos x + \cos y + \cos z) + 6 = 9a.$$

**529.** Одредити број путања дужине $n$ које спајају поља $(0,0)$ и $(a,b)$ јединичне квадратне мреже у равни, при чему је дозвољено кретање само дуж ивица јединичних квадрата мреже.

**530.** Дат је произвољан тетраедар $ABCD$. Означимо са $A'$ центар кружнице описане око троугла $BCD$, а са $\pi_A$ раван која садржи тачке $A$ и $A'$ и нормална је на раван троугла $BCD$. Аналогно конструишемо равни $\pi_B, \pi_C, \pi_D$. Доказати да се ове четири равни секу у једној тачки.

**531.** Да ли се број $3^{2^{2012}}$ може представити као збир три потпуна квадрата?

**532.** У једном врху коцке налазе се два паука, а у супротном врху мува. Пауци и мува крећу се искључиво по ивицама коцке једнаким константним брзинама. У сваком тренутку пауцима је позната позиција муве и муви је позната позиција паука. Доказати да пауци могу ухватити муву. Сматра се да је мува ухваћена ако се нађе у истој тачки као и један од паукова.

**533.** У равни су дати кружница $\mathcal{K}$ са центром $O$, права $p$ која са кружницом $\mathcal{K}$ нема заједничких тачака и на њој тачка $P$ за коју важи $OP \perp p$. Изаберимо произвољну тачку $X$ праве $P$, различиту од $P$. Тангенте из тачке $X$ на кружницу $\mathcal{K}$ додирују је у тачкама $A$ и $B$. Означимо са $C$ и $D$ пројекције тачке $P$ на правама $AX$ и $BX$ редом.

(а) Означимо пресечну тачку правих $AB$ и $OP$ са $Y$. Доказати да је положај тачке $Y$ независан од избора тачке $X$.

(б) Означимо пресечну тачку правих $CD$ и $OP$ са $Z$. Доказати да је $Z$ средиште дужи $PY$.

**534.** Колико нула има функција

$$f(x) = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n},$$

где су $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ произвољни реални бројеви?

**535.** У троуглу $ABC$ тачке $S$ и $S_a$ су центри редом уписаног и споља уписаног круга наспрам $A$, $E$ је пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена $A$ и странице $BC$ и $N$ је средиште лука $BC$ описаног круга који не садржи тачку $A$. Доказати да важи $AS \cdot AS_a = AE \cdot AN$.

**536.** Израчунати вредност израза ($x$ је произвољан реалан број)

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots - \cos 2010x + \cos 2011x.$$

**537.** У зависности од реалних параметара $m, n$ решити тригонометријску једначину

$$m \cos x = n \sin 2x.$$

**538.** Одредити граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{5^k}$.

**539.** Одредити све природне бројеве $n$ за које је полином $(x+1)^n - x^n - 1$ дељив полиномом $x^2 + x + 1$.

**540.** На колико начина можемо распоредити 25 различитих књига на 4 полице тако да се на свакој нађу бар 3 књиге, ако свака полица може издржати терет највише 12 књига?

**541.** Кошаркаш гађа кош четири пута. Вероватноћа поготка код сваког бацања је $\frac{1}{2}$. Ако промаши оба пута у прва два бацања, више се концентрише и у сваком следећем покушају погађа с вероватноћом $\frac{2}{3}$.

(а) Одредити расподелу вероватноћа броја погодака у четири бацања.

(б) Колика је вероватноћа да је кошаркаш погодио у трећем покушају ако се зна да је имао тачно три поготка?

**542.** Решити једначину $5x - 3y + 12z = 19$ у скупу целих бројева.

**543.** Нека је $D$ тачка на страници $BC$ оштроуглог троугла $ABC$, различита од темена $B$ и $C$. Означимо са $O_1$ и $O_2$ центре кружница описаних око троуглова $ABD$ и $ACD$, редом, а са $O$ центар кружнице описане око троугла $AO_1O_2$. Одредити геометријско место тачака које описује тачка $O$ када тачка $D$ описује страницу $BC$ (без темена $B$ и $C$).

**544.** Дат је правилан 980200-тоугао. Одабрано је неких његових 100 темена који одређују 100-тоугао $A$. Доказати да постоји 100 темена истог правилног 980200-тоугла који одредују 100-тоугао $B$ чија ниједна дијагонала није једнаке дужине као и нека дијагонала 100-тоугла $A$. Странице се такође сматрају дијагоналама.

**545.** Позитивни бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$ су такви да је $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ и

$$\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) q_{k+1} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{k} q_i\right) p_{k+1}$$

за сваки природан број $k, 1 \leqslant k < n$. Доказати да је $\sum_{i=1}^{k} p_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} q_i$ за сваки природан број $k, 1 \leqslant k < n$.

**546.** Одредити нуле полинома $P_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \in \mathbb{N}$, у скупу комплексних бројева.

**547.** Нека су $n$ и $k$ природни бројеви за које важи

$$n^k > (k+1)! \quad \text{и} \quad M = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid (\forall i) x_i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Доказати да међу сваких $(k+1)! + 1$ елемената из $M$ постоје два $(a_1, \ldots, a_k)$ и $(b_1, \ldots, b_k)$ таква да $(k+1)! \mid (a_1 - b_1) \cdots (a_k - b_k)$.

**548.** Одредити све вредности реалног параметра $a$ за које је број 2 најмањи цео број који је решење неједначине $\dfrac{x + \log_2(2^x - 3a)}{1 + \log_2 a} > 2$.

**549.** Буба се на почетку налази у тачки са координатама $\left(1, \sqrt{2}\right)$. У сваком потезу буба може са поља $(x, y)$ да скочи у било коју тачку $(x, 2x + y)$, $(x, y - 2x)$, $(x - 2y, y)$, $(x + 2y, y)$, али не сме да се врати у тачку у којој је била непосредно пре тог потеза. Да ли буба може после низа потеза да се врати у почетну тачку?

**550.** У равни $xOy$ дата је крива $\gamma$ својом параметризацијом $\gamma(t) = (\sin t, \ln(\operatorname{tg}(\frac{t}{2})) + \cos t)$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Доказати да је растојање сваке тачке криве до пресека тангенте на криву у тој тачки са $y-$осом константно.

**551.** Одредити све природне бројеве $n$ тако да $(k+1) \mid \binom{n}{k}$ за свако $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

**552.** Нека је $ABCD$ четвороугао уписан у кружницу $k(O,R)$, чије су дијагонале нормалне и секу се у тачки $S$. Означимо са $A', B', C'$ и $D'$ подножја нормала из тачке $S$ на странице $AB, BC, CD$ и $DA$, редом. Доказати да је четвороугао $A'B'C'D'$ тетивно-тангентни и изразити полупречнике описане и уписане кружнице у функцији полупречника $R$ и растојања $d = OS$.

**553.** Нека је $p$ прост број већи од 3. Доказати да једначина $(x+y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$ има решења у $\mathbb{Z}_p$ ако и само ако $3 \mid (p-1)$.

**554.** Играчи $A$ и $B$ наизменично замењују звездице у

$$\star 1 \star 2 \star 2^2 \star 2^3 \star \cdots \star 2^{999} \star 2^{1000}$$

знацима $+$ и $-$. Играч $B$ побеђује ако је по завршетку игре вредност добијеног израза дељива са 17. У супротном побеђује играч $B$. Ако $A$ игра први, како треба да игра да би сигурно победио?

**555.** У игри ЛОТО $7/39$, који део (у процентима, на две децимале) од укупног броја могућих комбинација чине комбинације у којима постоји пар суседних бројева?

**556.** За које вредности параметра $m$ се сва решења једначине $mx^4 - mx^2 + m + 1 = 0$ налазе у интервалу $(-1, 1)$.

**557.** Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ две пермутације скупа $\{1, 2, \ldots, 11\}$. Доказати да међу бројевима $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{11}b_{11}$ бар два имају исти остатак при дељењу са 11.

**558.** Нека је $A$ скуп који има 8 елемената. Одредити максималан број трочланих подскупова скупа $A$, таквих да пресек било која два од њих није двочлани скуп.

**559.** Квадрати $ABDE$ и $BCFG$ конструисани су у спољашњости троугла $ABC$. Доказати да је троугао $ABC$ једнакокрак ако је $DG \parallel AC$.

**560.** Ако полином $P(x)$ степена $n$ задовољава $P(k) = 2^k$ за $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, одредити $P(n+1)$.

**561.** Ако за реалне бројеве $a_1, a_2, \ldots$ важи $a_{n-1} + a_{n+1} \geqslant 2a_n$, за $n = 2, 3, \ldots$, доказати да важи неједнакост $A_{n-1} + A_{n+1} \geqslant 2A_n$, где је $A_k$ аритметичка средина бројева $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

**562.** Функција $f$, дефинисана за све реалне бројеве, задовољава $f(x) \leqslant x$ и $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ за све реалне бројеве $x, y$. Одредити све такве функције $f$.

**563.** Нека је $f(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + (n-1)^3 + (n-1)^2 + n$ за све природне бројеве $n$. Одредити минималну вредност за $f(n+1)/f(n)$.

**564.** Полукруг над страницом $BC$ троугла $ABC$ као пречником сече странице $AB$ и $AC$ троугла $ABC$ редом у тачкама $D$ и $E$. Нека су $F$ и $G$ подножја нормала из $D$ и $E$ на страницу $BC$, респективно. Нека је $M$ пресечна тачка дужи $DG$ и $EF$. Доказати да је $AM \perp BC$.

**565.** Доказати да се сваки цео број $k$ може представити на бесконачно много начина у облику $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm m^2$ за неки природан број $m$ и за неки избор знакова $+$ и $-$.

**566.** Нека је $A_1 = 0$ и $A_2 = 1$. За $n > 2$ број $A_n$ се добија тако што се цифре бројеа $A_{n-2}$ допишу с десне стране цифара броја $A_{n-1}$. На пример, $A_3 = 10$, $A_4 = 101$, $A_5 = 10110$, итд. Одредити све $n$ за које је $A_n$ дељиво са 11.

**567.** Дат је конвексан шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ чије су све странице једнаке и

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6,$$

при чему је $\alpha_i$ унутрашњи угао шестоугла код темена $A_i$. Доказати да је $\alpha_1 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_5$ и $\alpha_3 = \alpha_6$.

**568.** Одредити све узајамно просте природне бројеве $a$ и $b$ такве да важи: ако се децималном запису броја $a$ здесна допише зарез, а затим се напише децимални запис броја $b$, добија се децимални запис броја $\dfrac{b}{a}$.

**569.** Ако цео број $a$ није дељив са 5, тада се полином $p(x) = x^5 - x + a$ не може факторисати као производ два неконстантна полинома са целобројним коефицијентима. Доказати.

**570.** Нека су $x, y, z$ реални бројеви такви да је $x + y + z = 0$. Доказати да важи неједнакост

$$6\left(x^3 + y^3 + z^3\right)^2 \leqslant \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3.$$

**571.** Нека је $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ функција која има следеће особине:

- $f$ је строго растућа;
- $f(x) > -\dfrac{1}{x}$ за све $x > 0$;
- $f(x)f\left(f(x) + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ за све $x > 0$.

Одредити $f(1)$.

**572.** Дужине страница четвороугла су цели бројеви. Дужина сваке странице дели збир дужина преостале три странице. Доказати да две странице имају исту дужину.

**573.** Нека су $BB'$ и $CC'$ висине $\triangle ABC$ у коме је $AB \neq AC$. Нека је $M$ средиште странице $BC$, $H$ ортоцентар $\triangle ABC$ и $D$ пресек правих $B'C'$ и $BC$. Доказати да је $DH \perp AM$.

**574.** Нека су $I$ и $O$ редом центри уписаног и описаног круга троугла $ABC$. Ако троугао није једнакостраничан (тј. $I \neq O$), доказати да важи

$$\sphericalangle AIO \leqslant 90^\circ \quad \text{ако и само ако} \quad 2BC \leqslant AB + CA.$$

**575.** Нека је низ $a_1, a_2, \ldots$ дат са $a_1 = 2, a_2 = 5$ и $a_{n+2} = (2 - n^2)a_{n+1} + (2 + n^2)a_n$, за све $n \geqslant 1$. Да ли постоје природни бројеви $p, q, r$ такви да је $a_p a_q = a_r$?

**576.** Ако је $p > 3$ прост број, доказати да се број $p^n$ не може представити као збир два позитивна куба ни за јено $n \geqslant 1$. Да ли тврђење важи и за $p = 2$ и $p = 3$?

**577.** Одредити највећи природан број $n$ који има особину да је дељив свим природним бројевима који нису већи од $\sqrt[3]{n}$.

**578.** Колико има $n$-тоцифрених бројева написаних коришћењем цифара $1, 2$ и $3$ код којих се две суседне цифре могу разликовати највише за $1$?

**579.** Једна група људи присуствује журци. За неку особу из ове групе кажемо да је *стидљива* ако она у тој групи има највише три пријатеља. Познато је да свака особа у групи има бар три стидљива пријатеља.

(а) Доказати да су све особе у овој групи људи стидљиве.

(б) Колико особа може бити у групи?

НАПОМЕНА: пријатељство је симетрична релација.

**580.** Нека су $a, b, c$ природни бројеви такви да је $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$ и $\mathrm{nzd}(a, b, c) = 1$. Доказати да је $a + b$ потпуни квадрат.

**581.** Одредити све полиноме чији су сви коефицијенти $\pm 1$ и који има све реалне нуле.

**582.** Нека су реални бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ такви да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} = 0$. Доказати да важи

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\big(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}\big).$$

**583.** Нека је шестоугао $ABCDEF$ уписан у круг. Доказати да се дијагонале $AD$, $BE$ и $CF$ секу у једној тачки ако и само ако је $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

**584.** Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 2$ постоји пермутација $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$, таква да $p_{k+1}$ дели збир $p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ за $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

**585.** Низ $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ дефинисан је на следећи начин: $u_0 = u_1 = u_2 = 1$, а следећи чланови одређени су условом $u_{n+3}u_n - u_{n+2}u_{n+1} = n!, n \geqslant 0$. Доказати да $u_n \in \mathbb{Z}$ за све $n \in \mathbb{N}_0$.

**586.** Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све реалне бројеве $x$ и $y$ важи

$$f\big(xf(y) + x\big) = xy + f(x).$$

**587.** Нека је $s(n)$ проценат погођених слободних бацања једне кошаркашке екипе у првих $n$ покушаја од почетка сезоне. У једном делу сезоне је $s(n)$ био мањи од $80\%$ од $n$, али је на крају сезоне је $s(n)$ био већи од $80\%$ од $n$. Да ли је морао постојати тренутак током сезоне у ком је $s(n)$ био једнак тачно $80\%$ од $n$?

**588.** Дат је алфабет који има само три слова, $a, b, c$. Колико има речи дужине $n$ у којима се слово $a$ јавља паран број пута?

**589.** Дате су $4$ некомпланарне тачке у простору, такве да никоје три од њих нису колинеарне. За раван $\pi$ кажемо да је „интересантна" ако су све $4$ тачке на истом растојању од равни $\pi$. Колико има „интересантних" равни?

**590.** Одредити све вредности реалног параметра $m$ тако да неједнакост

$$\sqrt{5x^2 + mx + 2} > 1 + 2x$$

важи за сваки реалан број $x$.

**591.** Дат је низ $(x_n)$: $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}$. Одредити, ако постоји, реалан број који је мањи од свих чланова датог низа са парним индексима $(x_2, x_4, x_6, \ldots)$ и већи од свих чланова са непарним индексима $(x_1, x_3, x_5, \ldots)$.

**592.** Доказати да се сваки природан број може приказати као збир једног или више бројева облика $2^r 3^s$, где су $r, s$ ненегативни цели бројеви и ниједан сабирак не дели остале сабирке.

**593.** Нека је $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ полином са целобројним коефицијентима. Претпоставимо да је је $r$ рационалан број такав да је $P(r) = 0$. Доказати да су следећи бројеви:

$$c_n r, \quad c_n r^2 + c_{n-1} r, \quad c_n r^3 + c_{n-1} r^2 + c_{n-2} r, \quad \ldots, \quad c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \cdots + c_1 r$$

сви цели.

**594.** Дато је $2n$ различитих бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Табела $n \times n$ попуњава се тако што се у поље које се налази у $i-$тој врсти и $j-$тој колони уписује збир $a_i + b_j$. Ако су производи бројева у свим колонама једнаки, доказати да су тада и производи бројева у свим врстама једнаки.

**595.** Кружнице $S_1$ и $S_2$ са центрима у $O_2$ и $O_2$, респективно, секу се у тачкама $A$ и $B$. Полуправа $O_1B$ сече $S_2$ у тачки $F$, а полуправа $O_2B$ сече $S_1$ у тачки $E$. Права кроз тачку $B$ паралелна дужи $EF$ сече $S_1$ и $S_2$ у тачкама $M$ и $N$, респективно. Доказати да је $B$ центар уписане кружнице $\triangle EAF$ и да је $MN = AE + AF$.

**596.** Одредити ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

(а) $\min\limits_{a,b} \max\limits_{x\in[-1,1]} |x^2 + ax + b|$;

(б) $\min\limits_{a,b,c} \max\limits_{x\in[-1,1]} |x^3 + ax^2 + bx + c|$.

**597.** У троуглу $ABC$ права $EF$ је симетрала $\sphericalangle BAC$ и $AE \cdot AF = AB \cdot AC$. Одредити геометријско место пресека дужи $BE$ и $CF$.

**598.** Да ли постоји низ природних бројева у ком се сваки природан број појављује тачно једном и у ком је за свако $k = 1, 2, \ldots$ збир првих $k$ бројева дељив са $k$?

**599.** Квадрати $ABDE$ и $ACFG$ нацртани су ван $\triangle ABC$. Нека су $P$ и $Q$ тачке на $EG$ такве да су дужи $BP$ и $CQ$ ортогоналне на $BC$. Доказати да је $BP + CQ \geqslant BC + EG$. Када важи једнакост?

**600.** Два мудраца играју следећу игру. Написани су бројеви $0, 1, 2, \ldots, 1024$. Први прецртава $512$ бројева по избору, други прецртава $256$ од преосталих, затим први прецртава $128$ од преосталих итд. У десетом кораку други мудрац прецртава $1$ број и остају два. После тога други мудрац плаћа првом онолико динара колико износи разлика преостала два броја. Колико ће платити други мудрац првом ако оба играју на најбољи начин?

# Глава 2

# Решења

**1**. Бројеви који задовољавају услове задатка могу се представити у облику

$$n = \sum_{t=0}^{k-1} 10^{2t},$$

где је $k > 1$ број јединица у декадном запису броја $n$.

Ако је $k$ паран број, тада је $n$ дељив са 101, и $n$ је прост само за $k = 2$, тј. $n = 101$.

Приметимо да је за сваки природан број $k$

$$11n = 11 \sum_{t=0}^{k-1} 10^{2t} = \overline{11\ldots1} = \sum_{s=0}^{2k-1} 10^s.$$

За непаран број $k = 2p + 1$ имамо

$$11n = 11 \sum_{s=0}^{4p+1} 10^s = \left( \sum_{s=0}^{2p} 10^s \right) \cdot \left( 10^{2p+1} + 1 \right).$$

Ако је $k > 1$, тада је $p \geqslant 1$ и оба фактора са десне стране последње једнакости су већа од 11, тако да број $n$ не може бити прост. Дакле, једини прост број траженог облика је број 101.

**2**. Како $x$ дели и $s(x, y)$ и $x^2$, на основу дате једнакости следи да $x$ дели и $4y$. Стога је број $4y$ заједнички садржалац бројева $x$ и $y$, па $s(x, y) \in \{y, 2y, 4y\}$.

(1) Нека је $s(x, y) = y$, односно $y = kx$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Замењујући ово у једначини добијамо $x^2 = 4kx + 3kx$, одакле је $x = 7k$, и $y = 7k^2$. Како је $s(7k, 7k^2) = 7k^2$, за свако $k$, сви парови облика $(7k, 7k^2), k \in \mathbb{N}$, јесу решења.

(2) Нека је $s(x, y) = 2y$, односно $2y = kx$, за неко непарно $k$ (ако би $k$ било парно, тада би $x \mid y$, што је први случај). Замењујући ово у једначини добијамо $x^2 = 2kx + 3kx$, одакле је $x = 5k$ и $2y = 5k^2$, а ово противуречи чињеници да је $k$ непарно.

(3) Нека је $s(x,y) = 4y$, односно $y = kx$, за неко непарно $k$ (ако би $k$ било парно, тада би важило или $x \mid y$ или $x \mid 2y$, а ти случајеви су већ разматрани). Замењујући ово у једначини добијамо $x^2 = kx + 3kx$, одакле је $x = 4k$, и $y = k^2$. Како је $s(4k, k^2) = 4k^2$, за свако непарно $k$, сви парови облика $(4k, k^2)$, где је $k$ непаран природан број, јесу решење.

**3**. Како је

$$\begin{aligned}4 &= \{x\}^2\big(x+[x]\big)^2 + [x]^2\big(x+\{x\}\big)^2 - 2[x]^2\{x\}^2\\ &= x^2\{x\}^2 + 2x[x]\{x\}^2 + \{x\}^2[x]^2 + [x]^2x^2 + 2x\{x\}[x]^2 + [x]^2\{x\}^2 - 2[x]^2\{x\}^2\\ &= x^2\big(\{x\}^2+[x]^2\big) + 2x\{x\}[x]\big(\{x\}+[x]\big) = x^2\big(\{x\}^2+[x]^2\big) + 2x^2\{x\}[x]\\ &= x^2\big(\{x\}^2 + 2\{x\}[x] + [x]^2\big) = x^2\big(\{x\}+[x]\big)^2 = x^4,\end{aligned}$$

дата једнакост се може записати у облику $x^4 = 4$, па су једини реални бројеви који је задовољавају $x = \pm\sqrt{2}$.

**4**. Поређајмо јабуке по тежини у неопадајући поредак и нумеришимо их бројевима од 1 до 300. Јабуке распоређујемо на следећи начин: у $k$-ти пакет стављамо јабуке са бројевима $k$ и $301-k$. Уочимо два произвољна пакета. Нека се у првом налазе јабуке са тежинама $a$ и $d$, а у другом са тежинама $b$ и $c$ и при томе је $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. На основу услова задатка важе неједнакости:

$$a + d \leqslant c + 2b \leqslant 1{,}5(c+b) \quad \text{и} \quad b + c \leqslant 2a + d \leqslant 1{,}5(a+d),$$

што је и требало показати.

**5**. Нека је $\overline{0{,}a_1a_2a_3\ldots}$ разломак формиран на описани начин. Посматрајмо 101 пар узастопних цифара тога разломка: $(a_1,a_2),(a_2,a_3),\ldots,(a_{101},a_{102})$. Укупан број могућих различитих парова цифара је 100, па по Дирихлеовом принципу, међу посматраним паровима постоје два идентична пара $(a_i,a_{i+1})$ и $(a_j,a_{j+1})$, тј. таква да је $a_i = a_j$ и $a_{i+1} = a_{j+1}$. Нека је $j > i$. Како сваке две узастопне цифре једнозначно одређују следећу, то је низ цифара иза децималног зареза периодичан.

**6**. По условима задатка имамо да важе следеће једнакости:

$$x_0^2 + a_1x_0 + b_1 = 0, \quad x_0^2 + a_2x_0 + b_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_0^2 + a_nx_0 + b_n = 0.$$

Њиховим сабирањем добијамо

$$nx_0^2 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x_0 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = 0,$$

одакле лако закључујемо да је $x_0$ један корен датог тринома. Из тога следи да је дискриминанта ненегативна и да постоји други реалан корен, који ћемо означити са $\widetilde{x}$. На основу Виетових формула је

$$x_0 + x_1 = -a_1, \ \ldots, \ x_0 + x_n = -a_n \quad \text{и} \quad x_0 + \widetilde{x} = -\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n).$$

Множењем последње једнакости са $n$ и заменом $-a_i$ са $x_0 + x_i$, $i = 1,\ldots,n$, добијамо $\widetilde{x} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

**7**. Полазни систем је еквивалентан са

$$(x_1-1)+(x_2-1)+\cdots+(x_{2005}-1)=0,$$
$$x_1^3(x_1-1)+x_2^3(x_2-1)+\cdots+x_{2005}^3(x_{2005}-1)=0.$$

Одузимајући од друге једначине прву добијамо

$$(x_1^3-1)(x_1-1)+(x_2^3-1)(x_2-1)+\cdots+(x_{2005}^3-1)(x_{2005}^2+x_{2005}+1)=0,$$

односно

$$(x_1-1)^2(x_1^2+x_1+1)+(x_2-1)^2(x_2^2+x_2+1)+\cdots+(x_{2005}-1)^2(x_{2005}-1)=0.$$

Како је $x^2+x+1>0$ за свако $x$, то је $x_k=1$, за све $k=1,\ldots,2005$.

**8**. Доказаћемо прво десну неједнакост. Уочимо прво следеће чињенице.

(а) Како је $2k=(1+1)\cdot k$ и $2k+1=(1+1)\cdot k+1$, то је

$$f(2k)\leqslant f(k)+2 \quad \text{и} \quad f(2k+1)\leqslant f(k)+3.$$

(б) $3<5\log_3 2$ важи ако и само ако је $3^2<2^5$.

Сада дајемо доказ индукцијом по $n$. База индукције следи из еквиваленција

$$f(2)<5\log_2 3 \Leftrightarrow 2<5\log_2 3 \Leftrightarrow 3^2<2^5,$$
$$f(3)<5\log_3 3 \Leftrightarrow 3<5\log_3 3 \Leftrightarrow 3<5.$$

Претпоставимо да тврђење важи за све целе бројеве веће или једнаке 2, а мање од $n$. Тада је за $n=2k$ и $n=2k+1$ $(2\leqslant k<n)$, на основу (а) и (б),

$$f(n)\leqslant f(k)+3<5\log_3 k+3<5\log_3 k+5\log_3 2=5\log_3 2k,$$

одакле је $f(n)\leqslant 5\log_3 n$, чиме је доказ завршен.

Леву неједнакост, такође, доказујемо индукцијом. База индукције следи из еквиваленција

$$f(2)\geqslant 3\log_3 2 \Leftrightarrow 2\geqslant 3\log_3 2 \Leftrightarrow 3^2\geqslant 2^3, \quad f(3)\geqslant 3\log_3 3 \Leftrightarrow 3\geqslant 3.$$

Претпоставимо да тврђење важи за све целе бројеве веће или једнаке 2, а мање од $n$ $(n\geqslant 4)$. Нека је сада $n=a\cdot b$ и нека је то последња извршена операција при израчунавању броја $n$ уз коришћење најмањег могућег броја јединица. Тада је

$$f(n)=f(a)+f(b)\geqslant 3\log_3 a+3\log_3 b=3\log_3 n.$$

Слично је, за $n=a+b$, где су $a$ и $b$ већи од 1,

$$f(n)=f(a)+f(b)\geqslant 3\log_3 a+3\log_3 b\geqslant 3\log_3(a+b),$$

одакле је $f(n)\geqslant 3\log_3 n$. Сада је довољно посматрати случај $n=(n-1)+1$. Имамо да је

$$f(n)=f(n-1)+1\geqslant 3\log_3(n-1)+1=3\log_3\sqrt[3]{3}(n-1).$$

Довољно је доказати да је $\sqrt[3]{3}(n-1)\geqslant n$, што је еквивалентно са $(\sqrt[3]{3}-1)n\geqslant\sqrt[3]{3}$, а ово је тачно за сваки природан број већи од 3.

**9**. Уведимо смену $\operatorname{tg}\alpha = x$. Тада је $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{x}$, па једначина постаје

$$x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3} = 70.$$

Уводећи сада смену $x + \dfrac{1}{x} = y$ имамо $y^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$, тј. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$, $y^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \dfrac{1}{x} + 3x \cdot \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, тј. $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = y^3 - 3y$, одакле следи

$$y + (y^2 - 2) + (y^3 - 3y) = 70, \quad \text{тј.} \quad (y-4)(y^2 + 5y + 18) = 0.$$

Како је за свако реално $y$ трином $y^2 + 5y + 18$ ненегативан, следи да је $y = 4$, односно $x + \dfrac{1}{x} = 4$. Дакле, $\operatorname{tg}\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$, тј. $(\alpha, \beta) \in \{(15^\circ, 75^\circ), (75^\circ, 15^\circ)\}$.

**10**. Нека је $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $CL = l_c$. Како је $S(ABC) = S(ALC) + S(BLC)$, то је

$$\frac{1}{2} l_c a \sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} l_c b \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} ab \sin\gamma,$$

одакле је $l_c = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$. Међутим, $h_a = b\sin\gamma$ и $h_b = a\sin\gamma$, па је

$$\frac{l_c}{h_c} + \frac{l_c}{h_b} = \frac{2a\cos\frac{\gamma}{2}}{(a+b)\sin\gamma} + \frac{2b\cos\frac{\gamma}{2}}{(a+b)\sin\gamma} = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Следи да је $\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{2}$, тј. $\gamma = 60^\circ$, јер је $\dfrac{\gamma}{2} < 90^\circ$. Нека $CL$ сече кружницу описану око троугла $ABC$ у тачки $M$. Тада је $OM \perp AB$. Међутим, $CH \perp AB$, па је $\sphericalangle OMC = \sphericalangle MCH$. С друге стране је $OM = OC = R$ ($R$ је полупречник описане кружнице). Према томе, $\sphericalangle OMC = \sphericalangle OCM = \sphericalangle MCH$. Нека је $H_2$ подножје висине из $B$. Из троугла $HCH_2$ се добија да је $CH = \dfrac{CH_2}{\sin\alpha}$ (јер је $\sphericalangle H_2HC = 90^\circ - \sphericalangle ACH = \sphericalangle CAB = \alpha$). Међутим, због $CH_2 = a\cos\gamma$, имамо $CH = \dfrac{a}{\sin\alpha}\cos\gamma = 2R\cos\gamma$ (на основу синусне теореме). Како је $\gamma = 60^\circ$, то је $CH = R$. Посматрајмо сада троуглове $COI$ и $CHI$. Како тачка $I$ лежи на $CM$, то је $\sphericalangle OCI = \sphericalangle HCI$. Штавише, $CO = R = CH$. Следи да су троуглови $COI$ и $CHI$ подударни, одакле је $OI = IH$, што је и требало показати.

**11**. Претпоставимо да постоји $N$, $N \geqslant 5$, међусобно пријатељских троуглова $T_1, T_2 \ldots, T_N$. Нека $\triangle T_1$ има странице $a, b, c$. Од ових страница могу се оформити само три пара:

$$(a,b), (b,c), (c,a), \tag{2.1}$$

а сваки од троуглова $T_2, T_3 \ldots, T_N$ мора имати пар страница који се подудара са једним од парова из (2.1). Стога, постоје бар два троугла међу троугловима $T_2, T_3 \ldots, T_N$ чији се један пар страница подудара са истим паром из (2.1). Без губитка општости узмимо да троуглови $T_2$ и $T_3$ имају пар $(a,b)$. Дакле, сваки од троуглова $T_1$, $T_2$, $T_3$

има странице $a$, $b$, и нека су $x$, $y$, $z$ треће странице ових троуглова респективно ($x$, $y$, $z$ су међусобно различите, јер у супротном има подударних троуглова међу $T_1$, $T_2$ и $T_3$). Како је $\triangle T_4$ пријатељски са $\triangle T_1$, једна од његових страница једнака је $a$ или $b$, и узмимо да је једнака $a$. Ако троугао $T_4$ нема страницу једнаку $b$, тада две његове преостале странице морају узети три различите вредности $x$, $y$, $z$ ($\triangle T_4$ има по две једнаке странице са сваким од троуглова $T_1$, $T_2$ и $T_3$), што је немогуће. Према томе, $\triangle T_4$ има странице $a$ и $b$. Исти закључак можемо извести за сваки $\triangle T_i$, $i = \overline{5, N}$. Дакле, сваки од троуглова $T_1, T_2 \ldots, T_N$ има странице $a$ и $b$, тј. овај скуп троуглова је добар. Према томе, $N \geqslant 5$. С друге стране постоје четири међусобно пријатељска троугла $(a, b, c)$, $(a, b, d)$, $(b, c, d)$, $(c, d, a)$ таква да њихов скуп није добар. Дакле, $N = 5$.

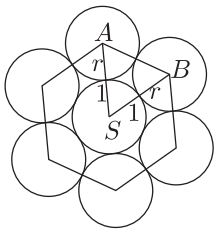
**12**. Означимо темена новог квадрата са $A$, $B$, $C$ и $D$, у правцу кретања казаљке на сату. Размотрићемо два случаја.

Први случај: суседна темена су пала у целобројне тачке. Без умањивања општости, узмимо да су то тачке $A$ и $B$. Тада вектор $\overrightarrow{AB}$ има целобројне координате, и нека су оне $(m, n)$. Следи да вектор $\overrightarrow{BC}$ има координате $(n, -m)$, па је он такође целобројан. Дакле, и тачка $C$ је целобројна. Аналогно се доказује и за тачку $D$.

Други случај: несуседна темена падају у целобројне тачке, и нека су то $A$ и $C$. Уведимо координантни систем са центром у $A$, и координантним осама паралелним осама полазног система. Нека тачка $C$ има координате $(m, n)$. Тада тачка $D$ има координате $(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2})$. Приметимо да су $m + n$ и $m - n$ бројеви исте парности. Ако су оба парна, тада је и тачка $D$ целобројна, па се разматрање своди на први случај. Ако су оба непарна, тада $(m + n)^2 + (m - n)^2$ даје остатак 2 при дељењу са 4, па квадрат дужине странице $AD$ једнак $\frac{(m+n)^2}{4} + \frac{(m-n)^2}{4}$ није цео број, што је немогуће према условима задатка.

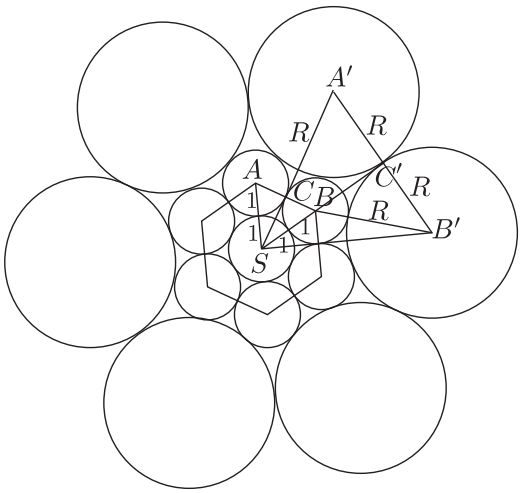
Према томе, ако два темена падну у целобројне тачке и друга два темена су у целобројним тачкама.

**13**. Полупречник сваког од шест кругова око централног очигледно мора бити једнак полупречнику централног круга, дакле, $r = 1$ (слика 2.1).




Слика 2.1.

Остаје да одредимо полупречник $R$ већих кругова.




Слика 2.2.

Како су $\triangle SBC$ и $\triangle SB'C'$ слични (слика 2.2), имамо

$$\frac{|SC'|}{|SC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = R. \tag{2.2}$$

Користећи једнакости $|SC'| = |SB| + |BC'| = 2 + \sqrt{(R+1)^2 - R^2} = 2 + \sqrt{2R+1}$ и $|SC| = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, из (2.2) добијамо $R = \dfrac{2+\sqrt{2R+1}}{\sqrt{3}}$, а одатле квадратну једначину $3R^2 - 2(1+2\sqrt{3})R + 3 = 0$, чија су решења

$$R_{1,2} = \frac{1+2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{1+\sqrt{3}}}{3}.$$

Пошто је $R > 1$ следи да је $R = \dfrac{1+2\sqrt{3}+2\sqrt{1+\sqrt{3}}}{3}$.

**14**. Нека је $P$ тачка пресека висина $A_1B_1, \ldots, A_{2n}B_{2n}$ датог многоугла (слика 2.3).

Нека је $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ скаларни производ вектора $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{y}$ над пољем реалних бројева у $\mathbb{R}^2$. Уведимо ознаке: $\overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{PA_{2n+1}} = \overrightarrow{a}_{2n+1}$. Тада је $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}} = \overrightarrow{a}_{n+2} - \overrightarrow{a}_{n+1}, \ldots$ и по претпоставци,

$$(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_{n+2} - \overrightarrow{a}_{n+1}) = 0,\ (\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_{n+3} - \overrightarrow{a}_{n+2}) = 0,\ \ldots,$$
$$(\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{a}_{2n+1} - \overrightarrow{a}_{2n}) = 0,\ \ldots, (\overrightarrow{a}_{2n}, \overrightarrow{a}_n - \overrightarrow{a}_{n-1}) = 0,$$

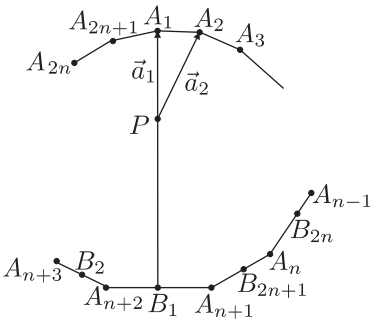
односно,

$$(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_{n+2}) = (\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_{n+1}),\ (\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_{n+3}) = (\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_{n+2}),\ \ldots,$$
$$(\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{a}_{2n+1}) = (\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{a}_{2n}),\ \ldots, (\overrightarrow{a}_{2n}, \overrightarrow{a}_n) = (\overrightarrow{a}_{2n}, \overrightarrow{a}_{n-1}).$$

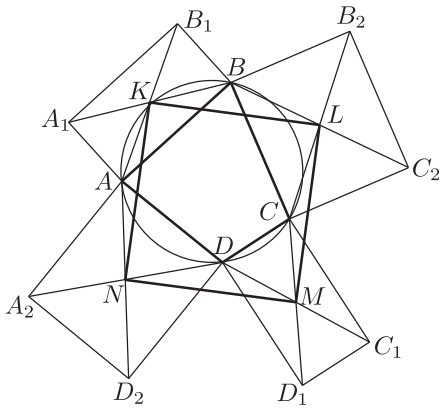
Одавде је

$$(\overrightarrow{a}_{2n+1}, \overrightarrow{a}_n) = (\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{a}_{2n}) = (\overrightarrow{a}_{2n}, \overrightarrow{a}_{n-1})$$
$$= (\overrightarrow{a}_{n-1}, \overrightarrow{a}_{2n-1}) = \cdots = (\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_{n+1}) = (\overrightarrow{a}_{n+1}, \overrightarrow{a}_{2n+1}),$$

тј. $(\overrightarrow{a}_{2n+1}, \overrightarrow{a}_n) = (\overrightarrow{a}_{2n+1}, \overrightarrow{a}_{n+1})$ или $(\overrightarrow{a}_{2n+1}, \overrightarrow{a}_{n+1} - \overrightarrow{a}_n) = 0$, одакле следи $A_{2n+1}P \perp A_nA_{n+1}$, тј. $(2n+1)$-ва висина пролази кроз тачку $P$.




Слика 2.3.




Слика 2.4.

**15**. Означимо са $K, L, M$ и $N$ центре правоугаоника конструисаних над страницама $AB$, $BC, CD$ и $DA$ редом (слика 2.4).

Како су правоугаоници конструисани над наспрамним страницама четвороугла $ABCD$ подударни, важи $\sphericalangle KAA_1 = \sphericalangle DCM$, $\sphericalangle NAA_2 = \sphericalangle LCB$. С обзиром на то да је $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^0$ важи и $\sphericalangle A_1AA_2 = \sphericalangle BCD$. Сада се лако доказује подударност троуглова $KAN$ и $LCM$ (СУС), па је $KN = LM$. Слично, из подударности троуглова $KBL$ и $NDM$ следи да је $KL = NM$, па је $KLMN$ паралелограм. Стога је $\sphericalangle KLM = \sphericalangle KNM$, па сабирањем једнакости $\sphericalangle KLM = \sphericalangle BLC + \sphericalangle KLB + \sphericalangle CLM$ и $\sphericalangle KNM = \sphericalangle AND - \sphericalangle KNA - \sphericalangle DNM$ добијамо

$$2\sphericalangle KLM = (\sphericalangle CLM - \sphericalangle KNA) + (\sphericalangle KLB - \sphericalangle DNM) + (\sphericalangle BLC - \sphericalangle AND) = 180^\circ,$$

одакле следи да је $\sphericalangle KLM = 90^\circ$, односно да је $KLMN$ правоугаоник.

**16**. Нека су $E$ и $F$ средишта дужи $QN$ и $PM$ респективно (слика 2.5). Уведимо ознаке $a = BC, b = AC, c = AB$. Имамо да је $AN : NC = c : a, PH : CP = AH : b$. Како су троуглови $CHA$ и $ACB$ слични, следи да је $AH : b = b : c$, па је $PH : CP = b : c$.

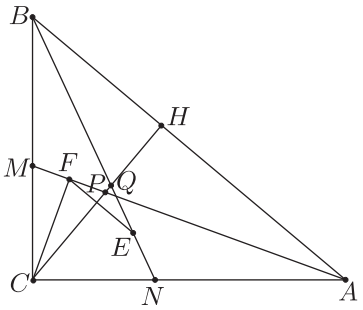
Како је $CH = \dfrac{ab}{c}$, имамо

$$\frac{ab}{c} = CH = CP + PH = CP\left(1 + \frac{PH}{CP}\right) = CP\left(1 + \frac{b}{c}\right) = CP\frac{b+c}{c},$$

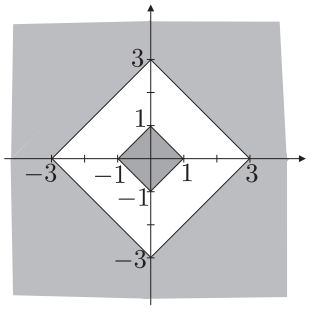
стога је $CP = \dfrac{ab}{b+c}$. С друге стране је,

$$a = CM + MB = CM\left(1 + \frac{MB}{CM}\right) = CM\left(1 + \frac{c}{b}\right) = CM\frac{b+c}{b},$$

па је $CM = \dfrac{ab}{b+c}$. Према томе, у $\triangle MCP$ странице $CM$ и $CP$ су једнаке, па је $CF \perp MQ$. Стога је $\sphericalangle CFM = \sphericalangle CFP = 90°$, па се тачке $C$, $F$, $H$, $A$ налазе на истом кругу. Ово нам даје $\sphericalangle FCH = \sphericalangle FAH = \sphericalangle FAC = \sphericalangle FHC$. Према томе, $\triangle CFH$ је једнакокрак и $FC = FH$. Стога се тачка $F$ налази на симетрали дужи $CH$. Аналогно претходном можемо показати да се и тачка $E$ налази на симетрали дужи $CH$. Стога је $EF \perp CH$, а то повлачи да је $EF \parallel AB$.




Слика 2.5.




Слика 2.6.

**17**. Полазна неједначина је еквивалентна са

$$|x| + |y| - 2 \geqslant 1 \quad \text{или} \quad |x| + |y| - 2| \leqslant -1,$$

односно са

$$|x| + |y| \geqslant 3 \quad \text{или} \quad |x| + |y| \leqslant 1.$$

Одредимо прво скуп тачака које задовољавају једначину $|x| + |y| = k, k \in \mathbb{N}$. Разматрамо четири случаја (решавамо дату једначину засебно у сваком квадранту):

1) $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \Rightarrow x + y = k$;
2) $x \leqslant 0,\ y \geqslant 0 \Rightarrow -x + y = k$;
3) $x \leqslant 0,\ y \leqslant 0 \Rightarrow -x - y = k$;
4) $x \geqslant 0,\ y \leqslant 0 \Rightarrow x - y = k$.

Дакле, тачаке које задовољавају једначину $|x| + |y| = k$ су на страницама квадрата са теменима $(k, 0)$, $(0, k)$, $(-k, 0)$, $(0, -k)$. Сада овај резултат примењујемо на наш проблем. Једначину $|x| + |y| \geqslant 3$ задовољавају тачке које су или ван или на страницама квадрата са теменима $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(-3, 0)$, $(0, -3)$, а једначину $|x| + |y| \leqslant 1$ задовољавају тачке које су или унутар или на страницама квадрата са теменима $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Стога је скуп решења неједначине $||x| + |y| - 2| \geqslant 1$ унија те две облати (осенчени део слике 2.6).

**18**. За $z = x + iy$ имамо

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2+y^2},$$

односно

$$\left|\frac{1}{z} - i\right|^2 = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+2y+1}{(x^2+y^2)^2}.$$

Стога важи

$$\left|\frac{1}{z} - i\right|^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2y+1}{(x^2+y^2)^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2y+1 \leqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Дакле, скуп решења су сви комплексни бројеви $z$ који задовољавају $\operatorname{Im} z \leqslant -\frac{1}{2}$.

**19**. Из дате једначине се види да је област вредности функције $f$ цео скуп $\mathbb{R}$. Даље, ако је $f(a) = f(b)$, онда је

$$2 - a = f(f(a)) = f(f(b)) = 2 - b,$$

тј. $a = b$. Дакле, $f$ је бијекција скупа $\mathbb{R}$ на скуп $\mathbb{R}$. Према томе, постоји инверзна функција $f^{-1}$. Сада можемо закључити да је $f(f(x)) = 2 - x$ еквивалентно са $f(x) = f^{-1}(2-x)$, а ово (замењујући $x$ са $2-x$) са

$$f(2-x) = f^{-1}(x). \tag{2.3}$$

Ако је $\Gamma$ график функције $f$, тада је $S_l(\Gamma)$ график функције $f^{-1}$, где је $S_l$ симетрија у односу на праву $l$ дату једначином $y = x$, а $S_y \circ T_a(\Gamma)$ график функције $f(2-x)$, где је $T_a$ транслација за вектор $\overrightarrow{a} = (-2, 0)$, а $S_y$ симетрија у односу на $y$-осу (јер је $f(2-x)$ добијена из $f(x)$ низом трансформација $f(x) \to f(2+x) \to f(2-x)$). На основу (2.3), може се написати $S_l(\Gamma) = S_y \circ T_a(\Gamma)$, одакле је $\Gamma = (S_l \circ S_y) \circ T_a(\Gamma)$. Приметимо да је $S_l \circ S_y = R_O^{-90^\circ}$ – ротација око координантног почетка за $90^\circ$ у смеру кретања казаљке на сату. Даље је $R_O^{-90^\circ} \circ T_a = R_A^{-90^\circ}$ – ротација око тачке $A(1,1)$ за $90^\circ$ у смеру кретања казаљке на сату. Дакле, $R_A^{-90^\circ}(\Gamma) = \Gamma$, што је и требало доказати.

**20**. а) Могуће је. Можемо узети

$$A = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right) \cup \left[\frac{15}{16}, \frac{31}{32}\right) \cup \cdots$$

и

$$B = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \cap \left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right) \cap \left[\frac{31}{32}, \frac{63}{64}\right) \cap \cdots$$

и функцију $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

б) Није могуће. Претпоставимо да имамо скупове $A$ и $B$ и функцију $f$ са траженим својством. Како је $f(x) \neq x$, то је $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$. Следи да непрекидна функција $g(x) = f(x) - x$ у крајњим тачкама затвореног интервала $[0, 1]$ узима вредности различитог знака. Подсетимо се да често уз дефиницију непрекидне функције кажемо да се њихови графици могу нацртати једним потезом (не одвајајући оловку од папира). Према томе, ако функција $g$ у крајњим тачкама узима вредности различитог знака, њен график мора сећи $Ox$ осу, тј. постоји $a \in [0, 1]$ такво да је $g(a) = 0$, односно $f(a) = a$, што је контрадикција.

**21**. Прву једначину датог система можемо записати и у облику

$$[x] + \{x\} - [y] - \{y\} = 2005,$$

одакле следи $\{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$, тј. $\{x\} = \{y\}$, због $0 \leqslant \{x\}, \{y\} < 1$, па је

$$\begin{aligned} [x] - [y] &= 2005, \\ [x] + [y] &= 2007, \end{aligned}$$

тј. $[x] = 2006$ и $[y] = 1$. Дакле, дати систем има бесконачно много решења и $\mathcal{R} = \{(2006 + \omega, 1 + \omega) \mid 0 \leqslant \omega < 1\}$.

**22**. Како је $9^{10} = (10 - 1)^{10} \equiv 1 \pmod{100}$, то је $9^{10q+r} \equiv 9^r \pmod{100}$. Како је $9^9 \equiv 9 \pmod{10}$, то је $9^{9^9} \equiv 9^9 \equiv 89 \pmod{100}$. Према томе, последње две цифре броја $9^{9^9}$ су 8 и 9.

**23**. Претпоставимо да је $\dfrac{m}{n} = k$ цео број. Пошто је $m \neq n$ имамо да је $k \geqslant 2$. Највећи број датог типа је $M = 77665544332211$, а најмањи $N = 11223344556677$. Тада је

$$77665544332211 \geqslant m = nk \geqslant k \cdot 11223344556677. \tag{2.4}$$

Збир цифара бројева $m$ и $n$ је $2(1+2+3+4+5+6+7) = 56$. Како је $56 = 9 \cdot 6 + 2$ и како природан број и збир његових цифара дају исти остатак при дељењу са 9, имамо да је $m = 9u + 2$ и $n = 9v + 2$, за неке природне бројеве $u$ и $v$. Али, како је $m = kn$ тада из једнакости $9u + 2 = k \cdot (9v + 2)$ добијамо да је $9(u - kv) = 2(k - 1)$, одакле следи да $9 \mid (k - 1)$. Пошто је $k - 1 \neq 0$, имамо да је $k \geqslant 10$, што је немогуће због неједнакости (2.4).

**24**. Није тешко видети да је $\mathrm{nzs}(a, b) \geqslant 2a, \mathrm{nzs}(b, c) \geqslant 2b, \mathrm{nzs}(c, d) \geqslant 2c, \mathrm{nzs}(d, e) \geqslant 2d$ и $b \geqslant 2, c \geqslant 3$.

Нека је $c = 3$. Тада, ако је $d = 4$, имамо $\mathrm{nzs}(a, b) = 2, \mathrm{nzs}(b, c) = 6, \mathrm{nzs}(c, d) = 12$, $\mathrm{nzs}(d, e) \geqslant 8$, па је

$$S = \frac{1}{\mathrm{nzs}(a, b)} + \frac{1}{\mathrm{nzs}(b, c)} + \frac{1}{\mathrm{nzs}(c, d)} + \frac{1}{\mathrm{nzs}(d, e)} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} < \frac{15}{16}.$$

Уколико је $d \geqslant 5$, тада је $\mathrm{nzs}(c, d) \geqslant 6$ и $\mathrm{nzs}(d, e) \geqslant 10$, па је

$$S \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{14}{15} < \frac{15}{16}.$$

Нека је $c \geqslant 4$. Ако је $5 \leqslant d \leqslant 7$, тада $\mathrm{nzs}(c,d) \in \{20, 28, 35, 42\}$, осим за $c = 4$ и $d = 6$, па је у тим случајевима

$$S \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10} < \frac{15}{16}.$$

За $c = 4$ и $d = 6$, имамо

$$S \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{11}{12} < \frac{15}{16}.$$

Ако је $d \geqslant 8$, тада је

$$S \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Једнакост се постиже за $a = 1, b = 2, c = 4, d = 8, e = 16$.

**25**. Како је

$$(x+2)^4 - x^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 8x + 16 - x^4 = 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)$$

закључујемо да је $y = 2z, z \in \mathbb{Z}$, и $z^3 = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$. За $x \geqslant 0$ важи

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < z^3 < x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3,$$

па је $x + 1 < z < x + 2$, што је немогуће. У случају $x \leqslant -2$, односно $-x - 2 \geqslant 0$, уводимо смену $x_1 = -x - 2$, $y_1 = -y$, која полазну једначину трансформише у $(x_1 + 2)^4 - x_1^4 = y_1^3$. Последња једначина, као што смо већ видели, нема решења за $x_1 \geqslant 0$. Дакле, једино решења је $x = -1, y = 0$.

**26**. Без губитка општости можемо претпоставити да је $x \geqslant y \geqslant z$. Тада је

$$3x^3 \geqslant x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2,$$

односно

$$3x \geqslant ny^2z^2. \tag{2.5}$$

Такође је $x^2(ny^2z^2 - x) = y^3 + z^3 \geqslant 2$, одакле следи $ny^2z^2 - x \geqslant 1$. Поред тога, $(y^3 - 1)(z^3 - 1) \geqslant 0$ имплицира

$$1 + y^3z^3 \geqslant y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2 - x^3 = x^2(ny^2z^2 - x) \geqslant x^2. \tag{2.6}$$

На основу (2.5) и (2.6) добијамо

$$9(1 + y^3z^3) \geqslant x^2 \geqslant n^2y^4z^4. \tag{2.7}$$

Ако је $yz = 1$, добијамо $y = z = 1$. Тада неједнакост $1 + y^3z^3 \geqslant x^2$ имплицира $x = 1$. Директном провером се показује да је $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ решење за случај $n = 3$. Ако је $yz > 1$, тада важи $y^4z^4 > 1 + y^3z^3$. Последња неједнакост заједно са (2.7) даје $9 > n^2$, па је $n = 1$ или $n = 2$. За $n = 1$ имамо решење $(x, y, z) = (3, 2, 1)$. За $n = 2$ неједнакост $9(1 + y^3z^3) \geqslant x^2 \geqslant n^2y^4z^4 = (4yz)y^3z^3$ имплицира $yz \leqslant 2$. Тада је $y = 2$, $z = 1$. У том случају полазна једначина постаје $x^3 + 9 = 8x^2$, а она нема решења у скупу природних бројева. Дакле, $n \in \{1, 3\}$.

**27**. Решења су:

(а) $a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{2n-1}a_{2n}$;

(б) $a_1a_{2n} + a_2a_{2n-1} + \cdots + a_na_{n+1}$;

(в) $(a_1 + a_{2n}) \cdot (a_2 + a_{2n-1}) \cdot \ldots \cdot (a_n + a_{n+1})$;

(г) $(a_1 + a_2) \cdot (a_3 + a_4) \cdot \ldots \cdot (a_{2n-1} + a_{2n})$.

Докази су аналогни, па ћемо доказати само б). За $n = 2$ важи $a_1a_4 + a_2a_3 \leqslant a_1a_2 + a_3a_4$, јер је $a_4(a_3 - a_1) + a_2(a_1 - a_3) = (a_3 - a_1)(a_4 - a_2) \geqslant 0$. Овај случај нам већ наговештава коначно решење. Показаћемо да је увек подесније груписати $a_1$ и $a_{2n}$ (најмањи и највећи број) у један пар него их комбиновати са било којим другим бројевима $a_k$ и $a_l$. Заиста, $a_1a_{2n} + a_ka_l \leqslant a_1a_k + a_{2n}a_l$, јер је $(a_l - a_1)(a_{2n} - a_k) \geqslant 0$. Стога најмањи збир производа има облик $a_1a_{2n} + a_2a_{2n-1} + \cdots + a_na_{n+1}$.

**28**. Ако $a, b \in (0, 1)$, тада је $ab < 1$, па због $\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)^2 \leqslant ab$, важи и $k = \dfrac{2ab}{a+b} < 1$. Даље, због

$$\log_k(ab) \leqslant \log_k \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 = \log_k k^2 = 2$$

и неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо да је

$$1 \geqslant \left(\frac{1}{2}\log_k(ab)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\log_k a + \frac{1}{2}\log_k b\right)^2 \geqslant \log_k a \cdot \log_k b.$$

Најзад, пошто је $\log_k a = \dfrac{1}{\log_a k}$, имамо $1 \geqslant \dfrac{1}{\log_a k \cdot \log_b k}$, тј. $\log_a k \cdot \log_b k \geqslant 1$.

**29**. Доказ ћемо извести индукцијом. Како је $a_1 \geqslant 1$, за $n = 1$ неједнакост је очигледно испуњена. Претпоставимо да неједнакост важи за првих $n$ чланова низа и докажимо да онда она важи и за првих $n + 1$ чланова низа. Како је

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^3,$$

довољно је доказати да је

$$a_{n+1}^3 \geqslant a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \text{тј.} \quad a_{n+1}^2 - a_{n+1} \geqslant 2\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Да бисмо доказали последњу неједнакост приметимо да је

$$a_{k+1} + a_k \leqslant (a_{k+1} + a_k)(a_{k+1} - a_k) = a_{k+1}^2 - a_k^2.$$

Када $k$ у последњој неједнакости узме све вредности од 0 до $n$, добијамо $n + 1$ неједнакости чијим сабирањем добијамо

$$a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}^2 - a_k^2) = a_{n+1}^2,$$

што је и требало доказати.

**30**. Треба одредити највећи природан број $n$ такав да је

$$100 \leqslant c < cq < cq^2 < \cdots < cq^{n-1} \leqslant 1000,$$

при чему је, због услова задатка, $c \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}$ и $q > 1$. Нека је $q = \dfrac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, a > b$, $\mathrm{nzd}(a, b) = 1$. Тада $b^{n-1} \mid c$. Није тешко видети да треба узети да је $a = b+1$. Дакле, треба одредити највећи природан број $n$ такав да постоје $c, b \in \mathbb{N}$ такви да је

$$100 \leqslant c < c\left(\frac{b+1}{b}\right) < \cdots < c\left(\frac{b+1}{b}\right)^{n-1} \leqslant 1000 \quad \text{и} \quad b^{n-1} \mid c.$$

Ако је $b = 1$, тада је

$$1000 \geqslant c\left(\frac{b+1}{b}\right)^{n-1} = c \cdot 2^{n-1} \geqslant 100 \cdot 2^{n-1},$$

па је $n \leqslant 4$.

Ако је $b = 2$, тада је

$$1000 \geqslant c\left(\frac{b+1}{b}\right)^{n-1} = c \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geqslant 100 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

па је $n \leqslant 6$.

Ако је $b \geqslant 3$, тада је $\dfrac{c}{b^{n-1}} \geqslant 1$, јер је $c \geqslant b^{n-1}$, па је

$$1000 \geqslant c\left(\frac{b+1}{b}\right)^{n-1} \geqslant (b+1)^{n-1} \geqslant 4^{n-1},$$

па је $n \leqslant 5$.

Низ дужине 6: $128, 192, 288, 432, 648, 972$ ($c = 128$, $q = 3/2$) задовољава услове задатка, па је решење $n = 6$.

**31**. Особину (в) можемо записати и као $P(1) = 4$. Приметимо да на основу (в), (г), (д) и (ђ) важи $P(-1) = 0 = 2 \cdot (-1) + 2$, $P(1) = 4 = 2 \cdot 1 + 2$, $P(2) = 6 = 2 \cdot 2 + 2$, $P(3) = 8 = 2 \cdot 3 + 2$. На основу овога можемо закључити да постоји полином $Q(x)$, такав да је $P(x) = Q(x) + 2x + 2$, за који је испуњено $Q(-1) = Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$. Стога се $Q(x)$ може записати у облику

$$Q(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)R(x),$$

па имамо

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)R(x) + 2x + 2.$$

Ако желимо да полином $P$ буде најмањег могућег степена онда полином $R$ мора бити најмањег могућег степена. Ако је $R$ нултог степена, онда мора бити $R = 200$ због особине (а). У том случају особина (б) није задовољена, јер

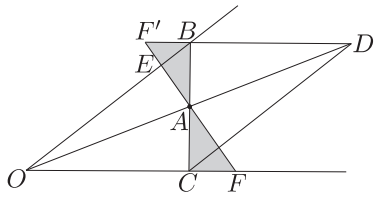
$$200 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) + 2 \neq 2.$$

Нека је сада $R$ првог степена. Због (а) полином $R$ мора бити облика $R(x) = 200x + b$. У овом случају је $P(0) = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) + 2 = 2 - 6b$. Остаје нам да проверимо две могућности. Ако је нулти степен најнижи степен, онда је $2 - 6b = 2$, тј. $b = 0$. У овом случају имамо

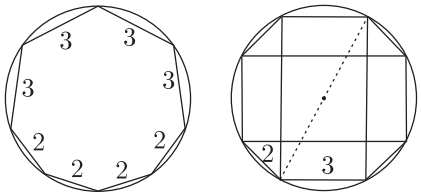
$$P(x) = 200x^5 - 1000x^4 + 1000x^3 + 1000x^2 - 1198x + 2,$$

што јесте решење проблема. С друге стране, ако нулти степен није најнижи степен (када је коефицијент уз нулти степен нула), онда је $2 - 6b = 0$, тј. $b = \frac{1}{3}$. У овом случају је коефицијент уз најнижи степен $a_1 = -2000 + \frac{5}{3} + 2 \neq 2$, па особина б) није испуњена. Стога је решење проблема јединствено.

**32**. Доказаћемо да одсечак између тачака пресека тражене праве са крацима угла треба да се полови у тачки $A$. Уочимо троугао $DBC$ чија страница $BC$ пролази кроз тачку $A$ и при томе је $BA = CA$ (слика 2.7). Уочимо и троугао $OEF$ чија страница $EF$ пролази кроз тачку $A$ ($OE < OB$). Доказаћемо да је $P_{OEF} > P_{BOC}$. Како је $P_{AFC} = P_{AF'B}$ (тачка $F'$ је таква да је одсечак $BF'$ паралелан и једнак $CF$), следи $P_{ABE} < P_{AFC}$. Према томе, $P_{OEF} = P_{OBC} - P_{AEB} + P_{ACF} > P_{OBC}$. Дакле, троугао $OBC$ има најмању површину. За конструкцију нам је потребна тачка $D$ таква да $D \in OA$ и $OA = AD$. У пресеку праве која пролази кроз $D$ и паралелна је са $OF$ добијамо тачку $B$, а затим $AB \cap OF = \{C\}$.




Слика 2.7.




Слика 2.8.

**33**. Површина датог осмоугла на слици 2.8 лево једнака је површини осмоугла на слици 2.8 десно. Дакле,

$$P = 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 13 + 12\sqrt{2}.$$

**34**. Поделимо јединични круг на 6 једнаких исечака (сваки са централним углом од $60°$). Приметимо да се сваке две тачке из истог исечка налазе на растојању не већем од 1. Нека су $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ бројеви тачака по исечцима (овде подразумевамо да се тачка може наћи само у једном исечку). Тада је $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 212$. Сада је $C_2^{a_i} = \dfrac{a_i(a_i+1)}{2}$ парова тачака на растојању не већем од 1 у сваком од исечака. Како је функција $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$ конвексна на $\mathbb{R}$ ($f''(x) = 1$), на основу Јенсенове неједнакости, број парова тачака чије је растојање највише 1 је најмање

$$C_2^{a_1} + C_2^{a_2} + C_2^{a_3} + C_2^{a_4} + C_2^{a_5} + C_2^{a_6} \geqslant 6f\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6}\right) = 3639\frac{1}{3}.$$

Дакле, постоји 2006 парова ових тачака које су на раздаљини не већој од 1.

**35**. На основу познате формуле за полупречник уписаног круга (слика 2.9) имамо

$$r_1 = \frac{2P_{SAB}}{SA+SB+AB}, \qquad r_2 = \frac{2P_{SBC}}{SB+SC+BC},$$

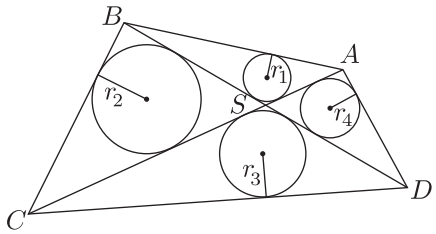
$$r_3 = \frac{2P_{SCD}}{SC+SD+CD}, \qquad r_4 = \frac{2P_{SDA}}{SD+SA+DA}.$$

Пошто је $SB = SD$, површине троуглова $SAB$ и $SAD$ су једнаке, а исто важи и за површине троуглова $SBC$ и $SCD$. Зато имамо

$$\begin{aligned} |r_1 - r_4| &= 2P_{SAB}\left|\frac{1}{SA+SB+AB} - \frac{1}{SA+SD+AD}\right| \\ &= \frac{2P_{SAD}|AB-AD|}{(SA+SB+AB)(SA+SD+AD)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Остаје да оценимо вредност разломка у (2.8). Производ дужина двеју страница ма ког троугла је увек већи или једнак његовој површини, па је тако (због $SB = SD$)

$$\begin{aligned} &(SA+SB+AB)(SA+SD+AD) \\ &= (SA+SB)^2 + AB\cdot SA + AD\cdot SA + AB\cdot SB + AD\cdot SD + AB\cdot AD \\ &\geqslant 8P_{SAB} + 2P_{SAB} + 2P_{SAD} + 2P_{SAB} + 2P_{SAD} + P_{DAB} = 20P_{SAB} \end{aligned}$$

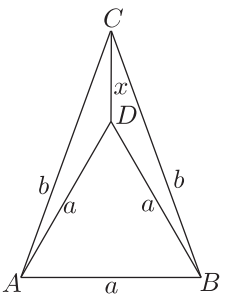



Слика 2.9.

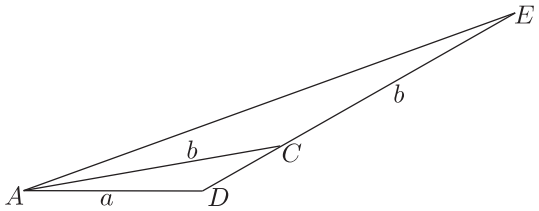
Из (2.8) следи да је $|r_1 - r_4| \leqslant \frac{1}{10}|AB - AD|$. Аналогно је $|r_2 - r_3| \leqslant \frac{1}{10}|CB - CD|$. Пре него што саберемо ове две неједнакости, приметимо да за овакав четвороугао важи $AB > AD$ ако и само ако $CD > CB$, па закључујемо да је

$$\begin{aligned} |r_1 - r_2 + r_3 - r_4| \leqslant |r_1 - r_4| + |r_2 - r_3| &\leqslant \frac{1}{10}(|AB-AD| + |CB-CD|) \\ &= \frac{1}{10}|AB - AD + CD - CB|. \end{aligned}$$

**36**. Нека је троугао $ABD$ једнакостраничан и $CD = x$ (слика 2.10). Тада је $\sphericalangle ADC = 150^\circ$, $\sphericalangle ACD = 20^\circ$ и $\sphericalangle CAD = 10^\circ$.




Слика 2.10.




Слика 2.11.

На основу косинусне теореме примењене на троугао $ACD$ добијамо

$$b^2 = a^2 + x^2 + ax\sqrt{3} \quad (\text{јер је } \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}). \tag{2.9}$$

Продужимо дуз $DC$ за $CE = b$ (слика 2.11) Троуглови $ACD$ и $ADE$ су слични, па је $x : a = a : (x + b)$, тј.

$$x^2 = a^2 - bx. \tag{2.10}$$

Сменом (2.10) у (2.9) добијамо

$$x = \frac{b^2 - 2a^2}{a\sqrt{3} - b}. \tag{2.11}$$

Сада, на основу (2.10) и (2.11) добијамо тражену једнакост $a^3 + b^3\sqrt{3} = 3ab^2$.

**37**. Прво ћемо доказати да је

$$L = a\cos^2\frac{\alpha}{2} + b\cos^2\frac{\beta}{2} + c\cos^2\frac{\gamma}{2} = s\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

Како је

$$a\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}(1 + \cos\alpha) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\alpha = \frac{a}{2} + \frac{R}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a}{2} + \frac{R}{2}\sin 2\alpha,$$

следи

$$L = \frac{a+b+c}{2} + \frac{R}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

Поред тога важи и

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 4\frac{a}{2R}\frac{b}{2R}\frac{c}{2R} = \frac{1}{2}\frac{4PR}{R^3} = 2\frac{sr}{R},$$

па добијамо

$$L = s + \frac{R}{2}\cdot\frac{sr}{R} = s\left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

Посебан случај Коши–Шварцове неједнакости је $(x+y+z)^2 \leqslant 3(x^2+y^2+z^2)$. Применивши последњу неједнакост на $(x,y,z) = \left(\sqrt{a}\cos\frac{\alpha}{2}, \sqrt{b}\cos\frac{\beta}{2}, \sqrt{c}\cos\frac{\gamma}{2}\right)$ добијамо

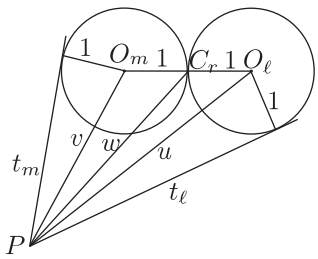
$$\left(\sqrt{a}\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{b}\cos\frac{\beta}{2} + \sqrt{c}\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 \leqslant 3\left(a\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \sqrt{c}\cos^2\frac{\gamma}{2}\right),$$

одакле коренованьем, уз коришћење првог резултата, добијамо

$$\sqrt{a}\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{b}\cos\frac{\beta}{2} + \sqrt{c}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \sqrt{3s\left(1+\frac{r}{R}\right)}.$$

Једнакост важи само у случају једнакостраничног троугла.

**38**. Уочимо сфере $\mathcal{S}_\ell$ и $\mathcal{S}_m$ које се додирују у тачки $C_r$. Уствари, посматраћемо раван која садржи $P$ и центре $O_\ell$ и $O_m$ тих сфера (слика 2.12). Тачка $C_r$ је такође припада тој равни, јер лежи на правој која спаја центре сфера.




Слика 2.12.

Дужи $PO_m, PC_r, PO_\ell$ означаваћемо краће са $v, w, u$, респективно. На основу Питагорине теореме важи $v^2 = t_m^2 + 1$ и $u^2 = t_\ell^2 + 1$, па је $u^2 + v^2 = t_\ell^2 + t_m^2 + 2$. Применом Аполонијеве теореме[1] на троугао $PO_mO_\ell$ добијамо $u^2 + v^2 = 2w^2 + 2$. Стога важи $w^2 = \dfrac{t_\ell^2 + t_m^2}{2}$. Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо $w^2 \geqslant t_\ell t_m$, тј. $PC_r^2 \geqslant t_\ell t_m$. Свака сфера има тачно две тачке додира, па се $t_\ell$ појављује тачно у две неједнакости облика $PC_r^2 \geqslant t_\ell t_m$. Узимајући производ свих тих неједнакости (за сваку тачку додира) добијамо

$$\prod_{r=1}^{n}(PC_r)^2 \geqslant \prod_{i=1}^{n} t_i^2, \quad \text{тј.} \quad \prod_{r=1}^{n} PC_r \geqslant \prod_{i=1}^{n} t_i,$$

што је и требало показати.

**39**. Нека је $f(0) = k, k \in N_0$. Тада на основу услова б) имамо

$$f(n+k) = f(n) + 1. \tag{2.12}$$

[1] Нека су $a, b, c$ странице троугла, а $t_a$ тежишна дуж која одговара страници $a$. Тада је $2b^2 + 2c^2 = 4t_a^2 + a^2$.

Ако је $k = 0$ добијамо $f(n) = f(n) + 1$, што је немогуће. Дакле, $k > 0$. Из услова а) закључујемо да је

$$f(n+k-1) < f(n+k) = f(n) + 1. \tag{2.13}$$

Ако је $k > 1$, тада је $n + k - 1 \geqslant n + 1$, па на основу а) важи

$$f(n+k-1) \geqslant f(n+1) \geqslant f(n) + 1. \tag{2.14}$$

Неједнакости (2.13) и (2.14) су у контрадикцији. Дакле, $k = 1$ је једино решење. За $k = 1$, (2.12) постаје $f(n+1) = f(n) + 1$. Ова функција задовољава услове а) и б) и даје јединствено решење $f(2005) = 2006$.

**40**. Претпоставимо да таква функција постоји. Како за $x \neq y$ важи

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant |x - y|^{\frac{1}{2}},$$

следи да је $\lim\limits_{x \to y} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0$ (јер је $\lim\limits_{x \to y} \mid x - y \mid^{\frac{1}{2}} = 0$). Према томе функција $f$ је диференцијабилна за свако $x \in \mathbb{R}$ и $f'(x) = 0$, одакле закључујемо да је $f$ константна функција. Контрадикција!

**41**. Прво решење. Из прве две неједнакости следи $(a+b)^2(c+d) < (c+d)(ab+cd)$, тј.

$$(a+b)^2 < ab + cd \quad (\text{јер је } c + d > 0). \tag{2.15}$$

Аналогно, из последње две неједнакости следи $(a+b)^2(c+d)cd < (ab+cd)(c+d)ab$, односно

$$(a+b)^2 cd < (ab+cd)ab. \tag{2.16}$$

Али, како је $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ ($(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geqslant 0$), из неједнакости (2.15) и (2.16) следи: $4ab < ab + cd$ и $4abcd < (ab+cd)ab$, тј. $cd > 3ab$ и $ab > 3cd$, што је немогуће ($\frac{1}{3}ab > cd > 3ab$).

Друго решење. Ако претпоставимо да важе све три неједнакости, тада је

$$\begin{aligned} A &= -a - b + c + d > 0, \\ B &= ab - ac - ad - bc - bd + cd > 0, \\ C &= abc + abd - acd - bcd > 0. \end{aligned}$$

Из ових неједнакости следи да полином

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x+c)(x+d) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + abcd$$

нема позитивних корена јер су сви његови коефицијенти $A, B, C, abcd$ позитивни, па за $x > 0$ важи $P(x) > 0$. Међутим, с друге стране, једначина $P(x) = 0$ има два позитивна решења $a$ и $b$. Контрадикција!

**42**. Претпоставимо супротно, да међу бројевима $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, има позитивних и да је $a_r$ први од њих. Тада је $a_r - a_{r-1} > 0$. Користећи, сада, да је према услову задатка $a_{k+1} - a_k > a_k - a_{k-1}$ за свако $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ добијамо (за $k \geqslant r$) следеће неједнакости: $a_{r+1} - a_r > 0, a_{r+2} - a_{r+1} > 0, \ldots, a_{n-1} - a_{n-2} > 0, a_n - a_{n-1} > 0$. На основу њих следи $0 < a_r < a_{r+1} < \cdots < a_{n-1} < a_n$. Међутим, последње противуречи услову да је $a_n = 0$.

**43**. Нека је $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{20}\}$. Без губитка општости можемо претпоставити да је $a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$. Ако је број непозитивних бројева у $M$ већи од броја позитивних бројева, онда је најмање 11 бројева непозитивно (могуће је да је $a_{11} = 0$). По услову задатка постоје позитивни бројеви $x_1 < x_2 < \cdots < x_{10}$ такви да важи

$$a_1 < -x_1 < a_2 < -x_2 < a_3 < -x_3 < \cdots < a_{10} < -x_{10} < a_{11}.$$

Следи да су сви позитивни бројеви $x_1 < x_2 < \cdots < x_{10}$ различити, па скуп $M$ има најмање 21 елемент. Контрадикција! Стога број позитивних бројева у $M$ није мањи од броја непозитивних. Аналогно долазимо до закључка да број негативних бројева није мањи од броја ненегативних. Дакле, број позитивних бројева у скупу $M$ је 10.

**44**. Како је $x_k \geqslant -1$, за $1 \leqslant k \leqslant n$, то важи: $(x_k + 1)\left(x_k + \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. Сређивањем израза добијамо:

$$(x_k + 1)\left(x_k + \frac{1}{2}\right)^2 = x_k^3 - \frac{3}{4}x_k + \frac{1}{4} \geqslant 0.$$

Сумирајмо неједнакости за $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^3 - \frac{3}{4}x_k + \frac{1}{4}\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k^3 - \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{n}{4} \geqslant 0.$$

Када применимо услов $\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 0$, следи: $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{3}$.

Једнакост важи једино када је $x_k = -1$ за свако $1 \leqslant k \leqslant n$, али тада сума трећих степена није једнака нули, па закључујемо да важи искључиво строга неједнакост:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{n}{3}.$$

**45**. Како је $\mathrm{nzs}(a_i, a_j) > 1000$, $i \neq j$, $(1 \leqslant i, j \leqslant n < 1000)$, ниједан од бројева $1, 2, 3, \ldots, 1000$ није дељив истовремено са два од бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$. То значи да број чланова низа $1, 2, 3, \ldots, 1000$ који су дељиви бар (па тиме и тачно!) једним од бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ једнак

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right] + \left[\frac{1000}{a_2}\right] + \cdots + \left[\frac{1000}{a_n}\right],$$

(бројева не већих од $n$ и дељивих са $k$ има $\left[\frac{n}{k}\right]$) и при томе је

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right] + \left[\frac{1000}{a_2}\right] + \cdots + \left[\frac{1000}{a_n}\right] \leqslant 1000.$$

С друге стране, за свако $i$ из $\{1, 2, \ldots, n\}$ је $\dfrac{1000}{a_i} - 1 < \left[\dfrac{1000}{a_i}\right]$, па је

$$\left(\frac{1000}{a_1} - 1\right) + \left(\frac{1000}{a_2} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{1000}{a_n} - 1\right) \leqslant 1000,$$

тј.

$$\frac{1000}{a_1} + \frac{1000}{a_2} + \cdots + \frac{1000}{a_n} \leqslant 1000 + n < 2000,$$

одакле следи тражена неједнакост.

**46**. Дата једначина је еквивалентна са

$$x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{2x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right],$$

одакле закључујемо да је $x$ цео број (десна страна једначине је цео број). Подсетимо се и да сваки цео број можемо написати у облику $x = 6k + t$, где је $t$ остатак који при дељењу са 6 даје број $x$. С обзиром на то испитаћемо све могуће случајеве.

| $t$ | $x$ | $\left[\frac{x}{6}\right]$ | $x + \left[\frac{x}{6}\right]$ | $\left[\frac{x}{2}\right]$ | $\left[\frac{2x}{3}\right]$ | $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{2x}{3}\right]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $6k$ | $k$ | $7k$ | $3k$ | $4k$ | $7k$ |
| 1 | $6k+1$ | $k$ | $7k+1$ | $3k$ | $4k$ | $7k$ |
| 2 | $6k+2$ | $k$ | $7k+2$ | $3k+1$ | $4k+1$ | $7k+2$ |
| 3 | $6k+3$ | $k$ | $7k+3$ | $3k+1$ | $4k+2$ | $7k+3$ |
| 4 | $6k+4$ | $k$ | $7k+4$ | $3k+2$ | $4k+2$ | $7k+4$ |
| 5 | $6k+5$ | $k$ | $7k+5$ | $3k+2$ | $4k+3$ | $7k+5$ |

На основу резултата из табеле закључујемо да су решења једначине сви позитивни цели бројеви осим оних који дају остатак 1 при дељењу са 6.

**47**. Нека је $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ полином чије су нуле $a$, $b$ и $c$. Према Виетовим формулама, пошто је $a + b + c = 0$, имамо да је $p = 0$, па је

$$a^3 + qa + r = 0, \quad b^3 + qb + r = 0, \quad c^3 + qc + r = 0.$$

Ако последње три једнакости помножимо редом са $2a, 2b, 2c$ и саберемо их добијамо:

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 + 2q(a^2 + b^2 + c^2) + 2r(a + b + c) = 0. \tag{2.17}$$

Према услову задатка имамо да је $a + b + c = 0$, а према Виетовим формулама је $ab + bc + ca = q$, па закључујемо да је

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = -2q.$$

Применивши последње једнакости у (2.17) добијамо $2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = 4q^2 = (2q)^2$, што је и требало доказати.

**48**. Пошто $x = a - b$ није решење једначине она се може поделити са $(x - a + b)^2$. Тако добијамо:

$$x^2 - 4ab + \frac{(a-b)^2x^2}{(x-a+b)^2} = 0,$$

односно

$$\left(x + \frac{(a-b)x}{x-a+b}\right)^2 - 2\frac{(a-b)x^2}{x-a+b} - 4ab = 0,$$

тј.

$$\left(\frac{x^2}{x-a+b}\right)^2 - 2(a-b)\frac{x^2}{x-a+b} - 4ab = 0.$$

После увођења смене $t = \dfrac{x^2}{x-a+b}$ добијамо квадратну једначину по $t$, чија су решења $t_1 = 2a, t_2 = -2b$.

Сада је потребно решити квадратне једначине $\dfrac{x^2}{x-a+b} = 2a$ и $\dfrac{x^2}{x-a+b} = -2b$.

Прва једначина има реална решења $x_1 = a + \sqrt{a(2b-a)}$ и $x_2 = a - \sqrt{a(2b-a)}$ када је $0 \leqslant a \leqslant 2b$ или $2b < a < 0$, док друга има решења $x_3 = -b + \sqrt{b(2a-b)}$ и $x_4 = -b - \sqrt{b(2a-b)}$ када је $0 \leqslant \dfrac{b}{2} \leqslant a$ или $a < \dfrac{b}{2} < 0$. Према томе изводимо следећу дискусију:

- за $a > 0$
  - $i)$ ако је $\dfrac{b}{2} < a < 2b$ полазна једначина има четири реална решења,
  - $ii)$ ако је $\dfrac{b}{2} \leqslant a < 2b$ или $\dfrac{b}{2} < a \leqslant 2b$ полазна једначина има три реална решења,
  - $iii)$ ако је $b = 0$ полазна једначина има два реална решења,
  - $iv)$ ако је $a < \dfrac{b}{2}$ или $a > 2b, b \neq 0$ полазна једначина нема реалних решења;
- за $a = b = 0$ полазна једначина има једно реално решење;
- за $a < 0$
  - $i)$ ако је $2b < a < \dfrac{b}{2}$ полазна једначина има четири реална решења,
  - $ii)$ ако је $2b \leqslant a < \dfrac{b}{2}$ или $2b < a \leqslant \dfrac{b}{2}$ полазна једначина има три реална решења,
  - $iii)$ ако је $b = 0$ полазна једначина има два реална решења,
  - $iv)$ ако је $2b > a$ или $a > \dfrac{b}{2}, b \neq 0$ полазна једначина нема реалних решења.

**49**. Једначине парабола дате фамилије можемо записати и овако: $y = m(x^2+x)+2x+3$. Како је $m \neq 0$ закључујемо да је тражени скуп тачка унија правих $y = 2x+3, x = 0, x = -1$ без њихових тачака пресека, тј. без тачака $(0,3), (-1,1)$.

**50**. Да би се одредила тражена гранична вредност потребно је на погоднији начин записати дату функцију и при томе водити рачуна о томе да $x \to -\infty$. Дакле,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}+\sqrt{x^2+3x+5}+3x\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{4x^2}\right)+\left(\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{\sqrt{4x^2+x+2}+\sqrt{4x^2}}+\frac{3x+5}{\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^2}}\right). \end{aligned}$$

Сада уводимо смену $x = -y$, па добијамо

$$L = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y+2}{\sqrt{4y^2-y+2}+\sqrt{4y^2}}+\frac{-3y+5}{\sqrt{y^2-3y+5}+\sqrt{y^2}}\right) = -\frac{1}{4}-\frac{3}{2} = -\frac{7}{4}.$$

**51**. Сваке три лопте различитих боја се могу наћи у једној или две кутије. Докажимо да морају постојати три лопте различитих боја у две различите кутије. У супротном, сваке три лопте различитих боја су у једној јединој кутији. Нека су $A$, $B$, и $C$ лопте различитих боја (имамо најмање три боје). Оне морају бити у истој кутији. Нека је $P$ нека друга лопта (од преосталих). Како је $P$ различите боје од најмање две од лопти $A, B, C$, она такође мора бити у истој кутији где су и оне. Стога су све лопте у једној кутији, што противуречи условима задатка. Дакле, постоје три лопте $A, B$, и $C$ различитих боја такве да су $A$ и $B$ у једној, а $C$ у другој кутији.

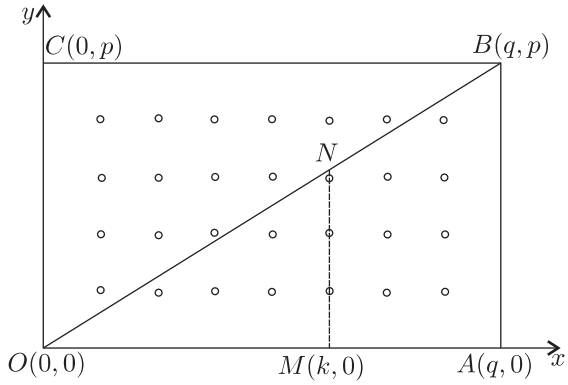
Посматрајмо сада лопту $P$ која није ни у кутији са $A$ и $B$, ни у кутији са $C$ (постоје најмање три непразне кутије). Како се лопте $A, C$ и $P$ налазе у различитим кутијама, $P$ је исте боје као $A$ или $C$. Аналогно, ако посматрамо $B, C$ и $P$ долазимо до закључка да је $P$ исте боје као $B$ или $C$. Према томе, $P$ је исте боје као $C$. Из претходног следи да свака лопта која није у кутији са $A$ и $B$ је исте боје као лопта $C$. Означимо једну од тих лопти са $C'$. Користећи се истим аргументима као у претходном закључивању долазимо до закључка да су све лопте које су истој кутији са $C'$ исте боје као $C'$, тј. исте боје као $C$. Дакле, свака лопта која није у кутији са $A$ и $B$ је исте боје.

**52**. Опишимо квадрат око датог круга (страница тог квадрата је $25\,\mathrm{cm}$), и потом тај квадрат изделимо на квадрате површине $1\,\mathrm{cm}^2$. Тада је круг прекривен са мање од 625 квадрата површине $1\,\mathrm{cm}^2$. Како је $2006 = 625\cdot 3+131$, постоји квадрат површине $1\,\mathrm{cm}^2$ унутар датог круга у коме се налазе бар 4 тачке. Тада је површина четвороугла чија су темена те 4 тачке сигурно мања од $1\,\mathrm{cm}^2$.

**53**. Опишимо прво скуп тачака које нису видљиве из координантног почетка. Ако тачка $P(p,q)$ није видљива из $O(0,0)$ следи да на дужи $OP$ постоји тача $M(m,n)$ која је видљива из $O$. Уочимо тачке $M_1(m,0)$ и $P_1(p,0)$. Тада су троуглови $OM_1M$ и $OP_1P$ слични, па важи $m : n = p : q$. Из последњег закључујемо да су из $O$ невидљиве све

тачке чије координате нису узајамно прости бројеви, тј. видљиве су само оне тачке чије координате су узајамно прости бројеви.

**54**. Уочимо све тачке $(x, y)$ са целобројним координатама за које је $1 \leqslant x \leqslant q-1$ и $1 \leqslant y \leqslant p-1$. Ове тачке припадају унутрашњости правоугаоника $OABC$, чије су дужине страница $OA = q$ и $OC = p$, и њихов број је $(p-1)(q-1)$, при чему се на дијагонали $OB$ не налази ни једна тачка од ових тачака (слика 2.13).




Слика 2.13.

Наиме, за све тачке $(x', y')$ дијагонале $OB$ важи $\dfrac{x'}{y'} = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{q}{p}$, но како су $p$ и $q$ узајамно прости, то не постоје цели позитивни бројеви $x' < q$ и $y' < p$ за које је $\dfrac{x'}{y'} = \dfrac{q}{p}$. Приметимо даље да је број целобројних тачака које имају апсцису једнаку $k$ $(0 < k < q)$ и које се налазе испод дијагонале $OB$ једнак целом делу дужине дужи $MN$. Како је $MN = \dfrac{OM}{OA} \cdot AB = \dfrac{kp}{q}$, то је тај број једнак $\left[\dfrac{kp}{q}\right]$. Дакле, збир

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \cdots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

је једнак броју свих целобројних тачака које су смештене испод дијагонале $OB$.

Због симетрије у односу на центар правоугаоника $OABC$ број целобројних тачака изнад дијагонале $OB$ је једнак броју целобројних тачака испод дијагонале $OB$ и износи $\dfrac{(p-1)(q-1)}{2}$. Дакле, имамо да је

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \cdots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Слично се доказује да је

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

**55**. Доказ изводимо математичком индукцијом по $n$.

Лако се проверава да је $2\sin a_1 45^\circ = a_1\sqrt{2}$.

Претпоставимо да дата једнакост важи за неки природан број $n$.

Пре него што пређемо на доказ индуктивног корака, приметимо најпре две чињенице у вези са изразом

$$\Psi = \left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \cdots + \frac{a_1a_2\cdots a_n}{2^{n-1}} + \frac{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}{2^n}\right)45^\circ,$$

при чему су $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in \{-1, 1\}$ произвољни. Прво, да важи

$$|\Psi| < \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)45^\circ = 90^\circ - \frac{1}{2^n}90^\circ < 90^\circ, \tag{2.18}$$

а затим и да је:

$$\begin{aligned} 2\Psi &= \begin{cases} 90^\circ + \left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2\cdots a_na_{n+1}}{2^{n-1}}\right)45^\circ, & \text{ако је } a_1 = 1, \\ -90^\circ - \left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2\cdots a_na_{n+1}}{2^{n-1}}\right)45^\circ, & \text{ако је } a_1 = -1 \end{cases} \\ &= a_1\left(90^\circ + \left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2\cdots a_na_{n+1}}{2^{n-1}}\right)45^\circ\right). \end{aligned}$$

Сада, из једнакости

$$\begin{aligned} \cos 2\Psi &= \left(\pm 90^\circ \pm \left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2\cdots a_na_{n+1}}{2^{n-1}}\right)45^\circ\right) \\ &= -\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2\cdots a_na_{n+1}}{2^{n-1}}\right)45^\circ, \end{aligned}$$

добијамо:

$$\begin{aligned} 2\sin\Psi &= 2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \cdots + \frac{a_1a_2\cdots a_n}{2^{n-1}} + \frac{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}{2^n}\right)45^\circ \\ &= a_1\sqrt{2 - 2\cos 2\Psi} \qquad (\text{према } (2.18)) \\ &= a_1\sqrt{2 + 2\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2\cdots a_na_{n+1}}{2^{n-1}}\right)45^\circ} \\ &= a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2 + \cdots + a_{n+1}\sqrt{2}}}} \qquad (\text{према инд. претпоставци}). \end{aligned}$$

**56**. Нека је $D$ произвољна тачка унутар троугла $ABC$. Нека су $E$ и $F$ тачке у равни троугла такве да су $ADCE$ и $BDCF$ паралелограми. Птоломејева неједнакост у четвороуглу $ABCE$ даје

$$AB \cdot AD + CB \cdot CD = AB \cdot CE + CB \cdot AE \geqslant AC \cdot BE. \tag{2.19}$$

С друге стране, применом Птоломејеве неједнакости у четвороуглу $BECF$ добијамо

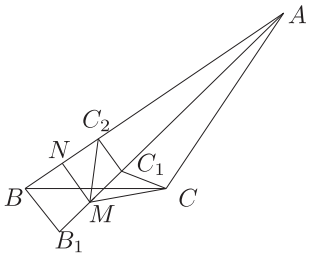
$$BE \cdot BD + CD \cdot AD \geqslant BC \cdot EF = BC \cdot AB, \tag{2.20}$$

будући да је $ABEF$ очигледно паралелограм. Комбиновањем неједнакости (2.19) помножене са $BD$ и неједнакости (2.20) помножене са $AC$ добијамо

$$DA \cdot DB \cdot AB + DA \cdot DC \cdot AC + DB \cdot DC \cdot BC \geqslant AB \cdot AC \cdot BC.$$

Једнакост важи ако и само ако су све тачке $A, B, C, E, F$ на кругу, што је еквивалентно томе да је $D$ ортоцентар троугла $ABC$.

**57**. Уочимо на дужи $AB$ тачке $C_1$ и $N$ такве да важи $C_1C_2 \perp AB, MN \parallel B_1B$ (слика 2.14). На основу подударности троуглова $AC_1C$ и $C_1C_1A$ следи да је $C_1C = C_1C_2$. Како је $M$ средиште дужи $B_1C_1$ и $C_1C_2 \perp AB$ следи да је $N$ средиште дужи $BC_2$. Стога је висина $MN$ троугла $BMC_2$ уједно и тежишна дуж, па је тај троугао једнакокрак, тј. $BM = MC_2$. С друге стране, из подудраности троуглова $MC_1C_2$ и $MC_1C$ следи да је $MC = MC_2$. Према томе, $BM = MC_2 = MC$.



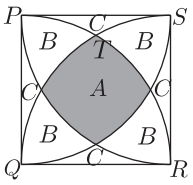

Слика 2.14.

**58**. Означимо са $A, B, C$ делове површи квадрата (слика 2.15). Тада је

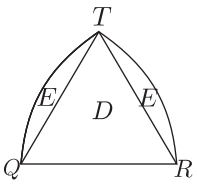
$$A + 4B + 4C = 1. \tag{2.21}$$

Такође, ако посматрамо кружни исечак $QRP$ долазимо до једначине

$$A + 3B + 2C = \frac{\pi}{4}. \tag{2.22}$$




Слика 2.15.




Слика 2.16.

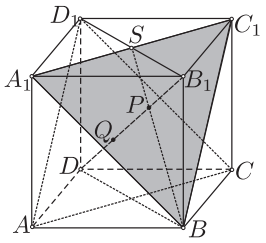
Како бисмо формирали и трећу једначину потребно је да уочимо област $TQR$ (слика 2.16). Уведимо ознаке $D$ за површину троугла $TQR$ и $E$ за површине одговарајућих

одсечака. Троугао $QRT$ је једнакостраничан, па је површина кружног исечка $QRT$ једнака шестини круга. Сада можемо формирати и трећу једначину

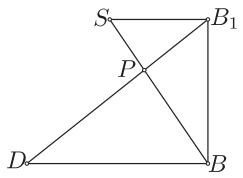
$$A + 2B + C = 2(D + E) - D = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{2.23}$$

Решавајући систем једначина (2.21), (2.22), (2.23) добијамо $A = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$.

**59**. Како је $B_1A_1 = B_1B = B_1C_1$ и $DA_1 = DB = DC_1$, закључујемо да тачке $B_1$ и $D$ припадају нормали на раван $A_1BC_1$, која садржи центар $P$ описане кружнице око једнакостраничног троугла $A_1BC_1$ (слика 2.17).

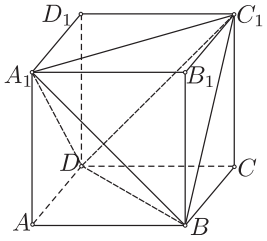



Слика 2.17.




Слика 2.18.

Означимо са $S$ пресек дијагонала $A_1C_1$ и $B_1D_1$ квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Како је $S$ средиште дужи $A_1C_1$, тачке $B, P$ и $S$ су колинеарне. Из $B_1S = \frac{1}{2}BD$ и $B_1S \parallel BD$ закључујемо да су троуглови $BDP$ и $SB_1P$ слични (слика 2.18), одакле следи $\frac{B_1P}{DP} = \frac{B_1S}{DB} = \frac{1}{2}$, односно, $B_1P = \frac{1}{3}B_1D$. На исти начин се доказује да права $B_1D$ сече раван $ACD_1$ у тачки $Q$, која је центар описане кружнице око једнакостраничног троугла $ACD_1$, и при томе важи $DQ = \frac{1}{3}B_1D$. Овим је доказ завршен.




Слика 2.19.

**60**. Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка ивице 1 (слика 2.19). На сваку од страна $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ належу основама бар два тетраедра. При томе основе нису веће од $\frac{1}{2}$, а висине тетраедара нису веће од 1. Збир запремина четири таква тетраедра није већи

од $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{3} < 1$. Одатле следи да се коцка не може исећи на четири тетраедра. Међутим, може се исећи на пет тетраедара и то је показано на слици.

**61**. Претпоставимо супротно, да у низу $c_1, \overline{c_1c_2}, \overline{c_1c_2c_3}, \overline{c_1c_2c_3c_4}, \ldots$ има коначно много сложених бројева. Из ове претпоставке следи да у низу $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ има само коначно много парних цифара, као и оних које су једнаке 5, па постоји природан број $m$ такав да све цифре $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots$ припадају скупу $\{1, 3, 7\}$ (цифра 9 је искључена још у формулацији задатка). Приметимо даље да се дописивањем цифре 3 неком броју низа не мења остатак при дељењу са 3, док се дописивањем цифре 1 или 7 овај остатак повећава за 1 ($7 = 2 \cdot 3 + 1$). Дакле, ако се у низу $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ појављује бесконачно много пута бар једна од цифара 1 или 7, сваки трећи број низа $c_1, \overline{c_1c_2}, \overline{c_1c_2c_3}, \overline{c_1c_2c_3c_4}, \ldots$ који се завршава једном од ове две цифре ће бити дељив са 3, тј. сложен. Одавде следи да је низ $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ *стационаран*, тј. да постоји $n\,(> m)$ такав да су цифре $c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ једнаке 3, тј. за довољно велико $n$, сваки од бројева

$$\overline{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}},\ \overline{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}c_{n+2}},\ \overline{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}c_{n+2}c_{n+3}}, \ldots$$

је облика:

$$\overline{c_1c_2\ldots 3\underbrace{33\ldots 3}_{k\text{ пута}}} = 10^kA + 3 \cdot \underbrace{11\ldots 1}_{k\text{ пута}} \quad (k \geqslant 1),$$

при чему је $A = \overline{c_1c_2\ldots 3}$. Међутим, постоји бесконачно много бројева овог облика који су сложени. Заиста, ако је $p$ било који прост делилац броја $A$ ($p \neq 2, p \neq 5$, могуће $A = p$), онда постоји $k$ такво да је број $\underbrace{11\ldots 1}_{k}$ дељив са $p$, јер међу бројевима $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots 1}_{p+1}$ бар два, $\underbrace{11\ldots 1}_{i}$ и $\underbrace{11\ldots 1}_{j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant p+1$, дају исти остатак при дељењу са $p$, па

$$p \mid \underbrace{11\ldots 1}_{j-i}\underbrace{00\ldots 0}_{\ell} = \underbrace{11\ldots 1}_{j-i} \cdot 10^{\ell},$$

одакле следи да $p \mid \underbrace{11\ldots 1}_{j-i}$. У сваком случају, наша претпоставка води у контрадикцију, па је тврђење задатка тачно.

**62**. Нека је

$$\overrightarrow{a} = \left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{b} = \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right).$$

Тада је $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$, па на основу познате неједнакости $|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \leqslant |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|$, следи

$$\left|2 \cdot \frac{x(1-y^2) + y(1-x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| = \left|2 \cdot \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leqslant 1.$$

Из последње неједнакости непосредно добијамо

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

**63**. После смене

$$a = 2^x \quad \text{и} \quad b = \left[\sqrt{\sqrt{x^2 - 11x + 46} - \sqrt{x^2 - 11x + 30}}\right]^x$$

једначина постаје $b + \dfrac{a^2}{b} = 2a$ $(b \neq 0)$, одакле добијамо $a = b$. Када вратимо смену добијамо следећу једначину по $x$:

$$\left[\frac{\sqrt{\sqrt{x^2 - 11x + 46} - \sqrt{x^2 - 11x + 30}}}{2}\right]^x = 1,$$

одакле следи

$$\frac{\sqrt{\sqrt{x^2 - 11x + 46} - \sqrt{x^2 - 11x + 30}}}{2} = 1 \quad \text{или} \quad x = 0.$$

Из последњег добијамо $x \in \{0, 5, 6\}$.

**64**. Нека је

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c - \sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2.$$

Како је $b^2 - ac > 0$, постоји реалан број $x_1$ такав да је $ax_1^2 + 2bx_1 + c = 0$, па је

$$f(x_1) = -\sum_{k=1}^{n}(x_0 - a_k)^2 < 0.$$

С друге стране, за сваки реалан број $x$ важи:

$$f(x) = (a - n)x^2 + 2\left(b + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)x + \left(c - \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right),$$

а како је $a - n > 0$ то постоји $x_2$ такво да је $f(x_2) > 0$. Дакле, (квадратна) једначина $f(x) = 0$ има реалних решења, па је

$$\begin{aligned} D \geqslant 0 &\Leftrightarrow 4\left(b + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 - 4(a - n)\left(c - \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \left(b + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \geqslant (a - n)\left(c - \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right). \end{aligned}$$

**65**. Очигледно је да по извршењу операције $a)$ добијамо квадратни трином чија дискриминанта је једнака дискриминанти почетног квадратног тринома, док при операцији $b)$ разлика решења остаје непромењена. Како је

$$D = b^2 - 4ac = a^2\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right) = a^2\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right) = a^2(x_1 - x_2)^2,$$

закључујемо да ни операција $b$) не мења дискриминанту. Дакле, вредност дискриминанте је инваријанта при вршењу дозвољених операција. Приметимо да је $D_1 = 9$, а $D_2 = 5$, па се применом дозвољених операција не може $x^2 - x - 2$ трансформисати у $x^2 - x - 1$.

**66**. Доказ се мора спровести засебно за случајеве $n$ непарно, односно $n$ парно.

Ако је $n$ непаран број, тада постоје природни бројеви $A$ и $B$ такви да је

$$(\sqrt{2}-1)^n = A\sqrt{2} - B.$$

Тада, за исте $n, A, B$, важи и $(\sqrt{2}+1)^n = A\sqrt{2} + B$. Како је

$$(\sqrt{2}-1)^n \cdot (\sqrt{2}+1)^n = 1, \quad \text{а} \quad (A\sqrt{2}-B)\cdot(A\sqrt{2}+B) = 2A^2 - B^2,$$

следи да је $2A^2 - B^2 = 1$, односно $B = \sqrt{2A^2-1}$. Дакле, за сваки непаран природан број $n$ постоји $A \in \mathbb{N}$ такво да је

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{2A^2} - \sqrt{2A^2-1} \quad (m = 2A^2).$$

Ако је $n$ паран број, постоје природни бројеви $A$ и $B$ такви да је

$$(\sqrt{2}-1)^n = B - A\sqrt{2}.$$

Тада, за исте $n, A, B$, важи и $(\sqrt{2}+1)^n = B + A\sqrt{2}$. Сада, слично као у претходном случају, добијамо да је $B = \sqrt{2A^2+1}$. Дакле, за сваки паран природан број $n$ постоји $A \in \mathbb{N}$ такво да је

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{2A^2+1} - \sqrt{2A^2} \quad (m = 2A^2+1).$$

Овим је тврђење доказано за сваки природан број $n$.

**67**. Нека су $x_1, x_2$ и $x_3$ рационалне нуле датог полинома. Тада

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Rightarrow (ax)^3 + b(ax)^2 + ac(ax) + a^2d = 0.$$

По увођењу смене $y = ax$ добијамо

$$y^3 + by^2 + acy + a^2d = 0. \tag{2.24}$$

Нека су, сада, $y_1$, $y_2$ и $y_3$ рационалне, односно целобројне, нуле полинома из (2.24). Како су те нуле делиоци од $a^2d$ закључујемо да морају бити непарне. Како је $y_1 + y_2 + y_3 = -b$ и $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = ac$ и $b$ и $ac$ морају бити непарни, тј. $b$ и $c$ су непарни бројеви, што је у супротности са условом задатка да је $bc$ парно. Дакле, нису све нуле датог полинома рационалне.

**68**. Уочавамо да ако уместо скупа $S$ посматрамо скуп $\{0, 1, 2, \ldots, 19\}$ одговарајући збирови су једнаки. Аналогно, збирови су једнаки и за скуп $\{0, 1, 2, \ldots, 1999\}$. Дакле, треба само израчунати $(2000+2002+2004+2006) - (2001+2003+2005) = 2003$. Према томе, за 2003 је већи збир бројева чији је збир цифара паран.

**69**. Ако $a_i$ заменимо са $-a_i$ остатак при дељењу $S$ са $4$ се не мења. Заиста, при томе четири сабирка мењају знак, па ако су два била позитивна а два негативна, $S$ има исту вредност; ако су један или три били истог знака, $S$ се мења за $\pm 4$; док ако су сва четири била истог знака, $S$ се мења за $\pm 8$. Дакле, остатак при дељењу са $4$ је инваријанта при овој операцији. Вршећи замену једног по једног броја $-1$ са $1$, када их све заменимо, добијамо $S = n$. Како је на почетку је $S = 0 \equiv 0 \pmod 4$, на основу доказане инваријантности следи да је и $n \equiv 0 \pmod 4$.

**70**. Операцију замене два слова једним означићемо са $\circ$. Тада дата правила записујемо на следећи начин:

$$e \circ e = e, \quad e \circ a = a, \quad e \circ b = b, \quad a \circ a = b, \quad b \circ b = a, \quad a \circ b = e.$$

Како се у правилима не помиње поредак, операција $\circ$ је комутативна. Лако се проверава да је операција $\circ$ и асоцијативна, тј. важи $(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$ за сва слова која се нађу на табли. Стога је производ (у смислу операције $\circ$) свих слова са табле сталан и не зависи од поретка извођења операције $\circ$, па Марко не може утицати на то које ће слово остати на табли (почетни избор слова одређује последње слово).

**71**. Уочимо функцију $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ задату са $g(n) = \dfrac{f(n)}{n}$. Тада, на основу особина функције $f$, за функцију $g$ важи:

1) $g(1) = 0$,
2) $g(p) = \dfrac{1}{p}$ за сваки прост број $p$,
3) $g(ab) = g(a) + g(b)$ за све природне бројеве $a$ и $b$.

За сваки природан број $n$ постоји факторизација $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где су $p_1, p_2, \dots, p_k$ одговарајући прости, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ одговарајући природни бројеви. Тада је

$$g(n) = \alpha_1 g(p_1) + \alpha_2 g(p_2) + \dots + \alpha_k g(p_k) = \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \dots + \frac{\alpha_k}{p_k}.$$

Тражимо природне бројеве за које је $g(n) = 1$, тј. за које је

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \dots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1.$$

За $k > 1$ добијамо

$$\left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{p_{k-1}}\right) \cdot p_1 \cdots p_{k-1} + \frac{\alpha_k}{p_k} \cdot p_1 \cdots p_{k-1} = p_1 \cdots p_{k-1}.$$

Пошто су у последњој једнакости први сабирак и збир цели бројеви, следи да је и други сабирак цео број, одакле закључујемо да $p_k \mid \alpha_k$, а како је при томе $0 < \alpha_k \leqslant p_k$ (због $\sum_{n=1}^{k} \frac{\alpha_n}{p_n} = 1$), следи да је $p_k = \alpha_k$. На основу последњег је

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \dots + \frac{\alpha_k}{p_k} > 1,$$

што је немогуће, па не може бити $k > 1$. Дакле, $k = 1, \alpha_1 = p_1$, тј. тражени природни бројеви су облика $n = p^p$, где је $p$ произвољан прост број.

**72**. Међу датим тачкама уочимо три које формирају троугао највеће површине. Означимо те тачке са $A, B, C$, а површину троугла $ABC$ са $P$. Тада је $P \leqslant 1$. Повуцимо сада праве кроз темена троугла $ABC$ које су паралелне наспрамним страницама. Те три праве одређују троугао $A_1B_1C_1$ површине $P_1 = 4P \leqslant 4$. Показаћемо да се свих $n$ датих тачака налази у троуглу $A_1B_1C_1$.

Претпоставимо да постоји тачка $P$ (једна од датих $n$ тачака) која је ван троугла $A_1B_1C_1$. Онда се $\triangle ABC$ и тачка $P$ налазе са различитих страна најмање једне од правих $A_1B_1$, $B_1C_1$, $C_1A_1$. Претпоставимо да се налазе са различитих страна праве $B_1C_1$. Тада троугао $BCP$ има већу површину него троугао $ABC$, што је у контрадикцији са претпоставком максималности површине $\triangle ABC$. Дакле, све дате тачке налазе се у троуглу $A_1B_1C_1$, чија је површина мања или једнака 4.

**73**. Може. Ради једноставнијег изражавања, сваки правоугаоник смештен у унутрашњост датог квадрата тако да су му странице паралелне страницама квадрата зваћемо *допустив правоугаоник*.

Конструшимо најпре средњу („хоризонталну") линију квадрата и на њу сместимо 200 тачака, дељењем на 201 једнаких делова.

Како је растојање између две суседне тачке на средњој линији једнако $\frac{1}{201} < 0,005 = \frac{1}{200}$, то сваки *допустив* правоугаоник који има површину 0,005 и не садржи ни једну од означених тачака лежи у „горњој" или „доњој" половини квадрата.

Сваку од уочених половина квадрата поделимо новим линијама, које су паралелне са првом, на подударне правоугаонике. На сваку од нових линија сместимо по 100 тачака, поделом сваке од њих на 101 једнаки део. У овом случају растојања међу суседним тачкама линије су $\frac{1}{101} < \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{1}{200}$. Како „висина" сваког *допустивог* правоугаоника смештеног у једну од уочених половина квадрата није већа од $\frac{1}{2}$, закључујемо да је сваки *допустив* правоугаоник који има површину 0,005 и не садржи ниједну од означених тачака смештен између неке две од три уочене линије.

Даље, сваки од четири правоугаоника на које уочене линије деле квадрат, делимо новим хоризонталним линијама на два подударна дела, а на подеоне линије (има их 4) смештамо по 50 тачака; у овом случају сваку од линија делимо на 51 део. Сада сваки *допустив* правоугаоник који не садржи означене тачке лежи у једном од 8 међусобно подударних правоугаоника на које је квадрат подељен.

Сваки од 8 међусобно подударних правоугаоника на које је квадрат подељен делимо даље на подударне делове; затим сваку од 8 подеоних линија делимо на 26 једнаких делова, тј. означавамо по 25 подеоних тачака на свакој.

Поступак настављамо новом поделом. На свакој од 16 нових подеоних линија уочавамо по 12 тачака поделом линије на 13 једнаких делова. Затим, сваку од 32 нове подеоне линије делимо на 7 једнаких делова и означавамо 6 подеоних тачака. Сваку од 64 нове

подеоне линије делимо на 4 дела и означавамо 3 подеоне тачке. На крају, на свакој од 128 нових подеоних линија означимо њено средиште.

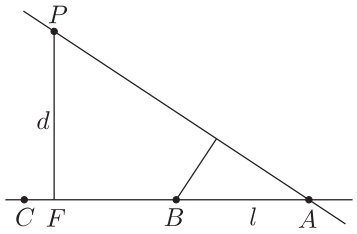
Није тешко видети да би сваки *допустив* правоугаоник површине 0,005 коме не би припадала ниједна од означених тачака морао бити смештен између две суседне хоризонталне подеоне линије којих укупно има $1+2+4+8+16+32+64+128=255$. Међутим, растојање међу суседним „хоризонталним" линијама је $\frac{1}{256}<\frac{1}{200}$, одакле следи да уочени *допустив* правоугаоник не може имати површину једнаку 0,005. Дакле, сваки *допустив* правоугаоник површине 0,005 садржи бар једну од означених унутрашњих тачака квадрата.

Број тачака које смо сместили у унутрашњост квадрата једнак је

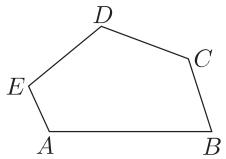
$$1\cdot 200+2\cdot 100+4\cdot 50+8\cdot 25+16\cdot 12+32\cdot 6+64\cdot 3+128\cdot 1=1504<1600.$$

**74**. Претпоставимо да тачке нису колинеарне. Међу свим тачкама скупа $S$ и правим које оне одређују уочимо тачку $P$ и праву $l$, такву да је $d(P,l)$ минимално, а $P\notin l$. Нека је $F$ подножје нормале из $P$ на $l$. По услову задатка постоје три тачке $A,B,C\in S$ на правој $l$. Тада су две од њих, нпр. $A$ и $B$ са исте стране од $F$ (слика 2.20).

Нека је тачка $B$ ближе тачки $F$ него тачка $A$. Тада је $d(B,AP)<d(P,l)$, што је у супротности са чињеницом да је $d(P,l)$ минимално. Дакле, све тачке скупа $S$ припадају истој правој.




Слика 2.20.




Слика 2.21.

**75**. На слици 2.21 је приказан конвексан петоугао $ABCDE$. Нека је $BE$ најдужа дијагонала. Тада важи $|BD|+|CE|>|BE|+|CD|>|BE|$, на основу чега закључујемо да се од дијагонала $BD, CD$ и $BE$ може конструисати троугао.

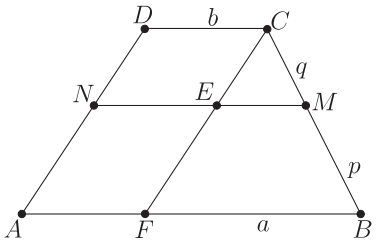
**76**. Доказаћемо најпре два тврђења која ћемо искористити у решењу постављеног задатка.

Лема 1. *Нека су $M$ и $N$ тачке на крацима $BC$ и $AD$ трапеза $ABCD$ такве да је $\frac{BM}{MC}=\frac{AN}{ND}=\frac{p}{q}$. Тада је дуж $MN$ паралелна основицама трапеза и*

$$MN=\frac{qa+pb}{p+q},$$

*при чему су $a$ и $b$ дужине основица $AB$ и $CD$ редом.*

*Доказ.* Према Талесовој теореми следи да је $MN \parallel AB \parallel CD$. Нека је $F$ пресек основице $AB$ са правом кроз $C$ која је паралена краку $AD$, а $E$ пресек дужи $MN$ и $CF$ (слика 2.22).




Слика 2.22.

Из $\triangle CEM \sim \triangle CFB$ следи да је $\dfrac{ME}{FB} = \dfrac{CM}{CB}$, тј. $ME = \dfrac{q}{p+q}(a-b)$, па је

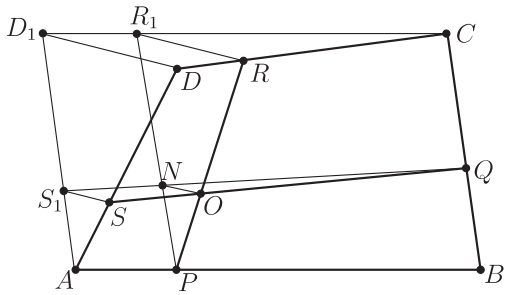
$$MN = b + \frac{q}{p+q}(a-b) = \frac{qa+pb}{p+q}. \quad \square$$

Лема 2. *На страницама $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, конвексног четвороугла $ABCD$, дате су редом тачке $P$, $Q$, $R$, $S$, тако да је*

$$BP : BA = CR : CD = p \quad \text{и} \quad AS : AD = BQ : BC = q.$$

*Тада су дужи $PR$ и $QS$ својом тачком пресека подељене редом у односима $q : (1-q)$ и $p : (1-p)$.*

*Доказ.* Уколико је $ABCD$ паралелограм тврђење се једноставно доказује. Претпоставимо да $ABCD$ није паралелограм (слика 2.23).



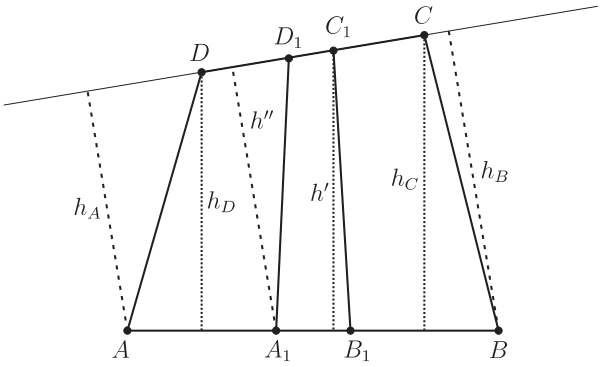

Слика 2.23.

Нека је $D_1$ тачка таква да је $ABCD_1$ паралелограм. На страницама $AD_1$ и $CD_1$ означимо тачке $S_1$ и $R_1$ тако да је $SS_1 \parallel DD_1$ и $RR_1 \parallel DD_1$. Нека је $N$ пресек дужи $PR_1$ и $QS_1$. Ако је $O$ пресечна тачка дужи $PR$ и $QS$, доказаћемо да је и $ON \parallel DD_1$. Заиста, ако су $N_1$ и $N_2$ пресеци праве кроз $N$ паралелне са $DD_1$ редом са дужима $PR$

и $QS$, имаћемо да је $\overrightarrow{NN_1} = q\overrightarrow{RR_1} = qp\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{NN_2} = p\overrightarrow{SS_1} = pq\overrightarrow{DD_1}$, одакле следи да се тачке $N_1$ и $N_2$ поклапају са тачком $O$. Сада је јасно да је $PO : PR = PN : PR_1 = q$ и $QO : QS = QN : QS_1 = p$. □

НАПОМЕНА. Уколико је $p = q$ одговарајуће тврђење се једноставније може доказати. Из $BP : BA = BQ : BC = p$, следи да је $PQ \parallel AC$ и $PQ : AC = p$. Аналогно је $RS \parallel AC$ и $RS : AC = 1 - p$. Дакле, дужи $PR$ и $QS$ су подељене тачком пресека у односу $p : (1 - p)$.

Вратимо се сада решавању постављеног задатка. Нека су странице $AB$ и $CD$ конвексног четвороугла $ABCD$ подељене на пет једнаких делова и нека су $A_1, B_1$, односно $C_1, D_1$ два пара одговарајућих подеоних тачака које се налазе између преостале две подеоне тачке (слика 2.24).




Слика 2.24.

Нека су даље $h_A, h'', h_B$ растојања редом тачака $A, A_1, B$ од праве $CD$, а $h_C, h', h_D$ редом растојања тачака $B, C_1, D$ од праве $AB$.

Према доказаној леми 1 имамо да је $h' = \dfrac{3h_C + 2h_D}{5}$ и $h'' = \dfrac{2h_B + 3h_A}{5}$, па је

$$P_{\triangle ABC_1} = \frac{AB \cdot h'}{2} = \frac{3 \cdot \dfrac{AB \cdot h_C}{2} + 2 \cdot \dfrac{AB \cdot h_D}{2}}{5} = \frac{3 \cdot P_{\triangle ABC} + 2 \cdot P_{\triangle ABD}}{5},$$

односно

$$P_{\triangle CDA_1} = \frac{CD \cdot h''}{2} = \frac{2 \cdot \dfrac{CD \cdot h_B}{2} + 3 \cdot \dfrac{CD \cdot h_A}{2}}{5} = \frac{2 \cdot P_{\triangle CDB} + 3 \cdot P_{\triangle CDA}}{5}.$$

Из последње две једнакости имамо да је

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC_1} + P_{\triangle CDA_1} &= \frac{3 \cdot (P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CDA}) + 2 \cdot (P_{\triangle ABD} + P_{\triangle CDB})}{5} \\ &= P_{ABCD}. \end{aligned}$$

Сада имамо да је

$$\begin{aligned} P_{A_1B_1C_1D_1} &= P_{\triangle A_1B_1C_1} + P_{\triangle C_1D_1A_1} \\ &= \frac{A_1B_1 \cdot h'}{2} + \frac{C_1D_1 \cdot h''}{2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{AB \cdot h'}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{CD \cdot h''}{2} \\ &= \frac{1}{5}\left(P_{\triangle ABC_1} + P_{\triangle CDA_1}\right) = \frac{1}{5} P_{ABCD}. \end{aligned}$$

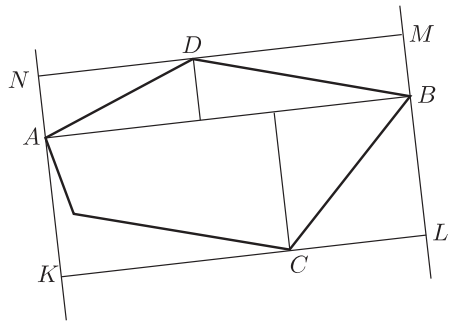
Према леми 2 дужи које спајају одговарајуће подеоне тачке страница $BC$ и $AD$ деле дужи $B_1C_1$ и $A_1D_1$ такође на пет једнаких делова, па према управо доказаном односу површина добијамо да је површина осенченог четвороугла 5 пута мања од $P_{A_1B_1C_1D_1}$, односно да је једнака $\frac{1}{25}P_{ABCD} = \frac{1}{25}$.

**77**. Нека је $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$ и $Z(z_1, z_2)$. Тада услов да $A$ не осветљава $X$ значи да не могу истовремено да важе неједнакости $a_1 \leqslant x_1$ и $a_2 \leqslant x_2$, тј. $a_1 > x_1$ или је $a_2 > x_2$. Аналогни услови важе за $B$ и $Y$, као и за $C$ и $Z$. Дакле,

$$a_1 > x_1 \text{ или } a_2 > x_2; \quad b_1 > y_1 \text{ или } b_2 > y_2; \quad c_1 > z_1 \text{ или } c_2 > z_2.$$

Од ових шест неједнакости три су сигурно тачне, па бар две морају бити у истој колони. Због симетрије можемо претпоставити да је то прва колона, а такође због симетрије, без губитка општости можемо претпоставити да су тачне прве две неједнакости. Контрадикцију добијамо из циркуларног низа неједнакости $a_1 > x_1 \geqslant b_1 > y_1 \geqslant a_1$, где је друга неједнакост последица услова да је $X$ осветљена из $B$, а четврврта неједнакост последица услова да је $Y$ осветљена из $A$.

**78**. Нека је $AB$ најдужа дијагонала или страница датог многоугла. Нека су $a$ и $b$ нормале на $AB$ повучене из $A$, односно $B$ (видети слику 2.25 где је илустрован случај $n = 5$).




Слика 2.25.

Тада се многоугао налази у конвексној области коју ограничавају праве $a$ и $b$. Заиста, за свако теме $X$ датог многоугла важи $AX \leqslant AB$ и $XB \leqslant AB$. Упишимо сада многоугао

у најмањи правоугаоник $KLMN$, такав да странице $KL$ и $MN$ имају заједничке тачке $C$ и $D$ са многоуглом. Тада је $P_{KLMN} = 2P_{ABC} + 2P_{ABD} = 2P_{ABCD}$. Како четвороугао $ABCD$ лежи унутар датог многоугла следи да је $P_{ABCD} \leqslant 1$, одакле добијамо $P_{KLMN} \leqslant 2$, што је и требало доказати.

**79**. Поставимо квадрат $ABCD$ у координатни систем тако да је $A(-a,-a)$, $B(a,-a)$, $C(a,a)$ и $D(-a,a)$.

Нека је $T(x,y)$ произвољна тачка кружнице уписане у квадрат $ABCD$, $x^2+y^2=a^2$. Тада је: $\overrightarrow{TC} = (a-x, a-y)$, $\overrightarrow{TA} = (-a-x, -a-y)$, $\overrightarrow{TD} = (-a-x, a-y)$, $\overrightarrow{TB} = (a-x, -a-y)$, па је

$$\cos^2\alpha_T = \frac{(-a-x,-a-y)}{\sqrt{(-a-x)^2+(-a-y)^2}} \cdot \frac{(a-x,a-y)}{\sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2}} = \frac{a^2}{5a^2-8xy}$$

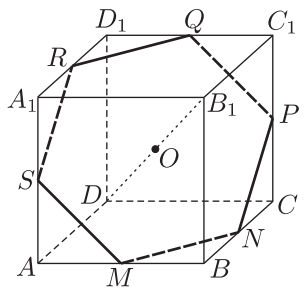
и

$$\cos^2\beta_T = \frac{(a-x,-a-y)}{\sqrt{(a-x)^2+(-a-y)^2}} \cdot \frac{(-a-x,a-y)}{\sqrt{(-a-x)^2+(a-y)^2}} = \frac{a^2}{5a^2+8xy}.$$

Сада имамо да је

$$\operatorname{tg}^2\alpha_T + \operatorname{tg}^2\beta_T = \frac{1}{\cos^2\alpha_T} + \frac{1}{\cos^2\beta_T} - 2 = \frac{5a^2-8xy}{a^2} + \frac{5a^2+8xy}{a^2} - 2 = 8.$$

**80**. Раван $\alpha$ је раван симетрије дужи $B_1D$, па садржи све тачке које су подједнако удаљене од $B_1$ и $D$.




Слика 2.26.

Нека је $M$ средиште ивице $AB$ (слика 2.26). Из $\triangle MAD \cong \triangle MBB_1$ следи $MB_1 = MD$, што значи да тачка $M$ припада равни $\alpha$. Аналогно се показује да и тачке $N, P, Q, R, S$ (које су редом средишта ивица $BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A$) припадају равни $\alpha$. Дакле, пресек је шестоугао $MNPQRS$. При томе је

$$MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} = NP = PQ = QR = RS = SM.$$

Приметимо да је средиште $O$ дијагонале коцке $DB_1$ уједно и средиште дужи $MQ$, $NR$ и $PS$, а при томе је и $MQ = NR = PS = a\sqrt{2}$, из чега закључујемо да су троуглови $MON, NOP, POQ, QOR, ROS$ и $SOM$ једнакостранични, односно да је $MNPQRS$ правилан шестоугао. Дакле, тражена површина је $S = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

**81**. Повежимо свака два каменчића концем. Укупно смо направили $n(n-1)/2$ веза. Када делимо гомилу на $a$ и $b$ каменчића, морамо да пресечемо $ab$ кончића – што је управо број који пишемо на табли. У једном тренутку долазимо до позиције када су све гомиле величине 1, значи да смо исекли све везе. Дакле, сума бројева на табли је једнака броју $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$.

**82**. Нека је $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. На почетку елемент $a_1$ обојимо бело, а затим редом бојимо елементе једном од две боје, белом или црном, тако да буду задовољени услови задатка. Из услова задатка за $i = j$ добијемо да је $|A_i| \neq 1$, па ниједан скуп није једночлан. Претпоставимо да у једном тренутку дођемо у ситуацију да елемент $a_k$ не можемо да обојимо ни белом ни црном бојом. То би значило да постоје скупови $A_i$ и $A_j$, који садрже $a_k$ и чији су остали елементи исте боје, у једном скупу беле, а у другом црне. Међутим, тада би њихов пресек био једночлан. Контрадикција!

**83**. За свака два ученика посматрамо скуп проблема који они нису решили. Треба показати да постоји неки пар који је празан. Број парова ученика је $\binom{100}{2} = 4950$. За сваки проблем постоје највише $100 - 60 = 40$ ученика који га нису решили. Од њих можемо да направимо укупно $\binom{40}{2}$ парова за сваки проблем. Стога је највећи број парова који имају неурађен задатак $5 \cdot \binom{40}{2} = 3900$, што је мање од укупног броја парова 4950. Дакле, постоји пар који је решио све задатке.

**84**. Ако наставимо да пишемо следеће чланове низа видимо да се четворка $7, 3, 6, 7$ у првих неколико не појављује, а и задатак би био сувише једноставан ако бисмо тако дошли до одговора. Кренимо стога обрнуто. Претпоставимо да се у низу јавља $7, 3, 6, 7$ и одредимо неколико чланова који следе. Тада добијамо

$$\mathbf{7}, \mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, 3, 9, 5, 4, \mathbf{1}, \mathbf{9}, \mathbf{9}, \mathbf{3}, 2, 3, 7, \ldots \tag{2.25}$$

За нас је битно да уочимо да се у овом низу налази четворка $1, 9, 9, 3$. Поставља се питање да ли ће се четворка $7, 3, 6, 7$ у (2.25) поновити. Како постоји $10^4$ могућих четворки, међу 10001-ном четворком из низа (2.25) сигурно имамо понављање, па имамо период. Како низ $1, 9, 9, 3$ јединствено можемо продужити у оба смера, закључујемо да је период облика $1, 9, 9, 3, 2, 3, 7, 5, \ldots, \mathbf{7}, \mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, 3, 9, 5, 4$. Дакле, у низу ће се појавити четворка $7, 3, 6, 7$.

**85**. Од $2n$ врста и колона изеберимо ону са најмање каменчића. Претпоставимо да је на тај начин изабрана нека врста и да је на њој $k$ каменчића. Ако је $k \geqslant \frac{n}{2}$, онда свака враста има најмање $\frac{n}{2}$ каменчића, односно на табли је најмање $\frac{n^2}{2}$ каменчића. Претпоставимо да је $k < \frac{n}{2}$. Тада у изабраној врсти има $n - k$ слободних квадрата, а најмање $(n-k)^2$ каменчића се налази у колонама које садрже те празне квадратиће.

Свака од преосталих $k$ колона има најмање $k$ каменчића. Према томе, на табли се налази најмање $(n-k)^2+k^2$ каменчића. Остаје да покажемо да је

$$(n-k)^2+k^2>\frac{n^2}{2}.$$

Размотримо посебно случајеве када је $n$ паран и када је $n$ непаран број:

$$(n-k)^2+k^2=\frac{n^2}{2}+\frac{(n-2k)^2}{2}\geqslant\begin{cases}\dfrac{n^2}{2}, & n-\text{паран},\\ \dfrac{n^2+1}{2}, & n-\text{непаран}.\end{cases}$$

Један од могућих распореда, уколико је $n$ паран, је да на све црне квадратиће (њих тада има $\frac{n^2}{2}$) ставимо по каменчић. Уколико је $n$ непарно, имамо $\frac{n^2+1}{2}$ квадратића који су исте боје (боје угаоних квадратића на табли), па у том случају на њих ставимо по каменчић.

**86**. Примењујући три дозвољене операције на $f(x)$ и $g(x)$ треба да добијемо полином $P(f(x),g(x))$, такав да је за свако $x$ испуњено $P(f(x),g(x))=x$.

(а) Показаћемо да постоји $x_0$ такво да је $P(f(x_0),g(x_0))\neq x_0$. Како је $f(2)=g(2)=6$ следи да $6\mid P(f(2),g(2))$. Али како $6\nmid 2$, закључујемо да је $P(f(2),g(2))\neq 2$. Дакле, у овом случају, одговор је негативан.

(б) Како је $f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=1$ следи да је $P\left(f\left(\frac{1}{2}\right),g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ цео број. Пошто $\frac{1}{2}$ није цео број, закључујемо да је $P\left(f\left(\frac{1}{2}\right),g\left(\frac{1}{2}\right)\right)\neq\frac{1}{2}$. Дакле, и у овом случају одговор је негативан.

(в) У овом случају је могуће добити полином $h(x)=x$. Заиста, за свако $x$ важи

$$(f(x)-g(x))^2+2g(x)-3f(x)=x.$$

**87**. Лако се уочава да је једно решење $n=2$, јер је $13^2=5^2+12^2$, као и да $n=1$ и $n=3$ нису решења. Размотримо сада засебно случајеве када је $n$ непарно и парно.

Нека је $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$. Тада важи

$$5^{2k+1}+12^{2k+1}\equiv 2^{2k}\cdot 2\equiv(-1)^k\cdot 2\equiv\pm 2\pmod 5.$$

Међутим, како квадрати природних бројева при дељењу са 5 дају остатке 0, 1 или 4, закључујемо да дати израз у овом случају не може бити квадрат природног броја.

Нека је, сада, $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Претпоставимо да постоји $x\in\mathbb{N}$ тако да је $x^2=5^n+12^n$. Тада је $5^{2k}=(x-12^k)(x+12^k)$. Ако би број 5 делио оба чиниоца, тада би 5 делио и њихову разлику, $(x+12^k)-(x-12^k)=2\cdot 12^k$, што је немогуће. Дакле, мора бити $x+12^k=5^{2k}$, а $x-12^k=1$. Одузимањем последње две једнакости добијамо $5^{2k}-1=2\cdot 12^k$. За $k\geqslant 2$ важи неједнакост $25^k-1>24^k=2^k\cdot 12^k>2\cdot 12^k$, па је једино решење $n=2$.

**88**. Нека је $S = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}$. Ако је неки од бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ једнак 1, онда је $S > 1$. Ако то није случај, онда је

$$\begin{aligned} S &\leqslant \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1. \end{aligned}$$

Овим је тврђење доказано.

**89**. Приметимо да због услова $abc = 1$ важи $a + b + c = ab \cdot ca + bc \cdot ab + cb \cdot ac$. Када применимо познату неједнакост $3(xy + yz + xz) \leqslant (x + y + z)^2$ добијамо

$$a + b + c \leqslant \frac{(ab + bc + ac)^2}{3}.$$

Када то применимо на израз са леве стране тражене неједнакости добијамо:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{a+b+c} &\geqslant 1 + \frac{9}{(ab+bc+ac)^2} = \left(1 - \frac{3}{ab+bc+ac}\right)^2 + \frac{6}{ab+bc+ac} \\ &\geqslant \frac{6}{ab+bc+ac}. \end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c = 1$.

**90**. Израз $(a^3 - a + 2)^2 - 4a^2(a^2 + 1)(a - 2)$ је дискриминанта квадратне једначине $a^2(a - 2)x^2 - (a^3 - a + 2)x + (a^2 + 1) = 0$. Посматрајмо, сада, функцију

$$f(x) = a^2(a - 2)x^2 - (a^3 - a + 2)x + (a^2 + 1).$$

На основу тога што је график функције $f$ парабола и $f(0) = a^2 + 1 > 0$, а $f(1) = -(a^2 - a + 1) < 0$, закључујемо да постоје $x_1$ и $x_2$ такви да је $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Дакле, квадратна једначина $a^2(a - 2)x^2 - (a^3 - a + 2)x + (a^2 + 1) = 0$ има два решења, па је њена дискриминанта позитивна, тј. $(a^3 - a + 2)^2 > 4a^2(a^2 + 1)(a - 2)$.

**91**. Уместо максимума израза $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$, прво ћемо одредити максимум израза

$$\frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}a^2 + 2b^2\right) = 4a^2 + 3b^2.$$

Биће нам потребно и очигледно тврђење:

$$|u| \leqslant 1,\ |v| \leqslant 1 \ \Rightarrow\ |u - v| \leqslant 2. \tag{2.26}$$

Једнакост важи ако и само ако је $u = -v = 1$ или $-u = v = 1$. Неједнакост (2.26) примењујемо на $|f(x)| \leqslant 1$, за $x = 1$ и $x = 0$, и добијамо

$$2 \geqslant |f(1) - f(0)| = |a + b + c - c| = |a + b|,$$

одакле је

$$(a+b)^2 \leqslant 4. \tag{2.27}$$

Слично, за $x=-1$ и $x=0$, добијамо

$$2 \geqslant |f(-1)-f(0)| = |a-b+c-c| = |a-b|,$$

па је стога и

$$(a-b)^2 \leqslant 4. \tag{2.28}$$

На основу (2.27) и (2.28) следи да је $4a^2+3b^2 = 2(a+b)^2+2(a-b)^2-b^2 \leqslant 16$. Једнакост важи ако је $b=0$, и према томе $|a+b| = |a-b| = |a| = 2$. Онда је $|f(1)-f(0)| = |(a+c)-c| = |a| = 2$. Из (2.26) добијамо да је $|c|=1$ и $|a+c|=1$. Стога је или $c=1$, $a=-2$, $b=0$ или $c=-1$, $a=2$, $b=0$. У оба случаја $0 \leqslant |x| \leqslant 1$ имплицира $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, односно $-1 \leqslant 2x^2-1 \leqslant 1$, па је $|2x^2-1| = |-2x^2+1| = |ax^2+bx+c| \leqslant 1$. Дакле,

$$\frac{8}{3}a^2+2b^2 = \frac{2}{3}(4a^2+3b^2) \leqslant \frac{2}{3}\cdot 16 = 10\frac{2}{3}.$$

**92**. Једначина система може да се напише у облику

$$\ln(1+x)-\ln(1+y) = \frac{2x}{x+2}-\frac{2y}{y+2}.$$

Уведимо сада функцију $f:(0,2\pi)\to\mathbb{R}$ са

$$f(x) = \ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}.$$

Сада је наша једначина еквивалентна са $f(x)=f(y)$. Како је за свако $x\in(0,2\pi)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}-\frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2} > 0,$$

закључујемо да је функција $f$ строго растућа. Стога је $x=y$. Дакле, треба решити неједначину $\sin x > 1-\cos 2x = 2\sin^2 x$. Како је десна страна већа од нуле, то мора бити $x\in(0,\pi)$ и скраћивањем добијамо $\frac{1}{2} > \sin x$. Решења система су елементи скупа

$$\left\{(x,x)\;\middle|\; x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)\right\}.$$

**93**. Доказаћемо да је $S=\dfrac{n}{2}$. Како је $n$ непаран број, групишемо чланове на следећи начин:

$$S = \frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+z^2}+\frac{1}{1+z^3}+\cdots+\frac{1}{1+z^n} = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{1+z^k}+\frac{1}{1+z^{n-k}}\right)+\frac{1}{1+z^n}$$

Сређивањем израза у загради, уз $z^n = 1$, добијамо:

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2 + z^k + z^{n-k}}{1 + z^k + z^{n-k} + z^n} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n}{2}.$$

**94**. Уочимо низ бројева $a_0 = x > 0$, $a_{n+1} = f(a_n)$. На основу (1.1) важи рекурентна веза:

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0.$$

Решавањем диференцне једначине добијамо карактеристичну квадратну једначину

$$0 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3),$$

па је опште решење облика:

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n.$$

Ако је $B \neq 0$, тада низ бројева $a_n$ за велике вредности $n$ има и негативне вредности. Ово је у контрадикцији са $a_n > 0$, па закључујемо да је $B = 0$. Дакле, $a_n = A \cdot 2^n$. Како је $a_0 = x = A$, следи да је $f(x) = a_1 = 2A = 2x$. Заиста, функција $f(x) = 2x$ задовољава тражене услове.

**95**. Уочимо да је

$$f(n\pi) = (-1)^n a + (-1)^n b, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} - b \quad \text{и} \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2} + b.$$

Стога је $|a + b| \leqslant 1$ и $|2b - a| \leqslant 2$, тј. $-1 \leqslant a + b \leqslant 1$ и $-2 \leqslant 3b - a - b \leqslant 2$. Сабирајући последње две неједнакости добијамо $-3 \leqslant 3b \leqslant 3$, односно $|b| \leqslant 1$.

**96**. Нека је $\operatorname{tg}\alpha = k$, $\operatorname{tg}\beta = 2k$, $\operatorname{tg}\gamma = 3k$, где је $k > 0$ (јер би у супротном сви углови троугла били тупи). На основу једнакости

$$-3k = -\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\pi - \gamma) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{k + 2k}{1 - 2k^2}$$

закључујемо да је $k = 1$, па је $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\beta = 2$ и $\operatorname{tg}\gamma = 3$. Како су $\alpha, \beta, \gamma$ оштри углови, то је $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и слично $\sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Сада применом синусне теореме добијамо да је $AC = 2\sqrt{2}$ и $BC = \sqrt{5}$, те је обим троугла $ABC$ једнак $\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 3$.

**97**. Посматрајмо троуглове $ABO$, $BCO$. Висина из темена $B$ је заједничка за ова два троугла, па како су им површине једнаке, закључујемо да је $AO = OC$. На исти начин, посматрајући троуглове $BCO$ и $CDO$, долазимо до закључка да је $BO = OD$. Дакле, у датом четвороуглу дијагонале се полове, тј. $ABCD$ је паралелограм.

**98**. Претпоставимо да је $AO > BO$ и $DO > BO$. Нека су $B_1$ и $C_1$ централно симетричне у односу на $O$ тачкама $B$ и $C$. Означимо са $\mathcal{O}(XYZ)$ обим троугла $XYZ$. Како је троугао $B_1OC_1$ унутар троугла $AOD$, важи $\mathcal{O}(AOD) \geqslant \mathcal{O}(B_1OC_1) = \mathcal{O}(BOC)$. Једнакост важи само ако је $B_1 \equiv D$ и $C_1 \equiv A$, односно када се дијагонале тог четвороугла полове. Како је, при томе, $AB - BC = \mathcal{O}(ABO) - \mathcal{O}(BCO) = 0$, закључујемо да је четвороугао $ABCD$ ромб.

**99**. Обележимо са $P$ површину троугла $ABC$. Како је

$$P = x^2 + \frac{1}{2}(a-x)x + \frac{1}{2}(h_a - x)x,$$

закључујемо да је $x = \dfrac{2P}{a+h_a}$. Аналогно добијамо да је $y = \dfrac{2P}{b+h_b}$ и $z = \dfrac{2P}{c+h_c}$. Сада, $x = y = z$ имплицира $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Претпоставимо да је $a \neq b$. Тада је

$$a - b = h_b - h_a = \frac{2P}{b} - \frac{2P}{a} = \frac{2P(a-b)}{ab},$$

одакле следи да је $2P = ab$, односно да је $\gamma = 90^\circ$. Аналогно добијамо и да је $2P = bc$, односно да је $\alpha = 90^\circ$. Контрадикција!

**100**. а) Троуглови $AMF$ и $CMB$ су подударни, као правоугли троуглови са једнаким катетама. Одатле следи $\sphericalangle CBM = \sphericalangle AFM$, па је $\sphericalangle BN'F = 180^\circ - \sphericalangle ABN' - \sphericalangle MAN' = 180^\circ - \sphericalangle AFM - \sphericalangle MAF = 90^\circ$. Дакле, тачка $N'$ припада описаном кругу око квадрата $MBEF$, јер је угао над пречником $BF$ прав. Аналогоно, $N'$ припада описаном кругу око квадрата $AMCD$, па је $N \equiv N'$.

б) Нека је $X$ тачка на симетрали странице $AB$ са супротне стране од квадрата на растојању $\dfrac{AB}{2}$. Доказаћемо да $MN$ увек пролази кроз ову тачку. Тачка $X$ припада кружници над пречником $AB$. Из сличности $\triangle CMB \sim \triangle ANB$ следи $AN : BN = CM : BM$, а како је и $CM = AM$, добијамо $AN : BN = AM : BM$. Према томе, $NM$ је симетрала угла $\sphericalangle ANB$. Како је тачка $X$ пресек симетрале странице $AB$ и круга описаног око троугла $ABN$, закључујемо да $X$ припада и симетрали наспрамног унутрашњег угла, тј. $X \in MN$ (користили смо познато тврђење – симетрала унутрашњег угла и симетрала наспрамне странице се секу на описаном кругу).

в) За доказ тврђења користићемо аналитичку геометрију. Нека тачка $A$ има координате $(0,0)$, тачка $B(b,0)$ и $M(m,0)$. Тада су координате тачака $P$ и $Q$ редом $\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{m}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{m+b}{2}, \dfrac{b-m}{2}\right)$. Стога за средиште дужи $PQ$ добијамо $\left(\dfrac{P_x+Q_x}{2}, \dfrac{P_y+Q_y}{2}\right) = \left(\dfrac{2m+b}{4}, \dfrac{b}{4}\right)$, одакле закључујемо да је тражено геометријско место тачака дуж паралелна са $AB$ на растојању $\dfrac{AB}{4}$, а дужине једнаке $\dfrac{AB}{2}$.

**101**. Нека су подножја висина из темена $A$, $B$ и $C$ тачке $A'$, $B'$ и $C'$, редом. Тачка $M$ је средиште странице $BC$. Како је $\sphericalangle CC'B = \sphericalangle BB'C = 90^\circ$, тачке $B'$ и $C'$ леже на

кругу $\mathcal{K}$. Четвороугао $AQMP$ је тетиван, уписан у круг над пречником $AM$, коме припада и тачка $A'$. Одавде следи $\sphericalangle AA'P = \sphericalangle AQP = \sphericalangle APQ$. Из потенције тачке $A$ у односу на круг $\mathcal{K}$ добијамо

$$AP^2 = AC' \cdot AB. \tag{2.29}$$

Како је четвороугао $BA'HC'$ тетиван, уписан у круг над пречником $BH$, из потенције тачке $A$ у односу на тај круг имамо да је

$$AC' \cdot AB = AH \cdot AA'. \tag{2.30}$$

На основу (2.29) и (2.30) следи да је $AH \cdot AA' = AP^2$. Тада су троуглови $AA'P$ и $APH$ слични, јер је $AP : AA' = AH : AP$ и имају једнак захваћен угао. Дакле, $\sphericalangle APH = \sphericalangle AA'P = \sphericalangle APQ$, па су тачке $P$, $H$ и $Q$ колинеарне.

**102**. Показаћемо да је број $P_n - n$ паран. Јасно је да сви једночлани скупови $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$ (има их $n$) задовољавају услов. Све преостале подскупове са траженим својством можемо поделити у дисјунктне парове. Нека подскуп $S$ има аритметичку средину елемената једнаку $m$. Тада скуп $S$ може садржати број $m$ или не. Ако $S$ садржи $m$, тада је $(S, S \setminus \{m\})$ пар скупова са истом аритметичком средином, док ако $S$ не садржи $m$, онда је је тражени пар $(S, S \cup \{m\})$. Дакле, број $P_n - n$ је паран, па закључујемо да су бројеви $P_n$ и $n$ исте парности.

**103**. Ако са $S(n)$ означимо суму цифара природног броја $n$, тада $9 \mid (n - S(n))$. Према услову задатка имамо да је $S(n) = S(2006n)$, па је $2006n \equiv n \pmod 9$, односно $9 \mid 2005n$. Како су бројеви 9 и 2005 узајамно прости закључујемо да је $n$ дељиво са 9.

У случају бројева $n$ и $2008n$ тврђење не важи. На пример, $n = 5$ јесте решење једначине $S(n) = S(2008n)$, али број 5 није дељив са 9.

**104**. Како је функција $f(x) - g(x) = x^2 + 2(b-a)x + (1-2ab)$ парабола окренута на горе, скуп $S$ можемо дефинисати као скуп свих оних уређених парова $(a, b)$ за које је $f(x) - g(x) \neq 0$, тј. $\Delta = 4(b-a)^2 - 4(1-2ab) = 4(a^2+b^2-1) < 0$. Последња неједнакост је еквивалентна са $a^2 + b^2 < 1$. Дакле, тражени скуп $S$ је унутрашњост круга $k(O, 1)$, а површина скупа $S$ једнака је $\pi$.

**105**. Из једнакости обима троугла и четвороугла добијамо да је $AD + DM = MC + BC + AB$, односно $2DM = AB + BC + CD - AD$. Како је површина троугла $ADM$ једнака половини површине целог четвороугла $ABCM$ имамо да је

$$2AD \cdot DM \cdot \sin \sphericalangle D = AD \cdot CD \cdot \sin \sphericalangle D + AB \cdot BC \cdot \sin \sphericalangle B.$$

Узимајући у обзир да је четворугао $ABCD$ тетиван, тј. да је $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$, закључујемо да је $\sin \sphericalangle B = \sin \sphericalangle D$. Стога је $2AD \cdot DM = AD \cdot CD + AB \cdot BC$. Заменом $2DM$ у последњој једнакости одговарајућим изразом добијамо

$$AD \cdot (AB + BC + CD - AD) = AD \cdot CD + AB \cdot BC,$$

што је еквивалентно са $(AD - AB)(AD - BC) = 0$. Дакле, у четвороуглу $ABCD$ важи $AD = AB$ или $AD = BC$.

**106**. Повуцимо нормале из тачке $A$ на страницу $BU$ и на страницу $CV$ и пресечне тачке означимо са $A'$ и са $A''$, респективно. Тада је $\operatorname{tg}\sphericalangle BUA = \dfrac{AA'}{A'U}$, а $\operatorname{tg}\sphericalangle CVA = \dfrac{AA''}{A''V}$. Како је $AA' \parallel CU$ имамо да је $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AA'}{CU}$ и $\dfrac{A'U}{AC} = \dfrac{BU}{BC}$, док из $AA'' \parallel BV$ следи $\dfrac{AA''}{BA''} = \dfrac{CA''}{CV}$ и $\dfrac{A''V}{BA} = \dfrac{CV}{BC}$. На основу претходног закључујемо да је

$$\operatorname{tg}\sphericalangle BUA = \frac{BA \cdot CU \cdot BC}{BC \cdot AC \cdot BU}, \quad \operatorname{tg}\sphericalangle CVA = \frac{BV \cdot CA'' \cdot BC}{CV \cdot BA \cdot CV},$$

из чега непосредно добијамо да је

$$\operatorname{tg}\sphericalangle BUC \cdot \operatorname{tg}\sphericalangle CVA = \frac{CU \cdot BV \cdot CA'' \cdot BC}{BU \cdot CV \cdot AC \cdot CV}.$$

Уведимо ознаке $\alpha = \sphericalangle BCU$ и $\beta = \sphericalangle CBV$. Тада је $\sin\beta = \dfrac{CA''}{AC} = \dfrac{CV}{BC}$, па је $\dfrac{CA'' \cdot BC}{AC \cdot CV} = 1$. Дакле,

$$\operatorname{tg}\sphericalangle BUA \cdot \operatorname{tg}\sphericalangle CVA = \frac{CU}{BU} \cdot \frac{BV}{CV} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta = const.$$

**107**. Нека су $D$, $E$ и $F$ подножја висина $AH$, $BH$ и $CH$, респективно. Како су троуглови $AHE$ и $BEC$ слични добијамо да је $\dfrac{AH}{BC} = \dfrac{AE}{BE} = \operatorname{ctg}\alpha$. Дакле, $\dfrac{AH}{BC} = \dfrac{AH}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$. Аналогно добијамо да је $\dfrac{BH}{b} = \operatorname{ctg}\beta$ и $\dfrac{CH}{c} = \operatorname{ctg}\gamma$. Према томе је

$$\frac{AH}{a} \cdot \frac{BH}{b} \cdot \frac{CH}{c} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}.$$

Како за углове у троуглу важи $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$, на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, добијамо $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}$, односно $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \geqslant 3\sqrt{3}$. Дакле,

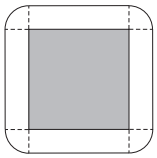
$$\frac{AH}{a} \cdot \frac{BH}{b} \cdot \frac{CH}{c} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

**108**. Функција $\operatorname{arctg} x$ је строго растућа функција и слика скуп реалних бројева у $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тако да бројеви $x$ и $\operatorname{arctg} x$ имају исти знак. За $x > 0$ је $\operatorname{arctg} x > 0$ и, аналогно, $\operatorname{arctg} x^2 > 0$ и $\operatorname{arctg} x^3 > 0$, па једначина нема решења у овом случају. Ако је $x < 0$ уводимо смену $y = -x$. Сада треба решити једначину $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} y^3 = \operatorname{arctg} y^2$ у скупу позитивних реалних бројева.

Како су сви бројеви позитивни добијамо да је $\operatorname{arctg} y < \operatorname{arctg} y^2$, што је еквивалентно са $y < y^2$, односно $1 < y$. Истим расуђивањем је $y^3 < y^2$, тј. $y > 1$. Добијамо контрадикцију, па је једино решење тривијално $x = 0$.

**109**. За свако $x$ важи $|\sin\frac{x}{2}| \leqslant 1$ и $|\sin\frac{x}{6}| \leqslant 1$, одакле следи $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 1$ и $\sin^2\left(\frac{x}{6}\right) \leqslant 1$. Дакле, $2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{6}\right) \leqslant 2$. Како за $x \neq 0$ имамо да је $\frac{1}{x^2} + x^2 \geqslant 2$ (за $x = 0$ израз није дефинисан), једначина има решења ако постоји $x$ за које истовремено важи $2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{6}\right) = 2$ и $\frac{1}{x^2} + x^2 = 2$. Друга једнакост је тачна за $x = \pm 1$. Међутим, $x = \pm 1$ нису решења прве једначине, па закључујемо да полазна једначина нема решења.

**110**. Означимо тачке са $P_1, P_2, \ldots, P_{2006}$, где је $P_1$ центар квадрата. Нека је $x_i$ растојање тачке $P_i$ до најближе од преосталих 2005 тачака. Опишимо око сваке тачке круг $C_i$ са центром у $P_i$ и полупречником $x_i/2$. Кругови $C_i$ и $C_j$ немају више од једне заједничке (додирне) тачке, због $x_i \leqslant P_iP_j$ и $x_j \leqslant P_iP_j$. Узимајући у обзир тачку $P_1$, имамо $x_i \leqslant 1/\sqrt{2}$. Сада се сви кругови налазе у области приказаној на слици 2.27.



Слика 2.27.

Како су кругови $C_i$ дисјунктни, то њихова укупна површина не прелази површину области. Дакле,

$$\frac{\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\pi}{4} \leqslant 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \pi = 1 + \sqrt{2} + \frac{\pi}{8},$$

одакле следи тражена неједнакост

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant \frac{4 + 4\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}}{\pi} < 3{,}6.$$

**111**. Нека је $A'$ подножје нормале из темена $A$, тачка $M$ средиште странице $AC$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle BCA = \gamma$. На основу услова задатка је $AC \perp MA'$, па је троугао $AA'M$ правоугли и $\sphericalangle AA'M = \gamma$. Зато је $AA'\sin\gamma = AM$, односно $AC\sin\gamma\sin\gamma = \frac{AC}{2}$. Из последњег следи да је $2\sin^2\gamma = 1$, одакле добијамо $\sin\gamma = \cos\gamma = 1/\sqrt{2}$. Ако са $R$ обележимо полупречник описане кружнице троугла $ABC$, тада је $BO = R$. Применивши синусну теорему на троуглове $ACH$ и $ABC$, добијамо

$$\frac{CH}{\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{2R\sin\beta}{\sin\beta} = 2R,$$

тј. $CH = 2R\cos\gamma$. Према томе, $\dfrac{|CH|}{|BO|} = \dfrac{2R\cos\gamma}{R} = 2\cos\gamma = \sqrt{2}$.

**112**. Број $F_m$ се завршава са $n$ деветки ако и само ако је $F_m \equiv -1 \pmod{10^n}$. Показаћемо да се за свако $n$ може наћи Фибоначијев број који се завршава са $n$ деветки. Посматрајмо Фибоначијев низ по модулу $10^n$ и узмимо $10^{2n} + 2$ првих чланова низа. Они

формирају $10^{2n}+1$ узастопних парова $(r_{F_1}, r_{F_2}), (r_{F_2}, r_{F_3}), \ldots$. Пошто постоји $10^{2n}$ могућих различитих парова, неки пар се мора поновити (Дирихлеов принцип). Како свака два узастопна Фибоначијева броја јединствено одређују следећи, као и претходни члан низа, следи да је први пар који се понавља пар $(1,1)$ и имамо периодичност

$$1, 1, 2, 3, 5, \ldots, r_{F_{p-2}}, r_{F_{p-1}}, r_{F_p}, 1, 1.$$

Сада није тешко видети да је $r_{F_p} = 1-1 = 0$, $r_{F_{p-1}} = 1-0 = 1$ и, најзад, $r_{F_{p-2}} = 0-1 = -1$. Дакле, за свако $n$ постоји Фибоначијев број који се завршава са $n$ деветки, па постоји и Фибоначијев број који се завршава са 2006 деветки.

**113**. Задатак се најлакше решава помоћу вектора или комплексних бројева. Нека је координатни почетак центар описаног круга $\triangle ABC$. Означимо векторе $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{h}$. Хамилтонова теорема даје једнакост $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. Из услова задатка је $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$. Означимо тачку $X = \overrightarrow{h} + \overrightarrow{AM}$. Доказаћемо да је $MX \perp BC$, што је еквивалентно са:

$$\begin{aligned} MX \cdot BC &= (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{h} - \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) \\ &= \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} = |c|^2 - |b|^2 = 0. \end{aligned}$$

Аналогно је $XN \perp AB$, па је тачка $X$ пресек правих $NE$ и $MD$. Тачке $D$ и $E$ припадају кругу над пречником $XB$, па једино остаје да покажемо да је $\sphericalangle XHB = 90^\circ$. Ово директно следи из дефиниције ортоцентра и нормалности $BH \perp AM$.

**114**. Докажимо најпре следећу лему.

Лема. Нека је $p$ природан број и нека важи $p \mid (5^x - 4^x)$ и $p \mid (5^y - 4^y)$, где је $x > y$. Тада $p \mid (5^d - 4^d)$, где је $d$ највећи заједнички делилац за бројеве $x$ и $y$.

*Доказ.* Очигледно је да је број $p$ узајамно прост са 5 и 4. Одузимањем добијамо да $p$ дели $5^x - 4^x - 5^{x-y}(5^y - 4^y) = 5^{x-y}4^y - 4^x = 4^y(5^{x-y} - 4^{x-y})$. Сада следи $p \mid (5^{x-y} - 4^{x-y})$. Даље, пратећи Еуклидов алгоритам за налажење највећег заједничког делиоца, добијамо да $p$ дели $5^d - 4^d$. $\square$

Број $5^n - 4^n$ је непаран, па следи да је $n$ непаран број. Означимо $5^n - 4^n = a_n$. Стандардна техника је да посматрамо најмањи прост делилац $p$ броја $n$ – наравно $p$ не може бити 2 или 5. Из мале Фермаове теореме следи

$$5^{p-1} - 4^{p-1} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Зато $p \mid a_{p-1}$ и, наравно, $p \mid a_n$. Из леме закључујемо да $p$ дели и $a_{d(p-1,n)} = a_1 = 1$, јер су бројеви $p-1$ и $n$ узајамно прости. Дакле, једино решење је $n = 1$.

**115**. Када логаритмујемо обе стране добијамо еквивалентну неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\Big(1 + \frac{1}{x_i}\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \ln\Big(\frac{n - x_i}{1 - x_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \ln\Big(1 + \frac{n-1}{1 - x_i}\Big).$$

Уочимо функцију $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x$. Она је конвексна, јер је

$$f''(x) = (\ln(x+1) - \ln x)'' = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} > 0.$$

Сада треба доказати неједнакост (еквивалентну полазној)

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{1-x_i}{n-1}\Big).$$

Користећи чињеницу $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ и Јенсенову неједнакост за конвексне функције, добијамо да је

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j\neq i} f(x_j)}{n-1}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{i-1})+f(x_{i+1})+\cdots+f(x_n)}{n-1}\\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n}{n-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{1-x_i}{n-1}\Big).\end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$.

**116**. Нека је $x = \overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}} \in \mathbb{N}$. Тада је $\overline{a_1a_2\ldots a_n} = 10x + a_n$ и $\sqrt{10x+a_n} - \sqrt{x} = a_n$, тј. $10x + a_n = x + a_n^2 + 2a_n\sqrt{x}$. Последња једначина се може записати у облику $9x = a_n(a_n + 2\sqrt{x} - 1)$. Како је $a_n \leqslant 9$, добијамо $x \leqslant a_n + 2\sqrt{x} - 1$, односно $(\sqrt{x}-1)^2 \leqslant a_n \leqslant 9$, што имплицира $\sqrt{x} \leqslant 4$ или $x \leqslant 16$. Поред тога, $a_n \neq 0$ (јер би у супротном било $x = 0$) и $\sqrt{x} = \dfrac{9x + a_n - a_n^2}{2a_n}$ је рационалан број, па $x$ мора бити потпун квадрат. Како је $\sqrt{10x+a_n} = a_n + \sqrt{x}$, то и $10x + a_n$ мора бити потпун квадрат. Разматрајући могуће случајеве $x \in \{1, 4, 9, 16\}$ добијамо да је $x = 16$, $a_n = 9$ и $n = 3$. Тада је $\sqrt{169} - \sqrt{16} = 9$.

**117**. (а) Како су $\alpha$ и $\beta$ корени једначине $x^2 + px + q = 0$, то је $\alpha + \beta = -p$ и $\alpha\beta = q$. Према томе,

$$\begin{aligned}(-1)^n &= \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\alpha-\beta}\\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[-(\alpha+\beta)(\alpha\beta)^{n+1} + (\alpha^3+\beta^3)(\alpha\beta)^n\right]\\ &= \frac{1}{p^2-4q}\left(pq^{n+1} - p(p^2-3q)q^n\right)\\ &= \frac{q^n}{p^2-4q}\left(-p^3+4pq\right) = -pq^n.\end{aligned}$$

За $n = 1$ и $n = 2$ важи $pq = 1$ и $pq^2 = -1$, одакле се добија $p = -1$ и $q = -1$. Директна провера показује да $p = -1$ и $q = -1$ задовољавају $pq^n = (-1)^{n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Такође, $\alpha \neq \beta$.

(б) Пошто су $\alpha$ и $\beta$ корени једначине $x^2 - x - 1 = 0$, то је $\alpha^2 = \alpha + 1$ и $\beta^2 = \beta + 1$, па је

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n(1+\alpha) - \beta^n(1+\beta)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n\alpha^2 - \beta^n\beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = a_{n+2}. \end{aligned}$$

Пошто је $a_1 = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$ и $a_2 = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1$, то индукцијом из

$$a_n + a_{n+1} = a_{n+2} \tag{2.31}$$

следи да је $a_n \in \mathbb{Z}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Из (2.31) следи

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} = a_{n+1} + a_n + a_{n+1} = 2a_{n+1} + a_n.$$

Како је $a_3 = a_1 + a_2 = 2$ паран број, то се индукцијом лако може показати да је $a_n$ паран број за $n = 3k$.

**118**. Покажимо најпре да једначина $x^2 - 2y^2 = -1$ има бесконачно много решења у скупу природних бројева. Није тешко видети да је пар $(1, 1)$ решење дате једначине. Формулом

$$x_n + y_n\sqrt{2} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

дато је бесконачно много решења дате једначине. Заиста, из

$$x_n + y_n\sqrt{2} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^{2n-1} \quad \text{и} \quad x_n - y_n\sqrt{2} = \left(1 - \sqrt{2}\right)^{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

следи

$$x_n^2 - 2y_n^2 = \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right)\left(x_n - y_n\sqrt{2}\right) = \left(1 + \sqrt{2}\right)^{2n-1}\left(1 - \sqrt{2}\right)^{2n-1} = -1.$$

Нека је $(x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, бесконачан низ решења једначине $x^2 - 2y^2 = -1$ у скупу природних бројева. За произвољно $n$ имамо да је $x_n^2 - 2y_n^2 = -1$, одакле је $x_n^4 + x_n^2 = 2x_n^2y_n^2$ и

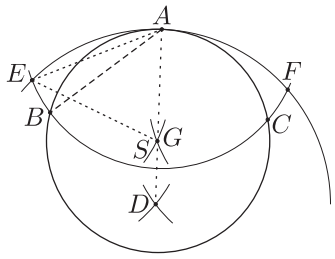
$$\left[\sqrt{2x_n^2y_n^2}\right] = \left[x_ny_n\sqrt{2}\right] = x_n^2,$$

јер је

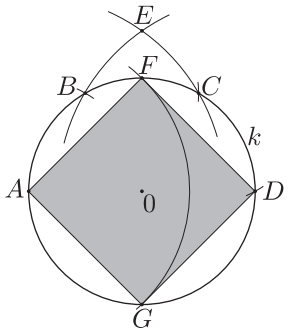
$$x_n^2 < \sqrt{x_n^4 + x_n^2} = x_ny_n\sqrt{2} < \sqrt{x_n^4 + 2x_n^2 + 1} = x_n^2 + 1.$$

**119**. Из произвољне тачке $A$ на датој кружници конструишемо лук произвољног полупречника (слика 2.28). Нека су $B$ и $C$ пресечне тачке овог лука са кружницом. Означимо са $D$ пресечну тачку лукова конструисаних из тачака $B$ и $C$ као центара с полупречником $AB$ (у зависности од полупречника првог лука, конструисаног из тачке $A$, тачка $D$ може бити у кругу или ван њега). Конструишимо сада лук са центром у $D$ полупречника $AD$. Нека су $E$ и $F$ пресечне тачке тог лука и првог конструисаног лука (с центром у $A$). Конструишимо сада лукове са центрима у $E$ и $F$ полупречника $AE$. Нека је пресек та два лука тачка $G$. Доказаћемо да је $G$ центар кружнице.

Означимо центар кружнице са $S$. Приметимо да је $AE = AB$ и $AS = BS = r$, где је $r$ полупречник кружнице. Нека је $\sphericalangle EAD = \alpha$ и $\sphericalangle BAD = \beta$. Троуглови $ABD$ и $ABS$ су слични јер имају исти угао $\beta$ на основицама $AD$ и $AB$. Троуглови $AED$ и $AGE$ су такође слични, јер на основицама $AE$ и $AG$ имају исти угао $\alpha$. Из сличности троуглова $ABD$ и $ABS$ следи $AB : AS = AD : AB$, тј. $AB^2 = AE^2 = r \cdot AD$, а из сличности троуглова $AED$ и $AGE$ следи $AD : AE = AE : AG$, тј. $AG = AE^2/AD$, па је $AG = r$. Тачка $G$ се налази на пречнику кроз $A$ због симетрије конструисаних лукова у односу на тачку $A$. Према томе, тачка $G$ се поклапа са $S$, тј. $G$ је центар кружнице.




Слика 2.28.




Слика 2.29.

**120**. Нека је $k$ задата кружница чији је центар тачка $O$, а полупречник $r$ (слика 2.29). Са отвором шестара једнаким овом полупречнику одредимо на кружници тачке $A, B, C$ и $D$. Очигледно су тетиве $AB, BC$ и $CD$ једнаке међу собом, док је тетива $AD$ једнака пречнику круга. Сада из тачака $A$ и $D$ конструишемо лукове полупречника $AC$ и њихов пресек ћемо обележити са $E$. Опишимо сада лук са центром у $A$ полупречника $OE$. Пресечне тачке овог лука и задате кружнице $k$ обележимо са $F$ и $G$. Докажимо да тачке $A$, $F$, $D$ и $G$ деле кручницу на четири једнака дела, тј. представљају темена квадрата уписаног у дати круг. Тачке $A$, $B$, $C$ и $D$ представљају темена правилног шесторугла, па је централни угао над тетивом $AC$ једнак $120°$. У једнакокраком троуглу $AOC$ је $AC = 2\sqrt{3} = AE$. Из правоуглог троугла $AOE$ добијамо $OE = \sqrt{AE^2 - OA^2} = r\sqrt{2} = AF$. Како је $AF = GA$, а тачке $F$ и $G$ представљају темена правих углова (над пречником $AD$), то је $FD = DG = r\sqrt{2}$, тј. тетиве $AF, FD, DG$ и $GA$ једнаке су страници квадрата уписаног у круг полупречника $r$.

**121**. Да би се утврдило која кутија садржи неисправне новчиће потребно је извршити само

једно мерење. У том циљу из прве кутије узмемо један новчић, из друге два, из треће три, итд., и на крају из десете кутије узмемо свих десет новчића. Све изабране новчиће, којих има $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$, стављамо на вагу. Због присуства неисправних новчића, вага ће показати масу $55m - k$, где је $m$ маса исправног ночића, а $k$ је број кутије у којој су неисправни новчићи (јер смо из $k$-те кутије узели $k$ новчића).

**122**. Нека је полупречник круга $R$, а максималне брзине човека и тигра редом $v$ и $4v$. Математичар може да побегне из круга, користећи следећи алгоритам: конструише концентричан круг полупречника „мало мањег" од $\frac{R}{4}$ и почне да трчи по њему. Циљ му је да дође у дијаметрално супротну тачку у односу на тигра. Како је његова максимална угаона брзина већа од тигрове, то ће у једном тренутку математичар, центар круга и тигар бити колинеарни. Остаје још да упоредимо времена: математичару треба $t_1 = \frac{3R}{4v}$ да изађе из круга најкраћим путем, а тигру треба $t_2 = \frac{R\pi}{4v}$ да стигне пре математичара у излазну тачку. Како је очигледно $t_1 < t_2$, математичар побеђује.

**123**. Доказаћемо да играч $B$ има победничку стратегију. После потеза првог играча, $B$ држи једну карту више него играч $A$. Уколико $B$ има карту са којом је збир карата на талону дељив са $2n + 1$, он је баца и побеђује. У супротном, за сваку од карата првог играча $B$ има највише по једну карту коју не сме да одигра. Према томе, играч $B$ уколико не може да победи, он баца преосталу сигурну карту. Овом стратегијом играч $B$ не може да изгуби партију. Како је збир свих бројева на картама једнак

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (2n - 1) + 2n = n(2n + 1),$$

он је дељив са $2n + 1$ и играч $B$, ако не раније, побеђује на крају.

**124**. Претпоставимо да једначина $x^2 - |x| + a = 0$ има јединствено решење $x = x_0$. Тада је и $x = -x_0$ решење, па следи да је $x_0 = 0$. Даље следи да је $a = 0$, тј. једначина постаје $x^2 - |x| = 0$. Међутим, ова једначина има три решења $-1, 0, 1$. Контарадикција! Дакле, не постоји реалан број $a$ за који једначина $x^2 - |x| + a = 0$ има јединствено решење.

**125**. Ако одузмемо четврту једначину од прве и шесту од треће добијамо

$$x_1 - x_3 = a_2(a_1 - a_3) = a_4(a_1 - a_3),$$

одакле следи $(a_1 - a_3)(a_2 - a_4) = 0$. Аналогно добијамо да је $(a_1 - a_2)(a_3 - a_4) = 0$ и $(a_1 - a_4)(a_2 - a_3) = 0$. Из три добијене једнакости следи да је потребан услов да би систем имао решења, да три од дата четири параметра буду међусобно једнака. Овај услов је и довољан. Нека је, на пример, $a_1 = a_2 = a_3 = a$ и $a_4 = b$. Тада систем има решење $(\frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}a^2 a(b - \frac{a}{2}))$.

**126**. Претпоставимо да постоје природни бројеви $n$, $k$ и $l$ такви да је

$$2^{2^n} + 1 = k^5 - l^5 = (k - l)(k^4 + k^3 l + k^2 l^2 + k l^3 + l^4)$$

прост број. Тада је $k - l = 1$, одакле закључујемо да је

$$2^{2^n} + 1 = (l + 1)^5 - l^5 = 5l^4 + 10l^3 + 10l^2 + 5l + 1,$$

односно $2^{2^n} = 5(l^4 + 2l^3 + 2l^2 + l)$, што је немогуће ($5 \nmid 2^{2^n}$). Дакле, не постоје природни бројеви $n, k$ и $l$ такви да за прост број $p = 2^{2^n} + 1$ важи $2^{2^n} + 1 = k^5 - l^5$.

**127**. Докажимо најпре да су бројеви $a, b, c$ и $d$ узајамно прости по паровима методом бесконачног спуста. Претпоставимо супротно - нека је $(a, b, c, d)$ четворка код које је минималан збир $a+b+c+d$. Без губљења општости можемо узети да је $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Посматрајмо квадратну функцију: $f(x) = x^2 - 4bcdx + b^2 + c^2 + d^2$. Ова функција има две целобројне нуле, $a$ и $e = 4bcd - a$. Уочимо да је

$$f(b) \leqslant 4b^2 - 4b^2cd = 4b^2(1 - cd) \leqslant 0.$$

Ако би било $f(b) = 0$, онда се знак једнакости у претходној неједнакости достиже оба пута, па је $b = c = d = 1$. Ово није могуће, пошто су онда бројеви $a$, $b$, $c$ и $d$ узајамно прости по паровима. Остаје да видимо шта је у случају $f(b) < 0$. Број $a$ је већа нула функције $f$, јер је $a \geqslant b$ и функција $f$ је конвексна. Нека је $s = d(e, b)$ највећи заједнички делилац за бројеве $e$ и $b$. Онда $s \mid a$, одакле следи да $s \mid d(a, b)$. Како $d(a, b) \mid 4bcd - a = e$ и $d(a, b) \mid b$, то $d(a, b) \mid s$, па је $s = d(a, b)$. Аналогно је $d(e, c) = d(a, c)$ и $d(e, d) = d(a, d)$. Одавде закључујемо да бројеви $e, b, c$ и $d$ нису узајамно прости по паровима, па нису ни бројеви $a, b, c$ и $d$. Међутим, сада смо дошли до контрадикције пошто је $e + b + c + d < a + b + c + d$, а то је у супротности са избором четворке $(a, b, c, d)$.

Претпоставимо да је неки од бројева $a, b, c$ или $d$ дељив са 5. Из претходног дела знамо да остала три броја онда нису дељива са 5, па њихови квадрати при дељењу са 5 дају остатак 1 или $-1$. Зато израз $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ при дељењу са 5 даје један од остатака $-3, -1, 1$ или 3. Ово је контрадикција, јер је $4abcd$ дељиво са 5.

**128**. За свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ постоји $\binom{n-i}{k-1}$ подскупова, који су величине $k$ и чији је минимални елемент $i$. Такође, постоји $\binom{i-1}{k-1}$ $k$-елементних подскупова са максималним елементом $i$. Зато је

$$\begin{aligned} x_k = \frac{1}{n+1}\Bigg[&1 \cdot \binom{n-1}{k-1} + 2 \cdot \binom{n-2}{k-1} + \cdots + (n+1-k) \cdot \binom{k-1}{k-1} \\ &+ n \cdot \binom{n-1}{k-1} + (n-1) \cdot \binom{n-2}{k-1} + \cdots + k \cdot \binom{k-1}{k-1}\Bigg] \\ = \binom{n-1}{k-1} &+ \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Користећи познату једнакост за биномне коефицијенте:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad k, n \in \mathbb{N}, k \leqslant n,$$

добијамо да је $x_k = \binom{n}{k}$, па су сви бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ природни. Како је

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2 \equiv 2 \pmod 4,$$

то не могу сви бројеви бити дељиви са 4.

**129**. Одредимо знак производа $(a-1)(b-1)(c-1)$. На основу тога што је

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ac - bc - ab + a + b + c - 1\\ &= (abc-1) + (a+b+c) - (ab+bc+ac)\\ &= a+b+c-abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\ &= a+b+c-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\end{aligned}$$

закључујемо да је $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$. То је могуће или ако су $a-1, b-1, c-1$ позитивни или ако су два чиниоца негативна, а један позитиван. У првом случају имамо да је $a > 1, b > 1$ и $c > 1$ одакле следи да је $abc > 1$, што је у супротности са претпоставком задатка ($abc = 1$). Дакле, два чиниоца су негативна, а један је позитиван, тј. тачно један од бројева $a, b, c$ је већи од 1.

**130**. Ако је $a = b = c = 0$ једнакост је тачна. Нека је, сада, $s = a+b+c > 0$. Тада је

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\\ &=\frac{a}{s}-\frac{a(1-a)}{s(b+c+1)}+\frac{b}{s}-\frac{b(1-b)}{s(a+c+1)}+\frac{c}{s}-\frac{c(1-c)}{s(a+b+1)}\\ &\quad+(1-a)(1-b)(1-c)\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}\right)\\ &=\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}-\frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right)\\ &\quad-\frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{a+c+1}-(1-a)(1-c)\right)\\ &\quad-\frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1}-(1-a)(1-b)\right).\end{aligned}$$

Како важи $\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}=1$, $\frac{a(1-a)}{s} \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c) &= \frac{(b+c)^2-bc(b+c+1)}{b+c+1}\\ &\geqslant \frac{(b+c)^2-3bc}{b+c+1} = \frac{(b-c)^2+bc}{b+c+1} \geqslant 0,\end{aligned}$$

а аналогне неједнакости важе и за друге изразе, закључујемо да за $a, b, c \in [0,1]$ важи

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

**131**. Полиноми $P(x)$ и $Q(1-x)$ су иредуцибилни полиноми са рационалним коефицијентима. Како је $P(\alpha) = Q(1-\alpha) = Q(\beta) = 0$, закључујемо да ова два полинома

имају заједнички корен $\alpha$. Претпоставимо да ова два полинома нису једнака до на мултипликативну константу. Тада је највећи заједнички делилац за полиноме $P(x)$ и $Q(1-x)$ степена већег или једнаког од 1, па су $P$ и $Q$ растављиви у скупу рационалних бројева. Контрадикција! Дакле, $P(x) = cQ(1-x)$ за неки рационални број $c$, тј. $\deg P(x) = \deg Q(x)$.

**132**. Нека су дате координате тачака у равни $A(x,0)$, $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ и $C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Тада је израз $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$ једнак дужини $AB - AC$. Када $x$ прође скупом $(-\infty, +\infty)$, тачка $A$ се креће по $x$ оси. Из неједнакости троугла добијамо:

$$-1 = -BC < AB - AC < BC = 1.$$

Дакле, све бројеве из интервала $(-1,1)$ је могуће добити за одговарајућу вредност $x$.

**133**. После логаритмовања једначине добијамо:

$$\log_{2007} x \cdot \log_{2007} x + \log_{2007} 2007^{\frac{1}{2}} = 2007 \log_{2007} x.$$

Уведимо смену $a = \log_{2007} x$. Сада је једначина еквивалентна са $a^2 - 2007a + \frac{1}{2} = 0$. Збир решења ове једначине по Виетовим правилима је $a_1 + a_2 = 2007$. Тада су сва решења полазне једначине бројеви $x_1 = 2007^{a_1}$ и $x_2 = 2007^{a_2}$, па је њихов производ једнак $x_1 \cdot x_2 = 2007^{2007}$. Остаје да израчунамо остатак овог броја при дељењу са 100. Како је $7^4 = 2401$, то су последње две цифре степена седмице редом $07, 49, 43, 01$, са периодом дужине четири. Из конгруенције $2007 \equiv 3 \pmod 4$ следи да су последње две цифре броја $2007^{2007}$ једнаке 43.

**134**. Област дефинисаности једначине добијамо из услова $1 - x \geqslant 0$ и $x > 0$, $x \neq 1$. Дакле, $x \in (0,1)$. Како је $5^{\sqrt{1-x}} > 1$, закључујемо да је $\log_x 5^{\sqrt{1-x}} < 0$, тј. $\operatorname{sgn} \log_x 5^{\sqrt{1-x}} = -1$. Сада, користећи да је $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$, добијамо да је $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$, односно $2^{2\cos 2x} + 2 \cdot 2^{\cos 2x} - 3 = 0$. Уводећи смену $2^{\cos 2x} = t$ долазимо до квадратне једначине $t^2 + 2t - 3 = 0$, чија су решења $t_1 = -3$ и $t_2 = 1$. Како је $2^{\cos 2x} > 0$, следи да је $2^{\cos 2x} = 1$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. Узимајући у обзир да је $x \in (0,1)$, закључујемо да једначина има јединствено решење $x = \frac{\pi}{4}$.

**135**. Нека је $p$ целобројни корен дате једначине. Тада је $p^3 - np^2 + pn - n^2 = 1$, тј. $(p^2+n)(p-n) = 1$.

Разликоваћемо два случаја.

$(i)$ $p^2 + n = p - n = -1$.

Овде је $n = p+1$ и $-1 = p^2 + (p+1)$, па следи $p^2 + p + 2 = 0$, што нема целобројних решења.

$(ii)$ $p^2 + n = p - n = 1$.

Овде је $n = p-1$ и $1 = p^2 + (p-1)$, па следи $p^2 + p - 2 = (p-1)(p+2) = 0$, одакле је $p = 1$ или $p = -2$.

Према томе, једначина има целобројна решења ако је $n = 0$ или $n = -3$.

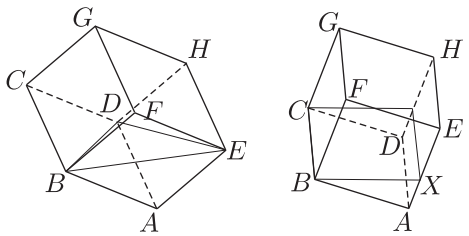
**136**. Конструишемо граф $G = (V, E)$ на следећи начин: чворови су дате тачке, а ивица постоји између два чвора ако је дужина одговарајуће тетиве већа од $\sqrt{3}$. Није тешко приметити да у датом графу не постоји троугао, јер је страница једнакостраничног троугла уписаног у јединични круг $\sqrt{3}$.

Доказујемо индукцијом неједнакост $|E| \leqslant \frac{|V|^2}{4}$, за граф $G = (V, E)$ који не садржи троуглове. За $|V| = 1$ и $|V| = 2$ база је очигледна. Доказујемо индукцијски корак са $|V|$ на $|V| + 2$; зато посматрамо два чвора $A$ и $B$ који су међусобно спојени ивицом (уколико не постоје тада је $|E| = 0$). Укупан број ивица које полазе из $A$ и $B$ не прелази $V$, јер је сваки од преосталих чворова повезан са највише једним од њих. Сада је

$$E \leqslant \frac{V^2}{4} + 1 + V = \frac{(V+2)^2}{4}.$$

Овим је неједнакост доказана.

**137**. Поставимо суд на теме $A$ и наливамо у њега воду све док се површина не поклопи са равни $EBD$ (слика 2.30). Приметимо да у том моменту вода заузима $\frac{1}{6}$ запремине суда. Не проливајући воду, поставимо посуду на ивицу $AD$. Нагнимо суд (ослоњен на ивицу $AD$) тако да површина воде „пролази" кроз ивицу $BC$. Означимо на ивици $AE$ тачку $X$ која представља „пресек" ове ивице и површине воде. Очигледно је $AX = \frac{1}{3}AE$. Поставимо сада суд на основу $ABCD$ и долијемо воду до тачке $X$.




Слика 2.30.

**138**. Конструишимо тачку $D$, тако да је $CD$ паралелно са $AB$ и $DB$ паралелно са $AC$. Четвороугао $ABDC$ је паралелограм, и важи $AC = BD = BX$ и $AB = DC = CY$. Троуглови $BDX, CDY$ и $AXY$ су једнакокраки. Због паралелности добијамо $\sphericalangle BDX = \sphericalangle BXD = \sphericalangle XDC$ и $\sphericalangle CDY = \sphericalangle CYD = \sphericalangle YDB$. Закључак је да тачке $X$ и $Y$ леже на симетрали $\sphericalangle BDC$, па су тачке $X, Y, P, D$ колинеарне. Како су троуглови $ABC$ и $DCB$ подударни, треба показати да је $\sphericalangle BDC + \sphericalangle BPC = 180°$, односно да је четвороугао $BPCD$ тетиван. Ово директно следи из чињенице да се симетрала угла и симетрала наспрамне странице секу на описаном кругу око троугла.

**139**. Из услова задатка $\frac{IP}{IB} = \frac{IQ}{IA}$ није тешко закључити да су троуглови $IPQ$ и $IBA$ слични, па следи да је четвороугао $ABQP$ тетиван. Сада је $\sphericalangle IPQ = \frac{\beta}{2}$ и $\sphericalangle IQP = \frac{\alpha}{2}$. Аналогно добијамо да су и четвороуглови $BCRQ$ и $ACRP$ тетивни. Углови троугла $PQR$ су $\sphericalangle RPQ = 90° - \frac{\alpha}{2}, \sphericalangle PQR = 90° - \frac{\beta}{2}$ и $\sphericalangle QRP = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Из једнакости

$\sphericalangle IPQ + \sphericalangle PQR = 90^\circ$, добијамо да је $PI \perp RQ$, па је тачка $I$ ортоцентар троугла $PQR$.

Нека је $S$ центар описаног круга око троугла $PQR$, док су центри описаних кругова око четвороуглова $ABQP$, $ACRP$ и $BCRQ$ тачке $C'$, $B'$ и $A'$, редом. Како тачке $A'$ и $B'$ леже на симетрали дужи $CR$, важи $A'B' \parallel PQ$. Слично имамо $B'C' \parallel RQ$ и $A'C' \parallel PR$.

Користећи једнакост углова са нормалним крацима добијамо $\sphericalangle OB'C' = \sphericalangle IAC = \frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle OC'B' = \sphericalangle IAB = \frac{\alpha}{2}$ . Ово значи да је $O$ центар описаног круга за $\triangle A'B'C'$. Троуглови $A'B'C'$ и $PQR$ су хомотетични, јер имају све углове једнаке. Центар хомотетије је пресек правих $A'P$, $B'Q$ и $C'R$. Тачка $S$ је ортоцентар за троугао $A'B'C'$ и центар описаног круга троугла $PQR$. Дакле, центар хомотетије лежи на пресеку правих $SI$ и $OS$, па су тачке $S$, $I$ и $O$ колинеарне.

**140**. Означимо $\sphericalangle BDC = \phi$. Применом синусне теореме на троуглове $DBC$ и $ADC$ добијамо

$$\frac{BC}{\sin\phi} = \frac{CD}{\sin 80^\circ} = \frac{CD}{\cos 10^\circ} \quad \text{и} \quad \frac{CD}{\sin 20^\circ} = \frac{AD}{\sin(\phi - 20^\circ)} = \frac{BC}{\sin(\phi - 20^\circ)},$$

тј.

$$\frac{BC}{CD} = \frac{\sin\phi}{\cos 10^\circ} \quad \text{и} \quad \frac{BC}{CD} = \frac{\sin(\phi - 20^\circ)}{\sin 20^\circ}.$$

Дакле, проблем сводимо на решавање тригонометријске једначине:

$$\sin(\phi - 20^\circ) = 2\sin 10^\circ \sin\phi.$$

Једно очигледно решење је $\phi = 30^\circ$. Развијањем синуса разлике, добијамо еквивалентну једначину

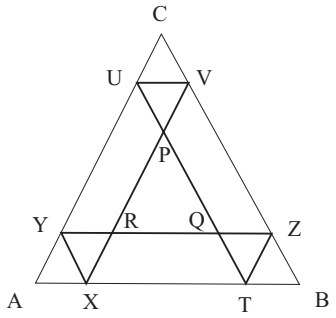
$$\sin\phi\,(\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ) = \cos\phi \sin 20^\circ,$$

одакле је $\operatorname{ctg}\phi = \dfrac{\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}$. Како је $\operatorname{ctg} x$ растућа функција на интервалу $(20^\circ, 80^\circ)$, то је $\sphericalangle BDC = 30^\circ$ једино решење.

**141**. Докажимо тврђење индукцијом по $n$. Лако се проверава да је тврђење тачно за $n = 1$ и $n = 2$. Претпоставимо да је исказ тачан за све $k < n$ и покажимо да он остаје на снази и за $k = n$.

Изаберимо теме $X$ на страници $AB$ које је на пример ближе тачки $A$ него тачки $B$ (слика 2.31). Ако је $X = C$ добијамо да колинеране тачке $A, X, B$ на страници $AB$ троугла задовољавају услов (б). У противном је $X = A$ или $X = B$. Претпоставимо да је $X = B$ (други случај се разматра на сличан начин). Посматрајмо тачку $Y$ на дужи $AC$ такву да је $XY \parallel BC$. Ако је $Y = C$, на троугао $AXY$ се може применити индуктивна претпоставка. Ако је $Y = B$, тачке $A, Y, C$ на страници $AC$ су колинеране. Најнеповољнији случај је због тога $Y = A$. Сличним расуђивањем закључујемо да је (у најнеповољнијем случају) $Z = C$, након тога да је $T = B$, па

$U = A, V = C$. Уколико је $P = Q = R$ онда се лако види да се на једној од дужи $XV, YZ$ или $UT$ морају наћи три тачке означене са $A, B$ и $C$. Због тога можемо претпоставити да је троугао $PQR$ недегенерисан.




Слика 2.31.

Расуђујући као и пре (посматрањем дужи $UT$ и $XV$) долазимо до закључка да је $P = B$ (у најнеповољнијем случају). Ово међутим значи да на троугао $UVP$ можемо применити индуктивну хипотезу, што и завршава доказ тврђења.

**142**. Претпоставимо да су мрави нумерисани бројевима од 1 до 100 и да сваки од њих носи мрвицу хране нумерисане истим бројем. Замислимо да при сваком судару два мрава размене мрвице које носе. Уочимо да тада, без обзира на „компликовано" кретање сваког појединачног мрава, свака мрвица (мењајући власника) наставља да се креће у истом смеру и истом брзином као на почетку. Одавде закључујемо да ће свака мрвица, а тиме и мрав који је носи, напустити штап након истека два минута. Укупан број судара једнак је укупном броју размена мрвица хране или другим речима укупном броју укрштања које мрвице међусобно направе. Очигледно је тај број највећи ако се 50 мрвица, крећући се са лева на десно, укршта са 50 мрвица које се крећу са десна на лево. Одговор је дакле $50 \cdot 50 = 2500$.

**143**. (а) У овом случају број различитих распореда је $7^4 = 2401$.

(б) Разликујући случајеве када су ниједна, једна, две или три кутије празне долазимо до решења

$$\binom{7}{4} + 3 \cdot \binom{7}{3} + 3 \cdot \binom{7}{2} + \binom{7}{1} = 210.$$

(в) Поново разликујући случајеве када су ниједна, једна, две или три кутије празне долазимо до решења $1 + 6 + 7 + 1 = 15$.

(г) Има 5 различитих распореда $(1, 1, 1, 1; 2, 1, 1, 0; 2, 2, 0, 0; 3, 1, 0, 0; 4, 0, 0, 0)$.

**144**. У правоуглом троуглу важи $c^2 = a^2 + b^2$ и $ch = ab$. Користећи те једнакости добијамо

$$\left(\frac{c+h}{a+b}\right)^2 = \frac{c^2 + 2ch + h^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{c^2 + 2ch + h^2}{c^2 + 2ch} = 1 + \frac{h^2}{c^2 + 2ch}.$$

Приметимо и да је $c \geqslant 2h$ (хипотенузина висина је мања или једнака тежишној дужи из темена правог угла), па следи да је

$$\left(\frac{c+h}{a+b}\right)^2 \leqslant 1 + \frac{h^2}{(2h)^2 + 2 \cdot 2h \cdot h} = \frac{9}{8},$$

односно

$$\frac{c+h}{a+b} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

**145**. Уведимо следеће ознаке: $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\beta = \sphericalangle DAE$, $\gamma = \sphericalangle EAC$. Како је $BA = BE = 48\,\mathrm{cm}$, имамо да је $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BAE = \alpha + \beta$, док из једнакости $CA = CD = 55\,\mathrm{cm}$ следи да је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CAD = \beta + \gamma$. Посматрајући троугао $ADE$ добијамо

$$180^\circ = (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + \beta = (\alpha + \beta + \gamma) + 2\beta.$$

Како је $48^2 + 55^2 = 73^2$, закључијемо да је троугао $ABC$ правоугли, тј. да је $\sphericalangle BAC = \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Дакле, $180^\circ = 90^\circ + 2\beta$, тј. $\sphericalangle DAE = 45^\circ$.

**146**. Нека је $ABC$ дати троугао, $AD$, $BE$ и $CF$ висине, а $H$ његов ортоцентар. Тада су четвороуглови $BDHF$ и $CDHE$ тетивни, па важи $\sphericalangle FBH = \sphericalangle FDH$ (периферијски углови над $FH$) и $\sphericalangle ECH = \sphericalangle EDH$ (периферијски углови над $EH$). Троуглови $ABE$ и $AFC$ имају једнаке углове (прав угао и заједнички угао код темена $A$), па је $\sphericalangle ABE = \sphericalangle AFC$. Одавде је $\sphericalangle FBH = \sphericalangle ECH$, односно $\sphericalangle FDH = \sphericalangle EDH$, што је и требало доказати.

**147**. Нека је $BC = a$. На основу услова задатка је $\sphericalangle ADN = \sphericalangle NDM = \alpha$, па је $\sphericalangle DMC = 2\alpha$. Тада је

$$AN = a \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \sin 2\alpha \cdot DM, \quad MC = \cos 2\alpha \cdot DM,$$

одакле добијамо

$$AN + MC = (\operatorname{tg} \alpha \sin 2\alpha + \cos 2\alpha) \cdot DM = DM.$$

**148**. Неједнакост (1.2) је еквивалентна са

$$2bc \cos^3 \alpha + 2ca \cos^3 \beta + 2ab \cos^3 \gamma < a^2 + b^2 + c^2. \tag{2.32}$$

Уочимо да је

$$2bc \cos^3 \alpha + 2ca \cos^3 \beta + 2ab \cos^3 \gamma < 2bc \cos \alpha + 2ca \cos \beta + 2ab \cos \gamma. \tag{2.33}$$

На основу косинусне теореме важи

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2, \quad 2ca \cos \beta = c^2 + a^2 - b^2, \quad 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2,$$

одакле, после сабирања добијамо

$$2bc \cos \alpha + 2ca \cos \beta + 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 + c^2. \tag{2.34}$$

Из релација (2.34) и (2.33) следи неједнакост (2.32), односно неједнакост (1.2).

**149**. Применом синусне теореме на троуглове $A_1A_2A_3, B_1B_2B_3$ и $C_1C_2C_3$ добијамо једнакости

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{A_2A_3}{A_1A_3},\quad \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{B_2B_3}{B_1B_3},\quad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{C_2C_3}{C_1C_3}.$$

Множењем ових једнакости добијамо

$$\frac{\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2}=\frac{A_2A_3\cdot B_2B_3\cdot C_2C_1}{A_1A_3\cdot B_1B_3\cdot C_1C_3}$$

одакле, с обзиром на то да је $A_2A_3\geqslant B_1B_3, B_2B_3\geqslant C_1C_3, C_2C_3\geqslant A_1A_3$, следи тражена неједнакост.

**150**. Нека је $BC=a$. По услову задатка имамо да је $\sphericalangle DMN=\sphericalangle CMD=\alpha$, одакле добијамо $\sphericalangle BMN=180^\circ-2\alpha, CM=\dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$ и

$$BM=BC-CM=a\Big(1-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\Big).$$

Тада је

$$\begin{aligned}BN&=BM\cdot\operatorname{tg}(180^\circ-2\alpha)=-BM\cdot\operatorname{tg}2\alpha\\&=a\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2a}{1+\operatorname{tg}\alpha},\end{aligned}$$

одакле добијамо да је

$$AN=AB-BN=a\cdot\Big(1-\frac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha}\Big)=a\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}=a\cdot\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ).$$

Како је $\operatorname{tg}\sphericalangle ADN=\dfrac{AN}{a}$, закључујемо да је $\sphericalangle ADN=\alpha-45^\circ$. Стога је

$$\sphericalangle MDN=90^\circ-\sphericalangle ADN-\sphericalangle CDM=90^\circ-(\alpha-45^\circ)-(90^\circ-\alpha)=45^\circ.$$

**151**. Нека је $H$ висина призме, а $a$ основна ивица. Ако су $D$ и $E$ средишта ивица $B_1C_1$ и $BC$, троугао $A_1DE$ је правоугли, и његова површина је једнака

$$P_{\triangle A_1DE}=\frac{1}{2}A_1D\cdot DE=\frac{r}{2}\left(A_1D+DE+A_1E\right).$$

Како је $DE=H,\ A_1D=\dfrac{a\sqrt{3}}{2},\ A_1E=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}+H^2}$, и имајући у виду да је $a=2r\sqrt{3}$, добијамо да је $H^2=4Hr$, одакле је $H=4r$. Дакле, $V=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}H=12\sqrt{3}r^3$.

**152**. Нека је $d=\operatorname{nzd}\big(n^2+1,(n+1)^2+1\big)$. Тада $d\mid((n+1)^2+1-(n^2+1))$, односно $d\mid(2n+1)$. Отуда $d\mid(n^2+1-(2n+1))$, односно $d\mid n(n-2)$. Одавде, како је $d$ узајамно прост са $n$ (јер ако је $k=\operatorname{nzd}(n^2+1,n)$ добијамо да $k\mid(n^2+1-n^2)$, односно $k=1$), закључујемо да $d\mid(n-2)$. Дакле, добили смо да $d\mid(2n+1)$ и

$d \mid (n-2)$, па закључујемо да $d \mid (2n+1-2(n-2))$, односно $d \mid 5$. Одавде су једине потенцијалне вредности за $d$ бројеви 1 и 5.

Одредимо сада остатак при дељењу са 5 броја $n^2+1$. Уколико $n$ при дељењу са 5 има редом остатке $0, 1, 2, 3, 4$, онда број $n^2+1$ при дељењу са 5 има редом остатке $0, 2, 0, 0, 2$. Зато је $d = 5$ ако и само ако $n$ при дељењу са 5 даје остатак 2, док је у свим осталим случајевима $d = 1$.

**153**. Приметимо да је

$$P(x^7) = ((x^7)^6-1)+((x^7)^5-1)+((x^7)^4-1)+((x^7)^3-1)+((x^7)^2-1)+(x^7-1)+7.$$

Полином у свакој од шест заграда је облика $(x^7)^k - 1, k = 1, 2, \ldots, 6$, па коришћењем формуле за разлику $k$-тих степена,

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

добијамо да је сваки од тих полинома дељив полиномом $x^7 - 1$. Како је при томе и $x^7 - 1 = (x-1)P(x)$, закључујемо да је тражени остатак при дељењу полинома $P(x^7)$ полиномом $P(x)$ једнак 7.

**154**. На основу услова задатка је $a \leqslant x, y \leqslant b$, па важи

$$\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{a} \quad \text{и} \quad \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leqslant \frac{1}{a}.$$

С обзиром на то да важи и $a \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqslant b$, следи $a \leqslant \frac{2}{b}$ и $\frac{2}{a} \leqslant b$, односно да је $ab = 2$. Како су $a$ и $b$ природни бројеви, закључујемо да је тражени интервал $[1, 2]$.

**155**. Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{\frac{x^6}{3} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^6}{3} + \frac{y^6}{2} + \frac{y^6}{2} + z^6}{6} \geqslant \sqrt[6]{\frac{x^6}{3} \cdot \frac{x^6}{3} \cdot \frac{x^6}{3} \cdot \frac{y^6}{2} \cdot \frac{y^6}{2} \cdot z^6} = \frac{x^3y^2z}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}},$$

одакле је

$$\frac{x^3y^2z}{x^6+y^6+z^6} \leqslant \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{6}.$$

За $\frac{x^6}{3} = \frac{y^6}{2} = z^6$ вредност $\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{6}$ се достиже и она је тражени максимум.

**156**. Неједнакост између аритметичке и геометријске средине примењена на бројеве $a^5, a^5, x^5, x^5, x^5$ даје $a^2x^3 \leqslant \frac{2}{5}a^5 + \frac{3}{5}x^5$. Аналогно добијамо и да је $b^2y^3 \leqslant \frac{2}{5}b^5 + \frac{3}{5}y^5$. Сабирањем ове две неједнакости добијамо да је $a^2x^3 + b^2y^3 \leqslant 1$, што је и требало доказати.

**157**. Решење има смисла тражити једино у скупу $[1,2]\cup\{3\}$ (пресек области дефинисаности сва три квадратна корена). Неједначину можемо записати и у следећем облику

$$\sqrt{(x-1)(3-x)}+\sqrt{(2-x)(3-x)}\geqslant\sqrt{(3-x)(4-x)}.$$

Број 3 јесте, очигледно, решење. За $x\in[1,2]$ неједначину можемо поделити са $\sqrt{3-x}$, и тако добијамо $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}\geqslant\sqrt{4-x}$, што после квадрирања даје

$$2\sqrt{(x-1)(2-x)}\geqslant 3-x.$$

После још једног квадрирања добијамо неједначину $5x^2-18x+17\leqslant 0$, која нема решење у скупу реалних бројева, јер је $D=18^2-4\cdot 5\cdot 17<0$. Дакле, једино решење је $x=3$.

**158**. За $a=0$ јединствено решење је $x=0$, и оно припада интервалу $(-1,1)$. За $a\neq 0$, решења су $x_1=\dfrac{1}{3a}, x_2=-a(a-4)$, па треба решити систем неједначина

$$\left|\frac{1}{3a}\right|<1,\quad |-a^2+4a|<1,$$

односно

$$(3a<-1\ \vee\ 3a>1)\ \wedge\ \left(-a^2+4a+1>0\ \wedge\ -a^2+4a-1<0\right),$$

одакле је $a\in\left(2+\sqrt{3},2+\sqrt{5}\right)$. Дакле, за $a\in\{0\}\cup\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{5}\right)$ свако решење $x$ дате једначине задовољава тражени услов $|x|<1$.

**159**. Постављени проблем је еквивалентан следећем проблему: одредити све парове реалних бројева $p$ и $q$ за које је сваки број $x$ из интервала $[1,5]$ решење неједначине $|x^2+px+q|\leqslant 2$. Апсциса темена параболе $f(x)=x^2+px+q$ је $x_T=-\frac{p}{2}$. Тражени бројеви $p$ и $q$ су решења једног од следећа три система неједначина.

1)
$$\begin{cases} x_T<1,\\ f(1)\geqslant -2,\\ f(5)\leqslant 2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -\frac{p}{2}<1,\\ 1+p+q\geqslant -2,\\ 25+5p+q\leqslant 2.\end{cases}\qquad \text{Систем нема решење.}$$

2)
$$\begin{cases} x_T>5,\\ f(1)\leqslant 2,\\ f(5)\geqslant -2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -\frac{p}{2}>5,\\ 1+p+q\leqslant 2,\\ 25+5p+q\geqslant -2.\end{cases}\qquad \text{Систем нема решење.}$$

3)
$$\begin{cases} 1\leqslant x_T\leqslant 5,\\ f(1)\leqslant 2,\\ f(5)\leqslant 2,\\ f(x_T)\geqslant -2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 1\leqslant -\frac{p}{2}\leqslant 5,\\ 1+p+q\leqslant 2,\\ 25+5p+q\leqslant 2,\\ \frac{4q-p^2}{4}\geqslant -2,\end{cases}\Leftrightarrow\quad p=-6,\ q=7.$$

**160**. Дати систем је еквивалентан систему

$$bu^2 + v + 2b = 0,$$
$$bv^2 + u + 2b = 0,$$

где је $u = x + 1, v = y - 3$. Како је добијени систем симетричан по $u$ и $v$, он ће имати јединствено решење само ако једначина $bu^2 + u + 2b = 0$ има јединствено решење, а то је случај ако и само ако је $b \in \left\{0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$. Провером се утврђује да за ове три вредности систем по $u$ и $v$, а тиме и полазни систем, има јединствено решење.

**161**. Лако је доћи до закључка да је

$$10^{5^{10^{5^{10}}}} \equiv -1 \pmod{11},$$

јер је $10 \equiv -1 \pmod{11}$, а сваки степен броја 5 је непаран број.

Како је $5^2 = 25 \equiv 3 \pmod{11}$, закључујемо да је $5^4 \equiv 3^2 = 9 \equiv -2 \pmod{11}$, односно да је $5^5 = 5 \cdot 5^4 \equiv 5 \cdot (-2) = 9 = -10 \equiv 1 \pmod{11}$. Дакле,

$$5^{10^{5^{10^{5}}}} \equiv 1 \pmod{11}.$$

До овог закључка се може доћи и помоћу мале Фермаове теореме. Сада можемо закључити да је

$$10^{5^{10^{5^{10}}}} + 5^{10^{5^{10^{5}}}} \equiv 0 \pmod{11}.$$

**162**. Уочимо да је

$$57^1 = 57, \quad 57^2 = 3249, \quad 57^3 = 185193, \quad 57^4 = 10556001.$$

Према томе, важи ($N$ и $M$ су одговарајући природни бројеви)

$$\begin{aligned} 57^{2008} &= \left(57^4\right)^{502} = \left(N \cdot 10^7 + 556 \cdot 10^3 + 1\right)^{502} \\ &= M \cdot 10^7 + 502 \cdot 556 \cdot 10^3 + 1 = M \cdot 10^7 + 279112 \cdot 10^3 + 1 \\ &= \overline{\ldots 112001}, \end{aligned}$$

то јест последњих шест цифара броја $57^{2008}$ су 112001.

**163**. Уколико у запису неког десетоцифреног броја учествују све цифре од 0 до 9, онда је тај број дељив са 9. Прецртавањем једне цифре $c$ из таквог броја добијамо деветоцифрени број чији је остатак при дељењу са 9 једнак $9 - c$. Према томе, уколико је $c$ цифра која се не појављује у запису броја $2^{29}$, тада постоји цео број $k$ такав да важи

$$2^{29} = 9k - c.$$

Степени броја 2 при дељењу са 9 редом дају остатке:

$$2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, \ldots$$

На основу тога закључујемо да је остатак дељења броја $2^{29}$ бројем 9 једнак 5, тј. важи $2^{29} = 9k - 4$. Дакле, тражена цифра је 4.

**164**. Означимо редом са $A_n$, $B_n$ и $C_n$, $n \in \mathbb{N}$, слободан члан, коефицијент уз $x$ и коефицијент уз $x^2$ у полиному

$$P_{2^n}(x) = \underbrace{((\cdots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\cdots-2)^2-2)^2}_{n}.$$

Очигледно је $A_n = P_{2^n}(0) = 4$, што повлачи

$$\begin{aligned} P_{2^{n+1}}(x) &= (P_{2^n}(x)-2)^2 = (x^3 \cdot R_{2^n-3} + C_n \cdot x^2 + B_n \cdot x + A_n - 2)^2 \\ &= (x^3 \cdot R_{2^n-3} + C_n \cdot x^2 + B_n \cdot x + 2)^2, \end{aligned}$$

за неки полином $R_{2^n-3}(x)$. Из последње једнакости следи

$$B_{n+1} = 4B_n, \quad C_{n+1} = B_n^2 + 4C_n.$$

Из прве добијене везе, пошто је $B_1 = -4$, следи да је $B_n = -4^n$. Сада, на основу друге везе, имајући у виду и да је $C_1 = 1$ добијамо

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= B_n^2 + 4C_n = B_n^2 + 4(B_{n-1}^2 + 4C_{n-1}) = \cdots = \\ &= B_n^2 + 4B_{n-1}^2 + 4^2 B_{n-2}^2 + \cdots + 4^{n-1}B_1^2 + 4^n C_1 \\ &= 4^{2n} + 4^{2n-1} + 4^{2n-2} + \cdots + 4^{n+1} + 4^n \\ &= 4^n \cdot \frac{4^{n+1}-1}{3}. \end{aligned}$$

Узимајући $n = 2006$ добијамо да је тражени коефицијент уз $x^2$ у посматраном развоју једнак $4^{2006} \cdot \dfrac{4^{2007}-1}{3}$.

**165**. За сваки позитиван реалан број $x$ важи

$$\frac{1}{9x+1} \geqslant \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}, \tag{2.35}$$

јер је ова неједнакост, за $x \geqslant 0$, еквивалентна са $(3x-1)^2 \geqslant 0$. Ако у (2.35) $x$ заменимо редом са $a, b, c, d$, а затим добијене неједнакости саберемо, добијамо

$$\frac{1}{9a+1} + \frac{1}{9b+1} + \frac{1}{9c+1} + \frac{1}{9d+1} \geqslant \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Једнакост се достиже само ако је $a = b = c = d = \frac{1}{3}$.

**166**. Одредићемо прво колико има бројева мањих од $10^9$ који не садрже цифру 0, као и колико има бројева мањих од $10^9$ који немају две једнаке суседне цифре. Ако рачунамо редом колико има таквих једноцифрених, двоцифрених, ..., осмоцифрених бројева, у оба случаја добијамо исти резултат

$$N = 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 + 9^7 + 9^8 = 597870.$$

Према томе, има подједнако, $99999999 - 597870 = 99402129$, природних бројева мањих од $10^9$ који садрже цифру 0 и оних у којима се могу наћи две једнаке суседне цифре.

**167**. Природан број $n$ можемо записати као збир $n$ природних сабирака само као

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}.$$

Једним груписањем по две јединице добијамо $n-1$ запис броја $n$ као збир $n-1$ сабирака. Још једним припајањем једне јединице неком од сабирака добијамо

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}$$

збирова од $n-2$ сабирка (делимо са 2 јер није битно које припајање је прво учињено). Следећим припајањем добијамо још

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} = \binom{n-1}{3}$$

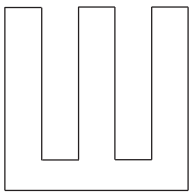
тражених збирова. Настављајући овај поступак добијамо да је $N$, број начина на који се природан број $n$ може представити као збир једног или више природних бројева, једнак

$$N = 1 + (n-1) + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

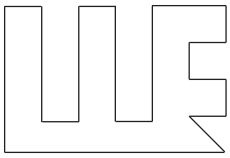
**168**. У међусобним мечевима четири последње екипе подељено је 12 поена ($\frac{4\cdot 3}{2} \cdot 2 = 12$). Међутим, како те четири екипе имају заједно 14 поена, једна од тих екипа је морала да победи једну од прве четири екипе. Дакле, последње четири екипе са табеле изгубиле су 15 ($4 \cdot 4 - 1 = 15$) утакмица од прве четири екипе.

**169**. Приметимо да су растојања међу чворовима мреже 1, $\sqrt{2}$ или већа.

У случају да је $mn$ парно (на пример $n$ је парно) постоји Хамилтонова контура[2] по квадратној мрежи дужине $mn$ (слика 2.32) и она је најкраћа затворена путања која повезује све чворове мреже.



Слика 2.32.



Слика 2.33.

Ако су и $m$ и $n$ непарни конструкција са слике 2.33 описује контуру дужине $mn+\sqrt{2}-1$. Докажимо да сада не постоји Хамилтонова контура по квадратној мрежи. Обојимо

[2]Хамилтонова контура је пут који почиње и завршава се у истом чвору, а кроз све остале чворове графа пролази тачно једанпут.

чворове мреже црно-бело (шаховски). Ако би постојала Хамилтонова контура која пролази сваким чвором само једном на њој би био исти број црних и белих чворова. То није могуће, јер је број чворова $mn$ непаран. Зато барем једно међурастојање мора бити веће од 1, дакле бар $\sqrt{2}$, па је дужина најкраће путање $mn + \sqrt{2} - 1$.

**170**. Постоји. Замислимо да су кроз сваке две од датих тачака повучене праве. Таквих правих има много (колико?), али ипак коначно много, па је могуће повући праву која није паралелна ни са једном од претходно повучених. Нека је $l$ таква права, и нека се свих 3000 тачака налази са исте стране те праве. Сада замислимо да праву $l$ померамо паралелно све док не додирне једну тачку из датог скупа од 3000 тачака. Затим померање настављамо док не додирнемо другу и трећу тачку. Тако добијамо темена првог од 1000 тражених троуглова. Поступак настављамо све док не додирнемо и последњу тачку. Напоменимо да је за решавање задатка пресудан избор положаја праве $l$, јер он обезбеђује да у једном тренутку не можемо да додирнемо више од једне тачке из датог скупа. Како се сваки од троуглова налази унутар једне „траке" у равни чије границе су праве које су паралелне са $l$ и пролазе кроз прво и треће теме, јасно је да су ти троуглови дисјунктни.

**171**. Означимо са $a$ и $b$ странице великог и малог квадрата, а са $x$ и $y$ странице правоугаоника (слика 1.6). На основу услова задатка је

$$9 + 4\sqrt{5} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

одакле добијамо

$$\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{5}. \tag{2.36}$$

Са слике уочавамо да је $a = x + y$ и $y = b + x$, па је $x = \frac{1}{2}(a - b)$ и $y = \frac{1}{2}(a + b)$. Према томе,

$$\frac{x}{y} = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1}. \tag{2.37}$$

На основу једнакости (2.36) и (2.37) добијамо

$$\frac{x}{y} = \frac{2 + \sqrt{5} - 1}{2 + \sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

**172**. Доцртајмо тачку $K$, која је симетрична тачки $F$ у односу на $M$. Тада је четвороугао $KBFC$ паралелограм и важи $\sphericalangle BKM = \sphericalangle MFA$. Како су тачке $A, M, F, D$ на кругу $\omega$, важи $\sphericalangle MFA = \sphericalangle MEB$. Следи да је четвороугао $MKFM$ тетиван. Из једнакости углова над тетивом $BK$ важи $\sphericalangle BEK = \sphericalangle BMK = \sphericalangle FMD$. Такође, имамо да је $\sphericalangle FMD = \sphericalangle FAD$, па закључујемо да је $\sphericalangle BEK = \sphericalangle DAE$, односно, $AD \parallel EK$. Дуж $MN$ је по конструкцији средња линија $\triangle AEK$, па је $AD$ паралелно са $MN$.

**173**. Означимо са $A_1, B_1, D_1$ тачке у којима уписани круг у $\triangle ABD$ додирује странице тог троугла, са $A_2, C_2, D_2$ тачке у којима уписани круг у $\triangle ACD$ додирује одговарајуће странице, а са $G$ и $H$ тачке у којима заједничка спољашња тангента, различита од $BC$, додирује кругове $K_1$ и $K_2$. Нека је $AC = b$, $AB = c$, $BD = u$, $DC = v$ и $AD = d$. Тада је

$$\begin{aligned} 2AK &= (AB_1 - GK) + (AC_2 - HK) = AB_1 + AC_2 - GH \\ &= AD_1 + AD_2 - A_1A_2 = AD_1 + AD_2 - DA_1 - DA_2. \end{aligned}$$

Како је

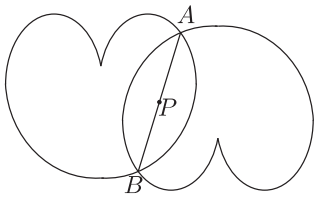
$$AD_1 = \frac{c+d-u}{2}, \quad AD_2 = \frac{b+d-v}{2},$$
$$DA_1 = \frac{d+u-c}{2}, \quad DA_2 = \frac{d+v-b}{2},$$

заменом добијамо

$$2AK = \frac{c+d-u+b+d-v-d-u+c-d-v+b}{2} = b+c-u-v,$$

односно, $AK = \frac{1}{2}(AC + AB - BC)$.

**174**. Посматрамо ротацију за $180°$ у односу на тачку $P$ (слика 2.34).




Слика 2.34.

Крива $\mathcal{C}$ се слика у подударну фигуру $\mathcal{C}'$. Ако се криве $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ секу у тачки $A$, тада се секу и у тачки $B$ која је симетрична тачки $A$ у односу на $P$. Због особина симетрије је $PA = PB$, па је довољно показати да се криве $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ морају сећи. Нека је тачка $X$ најближа, а тачка $Y$ најдаља тачка са криве $\mathcal{C}$ тачки $P$. После ротације тачка $X$ се налази у $\mathcal{C}'$, а тачка $Y$ ван криве $\mathcal{C}'$. Због непрекидности постоји тачка која се налази на ободу криве $\mathcal{C}'$.

**175**. Ако је $X$ издвојена тачка скупа $\mathcal{C}$ таква да је $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OB_j}$, онда је $A_i$ издвојена тачка скупа $\mathcal{A}$, а $B_j$ издвојена тачка скупа $\mathcal{B}$. Заиста, нека је $p$ права таква да је $X \in p$, а остале тачке из $\mathcal{C}$ су у истој затвореној полуравни, тј. са исте стране ове праве. Нека је $p_1$ права паралелна са $p$ која садржи тачку $A_i$. Тврдимо да су све остале тачке скупа $\mathcal{A}$ са исте стране праве $p_1$. Претпоставимо да није тако, и да су $A'$, $A''$ тачке из $\mathcal{A}$ које су са различитих страна праве $p_1$. Нека су $X'$, $X''$ тачке из $\mathcal{C}$ дефинисане једнакостима

$\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB_j}$ и $\overrightarrow{OX''} = \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB_j}$. Пошто транслацијом за вектор $OB_j$ права $p_1$ прелази у праву $p$, закључујемо да су тачке $X'$ и $X''$ са различитих страна праве $p$, што је контрадикција.

Из доказаног следи да можемо претпоставити да су све тачке $A_i$ издвојене тачке скупа $\mathcal{A}$ (у противном их избацујемо из скупа, јер не доприносе формирању издвојених тачака у скупу $\mathcal{C}$), као и да су све тачке $B_j$ издвојене тачке скупа $\mathcal{B}$. Другим речима, тачке $A_i$ су темена конвексног полигона $P$, а тачке $B_j$ су темена конвексног полигона $Q$. Све издвојене тачке скупа $\mathcal{C}$ су, такође, темена неког конвексног полигона $R$.

Опажање које комплетира решење задатка је да је свака страна полигона $R$ паралелна или страни полигона $P$ или страни полигона $Q$. Заиста, нека је $X_1X_2$ једна страна полигона $R$ и нека је права $p$ одређена са $X_1$ и $X_2$. Обе тачке $X_1$ и $X_2$ су издвојене тачке скупа $\mathcal{C}$, па важи $\overrightarrow{OX_1} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ и $\overrightarrow{OX_2} = \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''}$ за неке издвојене тачке $A', A'' \in \mathcal{A}$ и издвојене тачке $B', B'' \in \mathcal{B}$. Приметимо да важи бар једна од неједнакости $A' \neq A''$ или $B' \neq B''$. На пример, нека важи $A' \neq A''$. Нека је $p'$ права која садржи $A'$ и паралелна је правој $p$, а $p''$ права која садржи $A''$ и паралелна је правој $p$. Из издвојености тачака $A'$ и $A''$ следи да је $p' = p''$, тј. $A_1A_2$ је страна полигона $P$ паралелна страни $X_1X_2$ полигона $R$.

**176**. Сва решења дате једначине су и решења једначине

$$4\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 8\sin 2x\cos^2 2x, \tag{2.38}$$

која се добија квадрирањем леве и десне стране једнакости (Обрнуто не важи!). Како је при томе

$$4\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1 + \sin 6x}{2},$$

$$8\sin 2x\cos^2 2x = 4\cos 2x(2\sin 2x\cos 2x) = 4\cos 2x\sin 4x = 2(\sin 6x + \sin 2x),$$

закључујемо да је једначина (2.38) еквивалентна са једначином

$$2 + 2\sin 6x = 1 + 2\sin 6x + 2\sin 2x,$$

односно са $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$. Дакле, решења једначине (2.38) су

$$x_{1,k} = \frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \vee\ x_{2,l} = \frac{5\pi}{12} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Сада, заменом у полазној једначини долазимо до закључка која од ових решења су и решења полазне једначине. Како је

$$2\sin\left(3x_{1k} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(3k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos k\pi,$$

следи да је за $|k|$ непарно лева страна једнакости негативна $(-2)$, па та решења одбацујемо. За $|k|$ парно једнакост важи. Слично, на основу

$$2\sin\left(3x_{1l} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(3k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -2\cos l\pi$$

одбацујемо она решења када је $|l|$ парно. За $|l|$ непарно једнакост важи. Дакле, решења полазне једначине су

$$x_{1,k} = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad x_{2,l} = \frac{5\pi}{12} + (2l+1)\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

**177**. С обзиром на то да је $ch_c = ab$ и $zh_z = xy$, дата неједнакост може да се запише на следећи начин

$$\sqrt{cz} + 2\sqrt{\frac{axby}{cz}} \leqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{ax} + \sqrt{by}\right).$$

Ако ову неједнакост квадрирамо и помножимо са $cz$ добијамо њој еквивалентну неједнакост $c^2z^2 + 2axby \leqslant 2cz(ax+by)$, односно неједнакост

$$(cz - 2ax)(cz - 2by) \leqslant 0. \tag{2.39}$$

Применом Питагорине теореме на троуглове $ABC$ и $XYZ$ добијамо $c^2 = a^2 + b^2$ и $z^2 = x^2 + y^2$, одакле следи

$$c^2z^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2) = a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2. \tag{2.40}$$

На основу неједнакости аритметичке и геометријске средине добијамо

$$a^2y^2 + b^2x^2 \geqslant 2\sqrt{a^2y^2 \cdot b^2x^2}.$$

Применивши последње у (2.40) добијамо

$$(cz)^2 \geqslant a^2x^2 + b^2y^2 + 2ax \cdot by = (ax+by)^2,$$

односно $cz \geqslant ax + by$. Одавде, због $a \geqslant b$ и $x \geqslant y$, произлази да је $cz \geqslant 2by$. То, пак, значи да други чинилац у неједнакости (2.39) није негативан. Како је $a^2 + b^2 \leqslant 2a^2$ и $x^2 + y^2 \leqslant 2x^2$ (јер је $b \leqslant a$ и $x \geqslant y$), добијамо

$$cz \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} \leqslant a\sqrt{2}x\sqrt{2} = 2ax,$$

што значи да први чинилац у неједнакости (2.39) није позитиван. Дакле, производ из неједнакости (2.39) није позитиван, чиме смо доказали тражено тврђење.

**178**. Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине позитивних бројева добијамо

$$\frac{a}{\alpha(s-a)} + \frac{b}{\beta(s-b)} + \frac{c}{\gamma(s-c)} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{abc}{\alpha\beta\gamma(s-a)(s-b)(s-c)}}. \tag{2.41}$$

Множењем тачних неједнакости

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2} \leqslant a, \quad \sqrt{b^2-(c-a)^2} \leqslant b \quad \text{и} \quad \sqrt{c^2-(a-b)^2} \leqslant c$$

добијамо

$$\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2} \leqslant abc.$$

Како је $a+b>c, b+c>a$ и $a+c>b$ из претходног следи

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant abc,$$

односно

$$8(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leqslant abc. \tag{2.42}$$

Такође, применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо и

$$\alpha\beta\gamma \leqslant \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^3. \tag{2.43}$$

На основу релација (2.42) и (2.43), из (2.41) произлази тражена неједнакост.

**179**. Користећи познате неједнакости (доказати!)

$$4t_a^2 = 2(b^2+c^2)-a^2,\ 4t_b^2 = 2(c^2+a^2)-b^2,\ 4t_c^2 = 2(a^2+b^2)-c^2,$$

добијамо

$$\frac{t_a^2}{b^2+c^2} + \frac{t_b^2}{c^2+a^2} + \frac{t_c^2}{a^2+b^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2}\frac{c^2}{a^2+b^2}\right). \tag{2.44}$$

Како је дати троугао оштроугли, косинуси свих његових углова су позитивни, па применом косинусне теореме добијамо

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2}\frac{c^2}{a^2+b^2} = 3 - \left(\frac{2bc\cos\alpha}{b^2+c^2} + \frac{2ca\cos\beta}{c^2+a^2} + \frac{2ab\cos\gamma}{a^2+b^2}\right) < 3. \tag{2.45}$$

На основу релација (2.44) и (2.45) следи тражена неједнакост.

**180**. На основу косинусне теореме добијамо једнакост

$$\cos\alpha = \cos f(b) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Диференцирањем по $b$ обе стране последње једнакости (уз коришћење правила за диференцирање разломака и сложене функције) добијамо

$$-\sin\alpha \cdot f'(b) = \frac{4b^2c - 2c(b^2+c^2-a^2)}{4b^2c^2} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b^2c},$$

одакле следи једнакост

$$\frac{f'(b)}{\sin\alpha} = \frac{a^2+b^2-c^2}{-2b^2c\sin^2\alpha}.$$

На сличан начин (или позивањем на симетрију између $a$ и $b$), добијамо и једнакост

$$\frac{f'(b)}{\sin\beta} = \frac{a^2+b^2-c^2}{-2a^2c\sin^2\beta}.$$

Упоређивањем две последње једнакости лако је уочити да је тражена једнакост последица синусне теореме, тј. једнакости $b^2\sin^2\alpha = a^2\sin^2\beta$.

**181**. На основу прве једнакости следи $0 < x \leqslant 384, 0 < y^2 \leqslant 384$ и $0 < z^3 \leqslant 384$, односно, $0 < x \leqslant 384$, $0 < y \leqslant 19$, $0 < z \leqslant 7$. На исти начин из друге једнакости следи $0 < x \leqslant 33, 0 < y \leqslant 10, 0 < z \leqslant 1152$, што заједно са претходним неједнакостима даје $0 < x \leqslant 33, 0 < y \leqslant 10, 0 < z \leqslant 7$. Када квадрирамо прву једнакост и поделимо је другом, добијамо $yz^5 = 128 = 2^7$. На основу услова за $y$ и $z$ следи да $z = 1$ или $z = 2$. За $z = 1$ следи да је $y = 128$, што је немогуће због услова $y \leqslant 10$. Значи, једино решење је $z = 2, y = 4$ и $x = 3$.

**182**. Ако $d$ дели $n$, тада је и $\frac{n}{d}$ делилац броја $n$. Из услова задатка, број $n$ даје остатак 3 при дељењу са 4, тако да не може бити потпун квадрат. Зато $n$ има паран број делилаца, па их можемо груписати у парове $(d, \frac{n}{d})$. Остаје да докажемо да за сваки такав пар 24 дели

$$d + \frac{n}{d} = \frac{n + d^2}{d} = \frac{(n+1) + (d^2 - 1)}{d}.$$

Како су бројеви $d$ и 24 узајамно прости ($d$ није дељиво са 2 и са 3), довољно је показати конгруенцију $d^2 \equiv 1 \pmod{24}$. Како $d$ није дељив са 3, добијамо $3 \mid (d^2 - 1)$, а како је непаран број следи да $8 \mid (d^2 - 1)$. Према томе, $24 \mid (d^2 - 1)$, што је и требало доказати.

**183**. Из услова задатка је $f(n) = 2^{2n} + 2^n \cdot 3^n + 3^{2n}$, па лако добијамо:

$$\begin{aligned} f(2n) &= 2^{4n} + 2^{2n} \cdot 3^{2n} + 3^{4n} = \left(2^{2n} + 3^{2n}\right)^2 - 2^{2n} \cdot 3^{2n} \\ &= \left(2^{2n} + 3^{2n} - 2^n \cdot 3^n\right) \cdot \left(2^{2n} + 3^{2n} + 2^n \cdot 3^n\right). \end{aligned}$$

Дакле, за свако $n$ важи $f(n) \mid f(2n)$, па $f(2^n) \mid f(2^{n+1})$, $f(2^{n+1}) \mid f(2^{n+2})$, и тако даље. Према томе, за $n \geqslant m$ важи $f(2^m) \mid f(2^n)$.

**184**. Број се може написати као збир два узастопна природна броја ако и само ако је облика $a + (a+1) = 2a + 1$, односно, ако и само ако је непаран. Ако се број $n$ пише као збир три узастопна броја, тада је $n = (a-1) + a + (a+1) = 3a$, односно $n$ је дељив са 3. Слично доказујемо и обрнуто тврђење. Дакле, закључујемо да је број $n$ добар ако и само ако је непаран и дељив са 3, тј. ако даје остатак 3 при дељењу са 6. Уколико имамо $n \equiv 3 \pmod 6$ и $m \equiv 3 \pmod 6$, тада је $n \cdot m \equiv 3 \cdot 3 \equiv 3 \pmod 6$, што значи да је производ два добра броја добар број.

**185**. Тражени производ можемо записати као

$$(10a + b)(10c + d)(10e + f)(10g + h)(10i + j),$$

где су $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и сви су међусобно различити. Очигледно је да $a, c, e, g, i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Можемо узети, не губећи на општости, да је $a = 9, c = 8, e = 7, g = 6, i = 5$. Тада је $(90+b)(80+d)(70+f)(60+h)(50+j) = (90 \cdot 80 + 90d + 80b + bd)(70 + f)(60 + h)(50 + j)$. Ако погледамо први чинилац с десне стране, јасно је да је за $d > b$ производ већи, него ако важи супротно. Аналогно закључујемо да је $j > h > f > d > b$, одакле добијамо $b = 0, d = 1, f = 2, h = 3, j = 4$. Дакле, тражени производ је $90 \cdot 81 \cdot 72 \cdot 63 \cdot 54 = 1785641760$.

**186**. Све бројеве ћемо записати као шестоцифрене $000000, 000001, \ldots, 999999$. Бројеви који не садрже цифру 1 имају за сваку цифу 9 могућности. Значи, таквих бројева има $9^6 = 531441$, па закључујемо да има више бројева мањих од $1000000$ који немају цифру 1, него бројева са бар једном цифром 1, и то за $62882$.

**187**. Цифра 3 је једина непарна, па се мора појављивати паран број пута. Ако се тројка јавља $2k$ пута, онда место за њу можемо одабрати на $\binom{n}{2k}$ начина, а преостала места се могу попунити на један од $2^{n-2k}$ начина. Стога је решење дато формулом:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot 2^{n-2k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Да бисмо ово израчунали, применимо идентитет

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2 \sum_k \binom{n}{2k} \cdot x^{2k}$$

за $x = \dfrac{1}{2}$. Дакле, тражених бројева има

$$\frac{1}{2} \cdot 2^n \left( \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n \right) = \frac{3^n + 1}{2}.$$

**188**. (а) Број могућих размештања је једнак броју пермутација од 6 елемената без понављања тј. $6! = 720$.

(б) Први путник може да изабере било које од празних места (6 могућности). Други путник има 5 могућности, трећи 4, а четврти 3. Укупно има $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ начина.

(в) Слично претходном, само сада седишта „бирају" путнике, па је укупан број могућих размештаја $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$.

**189**. Ако поља офарбамо као шаховску таблу имамо наизменично црна и бела поља. Нека су црна поља са парним збиром, а бела са непарним збиром. Ако је $n$ паран број онда број белих и црних поља је једнак, па су вероватноће једнаке. Ако је број $n$ непаран, то јест $n = 2k+1$, онда је црних поља $(k+1) \cdot (k+1) + k \cdot k = 2k^2 + 2k + 1$. Како је укупан број поља $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, закључујемо да је број белих поља $2k^2 + 2k$, то јест белих поља има за једно поље мање у односу на црна. Дакле, када је $n$ непарно, вероватније је да ће збир редног броја реда и редног броја седишта бити паран.

**190**. Запишимо једначину у еквивалентној форми:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{a-x} - x} = a.$$

Посматрамо, сада, $a$ као променљиву и дефинишемо функцију $f(a) = \sqrt[3]{a-x}$. Тада је полазна једначина еквивалентна са $f(f(a)) = a$. Пошто је $f$ очигледно растућа функција, последња једначина је еквивалентна са једначином $f(a) = a$ (ако је $f(b) > b$ тада је $f(f(b)) > f(b) > b$, па $b$ не може бити решење; слично важи и за случај $f(b) < b$). Стога је једино решење полазне једначине $x = a - a^3$.

**191**. Нека је $z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$. Тада из једнакости

$$z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1 z_2} + 1} = \frac{\frac{z_1 \overline{z_1}}{z_1} + \frac{z_2 \overline{z_2}}{z_2}}{\frac{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}}{z_1 z_2} + 1} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1 z_2} + 1} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{1 + z_1 z_2} = \overline{z}$$

следи да је $z$ реалан број.

**192**. Доказаћемо да сви кругови садрже тачку $(0, 1)$. Нека су тачке пресека параболе са координатним осама $A = (0, c)$, $B = (x_1, 0)$, $C = (x_2, 0)$. Из Виетових правила следи да је $x_1 + x_2 = -b$. Нека је $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ једначина круга кроз тачке $A$, $B$ и $C$. Заменом координата тачака $B$ и $C$ у једначини, добијамо $x_0 = -\dfrac{b}{2}$. Дакле,

$$\frac{1}{4}b^2 + (c - y_0)^2 = \left(x_1 + \frac{b}{2}\right)^2 + y_0^2 = \left(x_2 + \frac{b}{2}\right)^2 + y_0^2 = r^2.$$

Сада следи $y_0 = \dfrac{c^2 + c}{2c} = \dfrac{c + 1}{2}$, односно, важи: $\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{(c-1)^2}{4} = r^2$, што је еквивалентно са чињеницом да дати круг пролази кроз тачку $(0, 1)$.

**193**. Продужимо праву $AE$ до пресека са $BC$ и означимо тачку пресека са $F$. Применимо Менелајеву теорему на $\triangle AFC$ и праву одређену тачкама $D - M - E$:

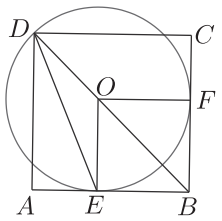
$$\frac{DF}{DC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{EA}{EF} = 1. \tag{2.46}$$

На основу особина симетрале $\sphericalangle B$ имамо да је $\dfrac{AE}{EF} = \dfrac{AB}{BF}$, док је $MC = MA$ по услову задатка. Заменом у (2.46) добијамо да је

$$\frac{DF}{DC} \cdot \frac{AB}{BF} = 1.$$

Дакле, $(AB + BC + CF) \cdot AB = (AB + BC) \cdot (BC + CF)$, односно $AB \cdot AB = BC \cdot BF$. Троуглови $ABC$ и $FBA$ имају заједнички $\sphericalangle B$ и како важи $\dfrac{AB}{BF} = \dfrac{BC}{AB}$, закључујемо да су они слични. Дакле, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle C$.

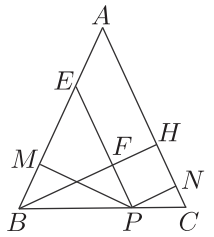
**194**. Праве које садрже $BA$ и $BC$ су тангенте на круг $k$, зато центар круга мора да се налази на правој која садржи дијагоналу $BD$ (слика 2.35).



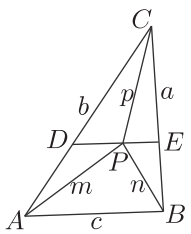

Слика 2.35.

Троугао $ODE$ је једнакокрак, јер су странице $OD$ и $OE$ полупречници круга. Одатле следи да је $\sphericalangle ODE = \sphericalangle OED$. Како је $OE \parallel AD$ следи да је $\sphericalangle ADE = \sphericalangle OED$. Из последње две једнакости следи да је $\sphericalangle ADE = \sphericalangle EDO$ и како је $\sphericalangle ADE + \sphericalangle EDO = 45°$, следи да је $DE$ симетрала угла $\sphericalangle ADO$, односно $\sphericalangle ADE = 22°30'$. На основу $DO = OE = r$, закључујемо да је $BO = r\sqrt{2}$, а из $DO + OB = DB$ следи $r + r\sqrt{2} = a\sqrt{2}$. Дакле, $r = a\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = a(2-\sqrt{2})$.

**195**. Нека су $PM$ и $PN$ посматране нормале (слика 2.36). Из тачке $P$ основице $BC$ конструишемо паралелу $PE$ са краком $AC$. На тај начин добијамо једнакокраки троугао $BPE$, чији крак $PE$ сече висину $BH$ у тачки $F$. Из подударности троуглова $BFP$ и $BMP$ следи $PM = BF$, а из паралелограма $FHNP$ следи $PN = FH$. Према томе је $PM + PN = BF + FH = BH$, што значи да је збир нормала спуштених из било које тачке основице једнакокраког троугла на краке једнак висини повученој на крак тог троугла.




Слика 2.36.




Слика 2.37.

**196**. Нека је $c$ најкраћа, а $b$ најдужа страница троугла $ABC$ (слика 2.37). Тврдимо да је $m + n + p < a + b$.

Конструисаћемо кроз тачку $P$ праву паралелну основици $AB$ троугла. Она сече страницу $AB$ у тачки $D$ и страницу $BC$ у тачки $E$. Како је $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, односи између одговарајућих страница се задржавају, па следи да је $CD > CE > DE$. Важи још и $CD > CP$, јер је у троуглу $CDP$ угао $DPC$ највећи (зашто?). Дакле, тачне су неједнакости $m < AD + DP$, $n < BE + EP$, $p < CD$, $DE < CE$, чијим сабирањем добијамо $m + n + p + DE < AD + DP + BE + EP + CD + CE$. Како је $DE = DP + EP$, $AD + CD = b$ и $BE + CE = a$, следи да је $m + n + p < a + b$.

**197**. Како је $\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{TD} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OE}$, то је

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TE} = 5\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}.$$

Нека је $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{e}$. Ротирањем петоугла $ABCDE$ око тачке $O$ за угао $\frac{2\pi}{5}$ вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ се сликају редом у векторе $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OA}$, па закључујемо да се вектор $\overrightarrow{e}$ ротацијом око тачке $O$ за угао $\frac{2\pi}{5}$

слика у самог себе, то јест да је $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{0}$. Дакле,

$$5\overrightarrow{TO} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TE}.$$

**198**. Тражени коефицијент је једнак броју целобројних решења система $u + v + w = 15$, $0 \leqslant u, v, w \leqslant 10$. Нека је $u + v = s$. Тада је $w = 15 - s$. Дакле, за цео број $s$ важи $5 \leqslant s \leqslant 15$. Посматрајмо сада систем $u + v = s, 0 \leqslant u, v \leqslant 10$.

1) Нека је $5 \leqslant s \leqslant 10$. У овом случају $v$ је произвољан цео број који задовољава услов $0 \leqslant v \leqslant s$, а $u$ је дато са $u = s - v$. Дакле, у овом случају систем има $s + 1$ решење.
2) Нека је $11 \leqslant s \leqslant 15$. У овом случају $v$ је произвољан цео број који задовољава услов $s - 10 \leqslant v \leqslant 10$, а $u$ је дато са $u = s - v$. Дакле, у овом случају систем има $21 - s$ решење.

Према томе, тражени коефицијент је

$$(6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + (10 + 9 + 8 + 7 + 6) = 91.$$

**199**. Нека је $S_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k$ и $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} kq^k$. Тада је $S_0 = \dfrac{q}{1-q}$ и

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)q^k = S_1 - S_0 = q(S_1 - nq^n),$$

одакле следи да је $S_1 = \dfrac{S_0}{1-q} - \dfrac{n}{1-q}q^{n+1}$. Стога је

$$T_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)q^k = 1 + S_0 + 2S_1 = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2} - \frac{2n}{(1-q)^2}q^{n+1}.$$

Из последње једнакости, имајући у виду да за $|q| < 1$ важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{(1/q)^{n+1}} = 0$ (експоненцијална функција „брже” тежи у бесконачност од линеарне), следи

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2}.$$

**200**. Тривијално решење је $f(x) \equiv 0$. Зато претпоставимо да функција није идентички једнака нули. За $x = 0$ добијамо $f(yf(z)) = zf(y)$. Како десни члан може бити произвољан реалан број, следи да је функција $f$ сирјекција. За $y = z = 0$ је $f(x^2) = xf(x)$. Ако уведемо смену $x := -x$ имамо $f(x^2) = -xf(x)$, па је функција $f$ непарна и $f(0) = 0$. Доказаћемо да из $f(z) = 0$ следи $z = 0$. Претпоставимо супротно, тј. да је $f(z) = 0$ и $z \neq 0$. За $x = 0$ добијамо $0 = f(0) = zf(y)$, што је немогуће. Најзад, за $x = y = -z$, добијамо

$$f(x^2 + xf(-x)) = xf(x) - xf(x) = 0.$$

Из последње једнакости следи да је $x^2 + xf(-x) = x^2 - xf(x) = 0$, па је $f(x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Провером утврђујемо да је ово заиста решење.

**201**. Сума природних бројева који задовољавају постављене услове је $\frac{(m-1)m}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$, одакле добијамо једначину

$$\frac{(m-1)m}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 1000,$$

односно $(m+n)(m-n-1) = 2000$. Чиниоци $m+n$ и $m-n-1$ су природни бројеви различите парности, при чему је $(m+n) > (m-n-1)$, па су једине могућности:
1) $m+n = 2000, m-n-1 = 1$; 2) $m+n = 125, m-n-1 = 16$;
3) $m+n = 400, m-n-1 = 5$; 4) $m+n = 80, m-n-1 = 25$.
Решења ових система су уређени парови $(1001, 999)$, $(71, 54)$, $(53, 27)$, $(203, 197)$.

**202**. Уочимо да је $a^4 - 10a^2 + 9 = (a^2-1)(a^2-9) = (a-1)(a+1)(a-3)(a+3)$. Како је број $a$ прост и већи од 5, он мора бити непаран, па су чиниоци $(a-1)$, $(a+1)$, $(a-3)$ и $(a+3)$ четири узастопна парна броја. Од четири узастопна парна броја један је дељив са 8, један је дељив са 4, а није са 8, и два су дељива са 2, а нису са 4. Такође, од четири узастопна парна броја бар један је дељив са 3, и како $a$ није дељив са 5 тачно један од бројева $a-3$, $a-1$, $a+1$, $a+3$ јесте дељив са 5. Зато је производ $(a-1)(a+1)(a-3)(a+3)$ сигурно дељив са $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1920$.

**203**. Показаћемо да $x+y$ није дељиво са 4 из чега следи да није дељиво ни са 2008. Како је $xy = 2007^{2008}$, природни бројеви $x$ и $y$ морају бити непарни, то јест $x \equiv 1 \pmod 2$ и $y \equiv 1 \pmod 2$. Стога је $(x+1)(y+1)$ дељиво са 4, односно, $(x+1)(y+1) = (xy+1)+(x+y) = (2007^{2008}+1)+(x+y) \equiv 0 \pmod 4$. Из $2007 \equiv 3 \pmod 4$ следи $2007^{2008} \equiv 3^{2008} \equiv 1 \pmod 4$, а одатле добијамо да је $2007^{2008} + 1 \equiv 2 \pmod 4$. Значи, $x+y \equiv 2 \pmod 4$, што повлачи $x+y \not\equiv 0 \pmod{2008}$.

**204**. (а) Нека је $p^2 + 3pq + q^2 = r^2$. Квадрат сваког простог броја различитог од 3 даје остатак 1 при дељењу са 3. Ако су и $p$ и $q$ различити од 3, онда је $p^2 + 3pq + q^2 \equiv 2 \pmod 3$. Тада $r$ не може бити дељиво са 3, па је $r^2 \equiv 1 \pmod 3$. Како је $2 \neq 1$, у овом случају $p^2 + 3pq + q^2$ није квадрат неког природног броја. Ако је $p = 3$ добијамо да је $9 + 9q + q^2 = r^2$, односно $81 + 36q + 4q^2 - 4r^2 = 45$. Последњу једначину можемо записати у облику $(2q - 2r + 9)(2q + 2r + 9) = 45$, одакле уочавамо случајеве:

1) $2q - 2r + 9 = 3$ и $2q + 2r + 9 = 15$;

2) $2q - 2r + 9 = 1$ и $2q + 2r + 9 = 45$.

У првом случају добијамо $q + r = 3$, што је немогуће, док у другом добијамо $q = 7$. Дакле, једино је за $p = 3, q = 7$ и $p = 7, q = 3$ вредност израза $p^2 + 3pq + q^2$ потпун квадрат ($r = 11$).

(б) Нека је $p^2 + 3pq + q^2 = 5^n$. Из $p \geqslant 2$ и $q \geqslant 2$ следи $p^2 + 3pq + q^2 \geqslant 20$, па мора бити $n \geqslant 2$. Дакле, $p^2 + 3pq + q^2$ је дељиво са 25, па и са 5. Како је $p^2 + 3pq + q^2 = (p-q)^2 + 5pq$ дељиво са 5, следи да је $(p-q)^2$ дељиво са 5, а тада $(p-q)^2$ мора бити дељиво и са 25. Онда и $5pq$ мора бити дељиво са 25, што значи да је $pq$ дељиво са 5. Како су $p$ и $q$ прости бројеви следи да је $p = q = 5$. Дакле, једино је за $p = q = 5$ вредност израза $p^2 + 3pq + q^2$ степен броја 5 ($n = 3$).

**205**. Дата једначина је еквивалентна са

$$(2x^2+y)^2 = y^2+4y^{z+1}.$$

Очигледно је да једначина нема решења за $z \leqslant -1$. За $z=0$ десна страна једначине је једнака $y^2+4y=(y+2)^2-4$, па може бити квадрат целог броја једино за $y=-4$ или $y=0$. У првом случају немамо решење (не постоји целобројно $x$ за које је $2x^2-4=0$), а у другом случају добијамо да је $x=0$, па је једно решење полазне једначине $(0,0,0)$.

Претпоставимо сада да је $z \geqslant 1$. Полазну једначину можемо записати и у облику

$$(2x^2+y)^2 = y^2(1+4y^{z-1}),$$

одакле непосредно следи да $1+4y^{z-1}$ мора бити квадрат непарног целог броја, то јест $1+4y^{z-1}=(2v+1)^2$, односно $y^{z-1}=v(v+1)$. Ово је могуће за $v=0$, што даје $x=0$ и $y=0$, као и за $z=2$ и $y=v(v+1)$. По уврштавању последњег у једначину добијамо $x^2=v^2(v+1)$, тако да $v$ мора бити облика $v=t^2-1, t\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$ (вредности $-1,0,1$ за $v$ смо искључили јер поново дају привијално решење $x=0$). Директна провера потврђује да $x=t^3-t$ и $y=t^4-t^2$ за $z=2$ задовољавају дату једначину.

Дакле, све тројке $(x,y,z)$ целих бројева које задовољавају дату једначину су $(0,0,z)$, $z\geqslant 0$, и $(t^3-t, t^4-t^2, 2), t\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$.

**206**. Решење се базира на идентитету, који није тешко проверити:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Уведимо ознаке $a=\sqrt[3]{x-y}$, $b=\sqrt[3]{y-z}$ и $c=\sqrt[3]{z-x}$ и претпоставимо супротно, то јест $a+b+c=0$. На основу горње једнакости следи $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, а с друге стране имамо и да је $a^3+b^3+c^3=x-y+y-z+z-x=0$, па добијамо

$$abc=\sqrt[3]{(x-y)(y-z)(z-x)}=0,$$

што је немогуће, јер су $x,y,z$ различити реални бројеви.

**207**. Ако је $a^b=1$, тада је $|a|^b=1$, односно $b\cdot\ln|a|=0$, одакле добијамо да је $b=0, a\neq 0$ или је $a=\pm 1$. Ово разматрање примењујемо на нашу једначину ($a=x^2-7x+11$, $b=x^2-11x+30$). У првом случају имамо $x^2-11x+30=0$ одакле је $x=5$ или $x=6$, и за оба ова решења је $x^2-7x+11$ различито од нуле. У другом случају је $x^2-7x+11=1$, одакле добијамо решења $x=2$ или $x=5$. У трећем случају $x^2-7x+11=-1$ додајемо и услов да је $x^2-11x+30$ паран број, па је $x=3$ или $x=4$. Дакле, производ свих решења дате једначине је $6!$.

**208**. Уведимо ознаке

$$x=\sqrt[3]{28+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} \quad \text{и} \quad y=\sqrt[3]{28-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}.$$

Онда је

$$A = x + y, \quad xy = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad x^3 + y^3 = 56.$$

Користећи идентитет

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

добијамо једначину $A^3 = 56 + 2A$, односно $(A-4)(A^2+4A+14) = 0$, чије је једино реално решење је $A = 4$.

**209**. Уочимо функцију $f(x) = x^2 - 3x + 3$. Сада се решавање дате једначине своди на налажење непокретних тачака пресликавања $f^2(x) = (f \circ f)(x)$. Како из $f(x) = x$ следи $f(f(x)) = f(x) = x$, закључујемо да је свака непокретна тачка функције $f$ уједно и непокретна тачка функције $f^2$. Решења једначине $f(x) = x$ су $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Стога је полазна једначина $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$ еквивалентна са $(x-1)(x-3)R(x) = 0$, где је $R(x) = x^2 - 2x + 1$, односно са $(x-1)^3(x-3) = 0$, па су решења бројеви 1 и 3.

**210**. Означимо бројеве у кругу са $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{199}, x_{200}$, и нека је $x_1 = 3$. На основу задатих услова важи $3 + x_2 + x_3 \leqslant 3$ и $x_{199} + x_{200} + 3 \leqslant 3$, односно $x_2 + x_3 \leqslant 0$ и $x_{199} + x_{200} \leqslant 0$. Из последње две неједнакости следи $x_{199} + x_{200} + 3 + x_2 + x_3 \leqslant 3$. За преосталих 195 бројева на основу следећих 65 неједнакости (које важе по услову задатка):

$$x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 3, \quad x_7 + x_8 + x_9 \leqslant 3, \ \ldots, \ x_{196} + x_{197} + x_{198} \leqslant 3,$$

добијамо да је $x_4 + x_5 + \cdots + x_{197} + x_{198} \leqslant 65 \cdot 3 = 195$. Према томе,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{197} + x_{198} + x_{199} + x_{200} \leqslant 3 + 195,$$

па закључујемо да не можемо у круг поређати 200 реалних бројева тако да буду испуњени тражени услови.

**211**. Свакој књизи на полици са $r$ књига доделимо тежину $\frac{1}{r}$. Тако је сума свих тежина књига на једној полици једнака 1, док је сума тежина на свим полицама једнака $n$. Посматрајмо сада нове тежине у преуређеној библиотеци. Ако се књига налази на полици која има мање књига него раније, тада је нова тежина $\frac{1}{s}$ већа од старе $\frac{1}{r}$, због $s < r$. Књига је привилегована ако и само ако се тежина повећала новим распоредом. Сума свих тежина у преуређеној библиотеци је једнака $n + 2008$, односно имамо повећање за 2008 у односу на претходни распоред. Међутим, ни једна привилегована књига не може изазвати повећање које је веће или једнако 1, због

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{r} < 1 \quad \text{за} \ \ r > s \geqslant 1.$$

Зато мора постојати строго више од 2008 привилегованих књига.

**212**. На последње место долази број који је или мањи или већи од свих претходних. Дакле, за последње место имамо две могућности или 1 или $n$. У сваком следећем кораку такође имамо две могућности – највећи или најмањи број од преосталих. Када поставимо $n-1$ бројева, на првом месту пишемо једини преостали број. Зато је број тражених пермутација једнак $2^{n-1}$.

**213**. Тражени збир је једнак

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{j+k-1} i = \sum_{j=1}^{k}\frac{k}{2}(2j+k-1) = k\sum_{j=1}^{k} j + \frac{k^2(k-1)}{2}$$
$$= k\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k^2(k-1)}{2} = k^3.$$

**214**. Трансформишимо рекурентну релацију:

$$2k\cdot a_k = 2(k-1)\cdot a_{k-1} - a_{k-1}.$$

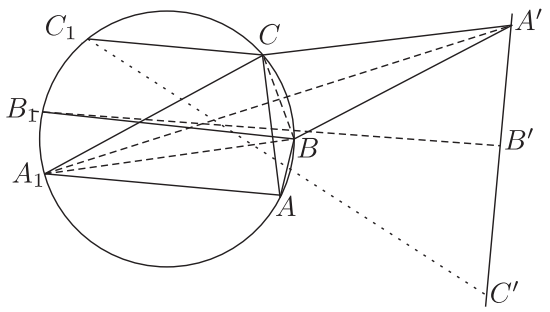
Сабирањем претходног израза за $k = 2, 3, \ldots, n$ добијамо

$$2n\cdot a_n = 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}),$$

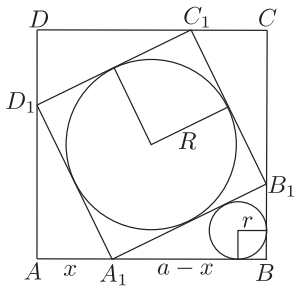
односно,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 - (2n-1)a_n = 1 - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < 1.$$

**215**. Дијагонале четвороугла $A_1BA'C$ се, по претпоставци, полове, па је тај четвороугао паралелограм, то јест $CA' \parallel A_1B$ и $CA' = A_1B$ (слика 2.38). Слично је $CB' \parallel B_1A$ и $CB' = B_1A$. Одатле следи да је троугао $A'B'C$ једнакокрак и да је $A'B' \perp C_1C$. Како је $AA_1 \parallel CC_1$, одатле следи да су тачке $A', B', C'$ колинеарне.




Слика 2.38.




Слика 2.39.

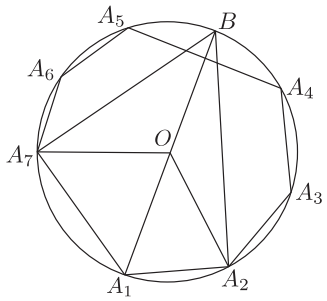
**216**. Нека је $ABCD$ дати квадрат и $A_1B_1C_1D_1$ уписани квадрат, при чему тачке $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ припадају редом страницама $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ (слика 2.39). Означимо са $R$ и $r$ полупречнике уписаних кругова у квадрат $A_1B_1C_1D_1$ и троугао $A_1BB_1$. Тада је

$A_1B_1 = 2R$ и $A_1B + BB_1 = a$, па како је $\triangle A_1BB_1$ правоугли (са правим углом код темена $B$), то је $a - 2r = 2R$. Збир површина уписаних кругова је

$$R^2\pi + 4r^2\pi = \left(\frac{a}{2} - r\right)\pi + 4r^2\pi = \left[5\left(r - \frac{a}{10}\right)^2 + \frac{a^2}{5}\right]\pi,$$

па је та површина минимална за $r = \dfrac{a}{10}$. Уведимо ознаке $AA_1 = x$ и $A_1B = y$. За $r = \dfrac{a}{10}$ добијамо $R = \dfrac{2a}{5}$, и систем $x + y = a, x^2 + y^2 = 4R^2 = \dfrac{16}{25}a^2$, одакле следи $x = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{10}\right)a$ или $x = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{10}\right)a$.

**217**. Претпоставимо да никоја два суседна угла тог седмоугла нису једнаки $120°$ и нека је, на пример, $\sphericalangle A_7A_1A_2 = \sphericalangle A_2A_3A_4 = \sphericalangle A_4A_5A_6 = 120°$, а $B$ тачка дијаметрално супротна тачки $A_1$ (слика 2.40). Тада је $\sphericalangle A_1A_2B = \sphericalangle A_1A_7B = 90°$, па добијамо $\sphericalangle A_2BA_7 = 360° - 120° - 2 \cdot 90° = 60°$. Зато је $\sphericalangle A_2OA_7 = 120°$. Аналогно доказујемо $\sphericalangle A_2OA_7 = \sphericalangle A_4OA_6 = 120°$, па на основу тога следи $\sphericalangle A_6OA_7 = 0°$. Контрадикција! Дакле, два суседна угла датог седмоугла једнаки су $120°$. Не умањујући општост разматрања можемо претпоставити $\sphericalangle A_7A_1A_2 = \sphericalangle A_1A_2A_3 = 120°$. Тада су дужи $A_2A_3$ и $A_1A_7$ симетричне у односу на симетралу дужи $A_1A_2$, па следи $A_2A_3 = A_1A_7$.



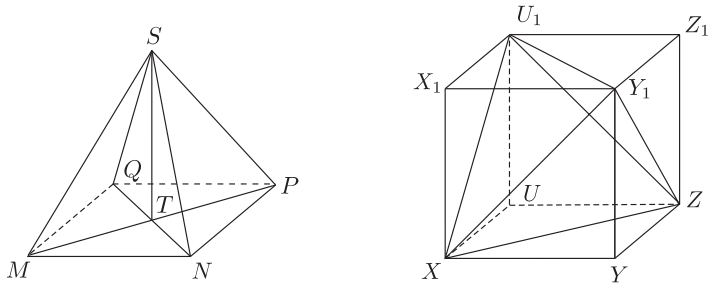

Слика 2.40.

**218**. Нека је $ABCD$ правилан тетраедар ивице $a$, $SMNPQ$ правилна пирамида са врхом $S$ и ивицом $a$, а $XYZUX_1Y_1Z_1U_1$ коцка ивице $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (слика 2.41). Нека је $T$ пресек дијагонала квадрата $MNPQ$. Тада је

$$MT = NT = PT = QT = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad ST = \sqrt{SM^2 - MT^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Према томе, равни $SMP$ и $SQN$ деле пирамиду $SMNPQ$ на четири тростране пирамиде, од којих свака има сва три права ивична угла код једног темена и све ивице које полазе из тог темена једнаке $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Довољно је још приметити да равни $XY_1Z$, $XY_1U_1$, $XZU_1$ и $ZY_1U_1$ деле коцку на правилан тетраедар $XZY_1U_1$ чија је ивица

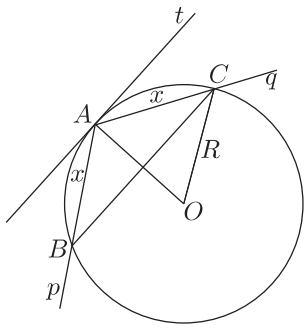
једнака $a$ и пирамиде $YXZY_1$, $X_1XY_1U_1$, $UXZU_1$ и $Z_1ZU_1Y_1$ (прво означено теме је врх), код којих су сви ивични углови при врху прави, а све ивице које полазе из врха једнаке $\frac{a}{\sqrt{2}}$.




Слика 2.41.

**219**. Означимо са $\alpha$ угао $\sphericalangle CAB$, а са $x$ дужину једнаких тетива $AB$ и $AC$ (слика 2.42). Онда површину троугла $ABC$ можемо изразити у функцији угла $\alpha$:

$$P(\alpha) = \frac{1}{2}x^2 \sin\alpha = 2R^2 \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$$




Слика 2.42.

Сада тражимо максимум функције $P(\alpha)$. Једначина $P'(\alpha) = 0$ еквивалентна је са

$$2R^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 0,$$

тј. са $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ и $\alpha > 0$. Како је $P'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ и $P''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (израчунати!), закључујемо да је површина троугла $ABC$ највећа за $\alpha = \frac{\pi}{3}$ и она тада износи $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

**220**. Нека је $P'$ пресек правих $CI$ и $EF$. У троуглу $CEP'$ имамо да је $\sphericalangle EP'C = \frac{\beta}{2}$. Из синусне теореме у истом троуглу је

$$\frac{CP'}{\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}} = \frac{CE}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

У троуглу $CIB$ важи

$$\frac{CI}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{BC}{\sin\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}} = 4R\sin\frac{\alpha}{2},$$

односно, $CI = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Из правоуглог троугла $CEI$ добијамо да је $CE = CI\cos\frac{\gamma}{2}$. Зато, $CP' = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = BC\cos\frac{\gamma}{2}$ и троугао $CP'B$ има прав угао код темена $P'$. Ово значи да је $P \equiv P'$, а тачке $C, I$ и $P$ су колинеарне. Очигледно је $\sphericalangle PCA = \frac{\gamma}{2}$ и $\sphericalangle PIA = 90^\circ - \sphericalangle ABI$.

**221**. Како свежи краставци садрже $99\%$ воде, у $100$ килограма краставаца имамо само $1$ килограм суве материје. Сутрадан ће тај килограм бити $2\%$ од укупне масе краставаца, што значи да ће ујутру бити $50$ килограма краставаца за продају.

**222**. У конвексном десетоуглу број дијагонала је $d = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot(10-3) = 35$. У равни одаберемо тачку и конструишемо кроз њу праве паралелне правцима дијагонала. Укупан број полуправих је $70$, а такође има и $70$ њима одређених углова, чије се унутрашње области не преклапају. Како је $70\cdot 6^\circ = 420^\circ > 360^\circ$, морају постојати дијагонале чији правци заклапају угао мањи од $6^\circ$.

**223**. Ако се дата шаховска табла обоји „дијагонално" у осам боја, као што је приказано на слици 2.43, онда ће најмање једна од ових боја бити у основи за пет топова, јер је $33 = 4\cdot 8 + 1$. Тих пет топова се међусобно не нападају.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

Слика 2.43.

**224**. Једначина је симетрична по $x$ и $y$, па се може записати у еквивалентном облику

$$((x+y)^2 - 2xy)(x+y) = 8((x+y)^2 - xy + 1),$$

тј. у облику $u(u^2-2v) = 8(u^2-v+1)$, при чему је $u = x+y$ и $v = xy$. Из $u^3 - 2uv = 8u^2 - 8v + 8$, закључујемо да $2 \mid u$, тј. да је $u = 2t, t \in \mathbb{Z}$. Сада, једначина

постаје $2t^3 - tv = 8t^2 - 2v + 2$. Ова једначина је линеарна по $v$ и за $t \neq 2$ имамо

$$v = 2t^2 - 4t - 8 - \frac{18}{t-2},$$

одакле следи да су могуће вредности израза $t-2$ делиоци броја $18$, тј. елементи скупа $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$. Разматрајући све добијене случајеве, наравно и случај $t = 2$, добијамо да је скуп решења $\{(8,2),(2,8)\}$.

**225**. Дата једначина је еквивалентна са једначином

$$\sqrt{5x+1} + \sqrt{5}\sqrt{x+2} = \sqrt{61-4x} + 2\sqrt{4-x},$$

а област у којој има смисла тражити решење (област на којој су дефинисана сва четири квадратна корена из једначине) је интервал $\left[-\frac{1}{5}, 4\right]$. Уочимо функције

$$f(x) = \sqrt{5x+1} + \sqrt{5}\sqrt{x+2} \quad \text{и} \quad g(x) = \sqrt{61-4x} + 2\sqrt{4-x}.$$

Како је $f(3) = g(3) = 9$, број 3 јесте решење дате једначине. За $-\frac{1}{5} \leqslant x < 3$ важи $f(x) < f(3) = g(3) < g(x)$, док за $3 < x \leqslant 4$ важи $f(x) > f(3) = g(3) > g(x)$, па је $x = 3$ једино решење.

**226**. Функција $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$ је конвексна за $x > 0$ ($f''(x) > 0$). Применом Јенсенове неједнакости добијамо

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{x_1}) + \ln(1+\frac{1}{x_2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{x_n})}{n} \geqslant \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}\right) = \ln(n+1).$$

Како је $e^x$ растућа функција, следи да је

$$e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{x_1})+\ln(1+\frac{1}{x_2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{x_n})}{n}} \geqslant e^{\ln(n+1)},$$

одакле добијамо тражену неједнакост.

**227**. (а) Доказаћемо, индукцијом по $n$, да је $a_n = \dfrac{3^n - 1}{n}$ (ово се може наслутити ако се израчуна неколико првих чланова).

За $n = 1$ важи $a_1 = \frac{3^1-1}{1} = 2$.

Претпоставимо да тврђење важи за произвољан природан број $n$, па докажимо да онда тврђење важи и за природне бројеве $2n$ и $2n+1$. Користећи рекурентну везу дату у задатку добијамо:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{1}{2}(na_n^2 + 2a_n) = \frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{(3^n-1)^2}{n^2} + 2 \cdot \frac{3^n-1}{n}\right) = \frac{3^{2n}-1}{2n}, \\ a_{2n+1} &= \frac{1}{2n+1}(3n^2a_n^2 + 6na_n + 2) = \frac{3^{2n+1}-1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Овим је тврђење доказано.

(б) Чланови низа $a_{3n} = \dfrac{3^{3n}-1}{3n}$, $n \in \mathbb{N}$, нису природни бројеви, зато што 3 не дели $3^{3n}-1$. Међутим, за $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, доказаћемо да $a_{2^k}$ јесте природан број. Како је $\mathrm{nzd}(3, 2^k) = 1$, према Ојлеровој теореми $2^k \mid \left(3^{\varphi(2^k)} - 1\right)$, тј. $2^k \mid \left(3^{2^{k-1}} - 1\right)$. Стога, $2^k \mid \left(3^{2^{k-1}} - 1\right)\left(3^{2^{k-1}} + 1\right)$, односно $2^k \mid \left(3^{2^k} - 1\right)$. Закључујемо да су сви чланови низа с индексом који је степен броја 2 природни бројеви.

**228**. Функцији облика $f(x) = \dfrac{ax+b}{-bx+a}$, где су $a$ и $b$ реални бројеви, придружимо комплексан број $z = a + ib$. Ако је

$$f_1(x) = \frac{a_1x+b_1}{-b_1x+a_1}, \quad f_2(x) = \frac{a_2x+b_2}{-b_2x+a_2},$$

онда је

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \frac{(a_1a_2 - b_1b_2)x + (a_1b_2 + a_2b_1)}{-(a_1b_2 - a_2b_1)x - (a_1a_2 - b_1b_2)}.$$

Према томе, ако су функцијама $f_1$ и $f_2$ придружени комплексни бројеви $z_1$ и $z_2$, онда је функцији $f_1 \circ f_2$ придружен комплексан број $z_1z_2$. Како је

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

датој функцији $f$ је придружен број $z = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$. Зато је функцији $f^{2008}(x)$ придружен број

$$z^{2008} = \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{2008} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

па је $f^{2008}(x) = x$.

**229**. Уведимо ознаке $p = 2^{1+\sqrt{xy}}$ и $q = 3^{x+y+1}$, при чему су $x$ и $y$ истог знака. Тада полазни систем постаје

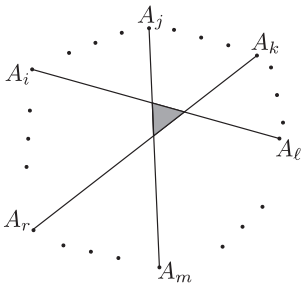
$$\begin{aligned} p + q &= a, \\ p^3 + q^3 &= a^3 - 3a^2 + 3a. \end{aligned}$$

После степеновања прве једначине са 3 и замене у другој добијамо $pq = a - 1$. Дакле,

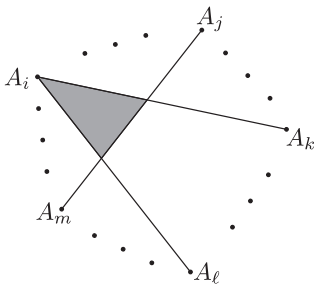
$$\begin{aligned} p + q &= a, \\ pq &= a - 1. \end{aligned}$$

Сада, на основу Виетових формула, закључујемо да су $p$ и $q$ решења квадратне једначине $t^2 - at + a - 1 = 0$. Како су решења ове једначине $t_1 = a - 1$ и $t_2 = 1$, а $2^{1+\sqrt{xy}} \geqslant 2$, мора бити $2^{1+\sqrt{xy}} = a - 1$ и $3^{x+y+1} = 1$. Из последње једнакости следи да је $x + y + 1 = 0$, тј. $y = -1 - x$. Дакле, $2^{1+\sqrt{x(-1-x)}} = a - 1$. Максимум функције $\sqrt{x(-1-x)}$ је $\frac{1}{2}$ за $x = -\frac{1}{2}$, па закључујемо да је $2 \leqslant 2^{1+\sqrt{x(-1-x)}} \leqslant 2^{3/2}$. Према томе, $2 \leqslant a - 1 \leqslant 2\sqrt{2}$, односно $3 \leqslant a \leqslant 1 + 2\sqrt{2}$.

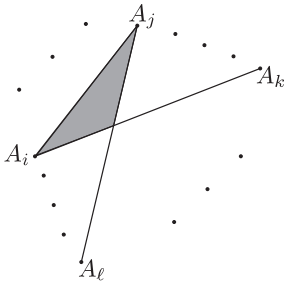
**230**. Означимо са $m$ број тражених троуглова, а са $S_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, скуп троуглова чијих $i$ темена су уједно и темена датог $n$-тоугла. Троугао са траженим својством може бити формиран на један од следећа четири приказана начина.



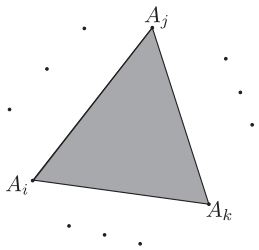

Слика 2.44.




Слика 2.45.




Слика 2.46.




Слика 2.47.

Троугао приказан на слици 2.44 припада скупу $S_0$, троугао приказан на слици 2.45 припада скупу $S_1$, троугао приказан на слици 2.46 припада скупу $S_3$, а троугао приказан на слици 2.47 припада скупу $S_3$. Сада лако израчунавамо да је

$$m = K(S_0) + K(S_1) + K(S_2) + K(S_3) = \binom{n}{6} + 5 \cdot \binom{n}{5} + 4 \cdot \binom{n}{4} + \binom{n}{3}.$$

**231**. Претпоставимо најпре да је $c = 0$ и $a \geqslant d$. Нека су $x_1$ и $x_2$ природни бројеви, такви да је $x_1 < x_2$. Тада је $x_2 - x_1 \geqslant 1$, па је

$$\frac{ax_2 + b}{d} - \frac{ax_1 + b}{d} = \frac{a}{d}(x_2 - x_1) \geqslant 1,$$

што значи да је $f(x_2) > f(x_1)$. Дакле, функција $f$ јесте инјективна.

Да бисмо доказали обрнуто, докажимо да било који од услова $c \neq 0$ или $c = 0, a < d$ повлачи да функција $f$ није инјективна.

У првом случају можемо писати

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}.$$

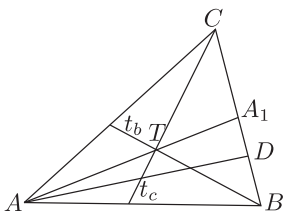
Ако је $\dfrac{a}{c} = \alpha$ цео број, онда ће се у једном од интервала $(\alpha - 1, \alpha]$, $[\alpha, \alpha + 1)$ (у зависности од знака $bc - ad$) налазити сви бројеви $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ за довољно велико $x$. За све такве $x$ биће $f(x) = \alpha - 1$, односно $f(x) = \alpha$, па функција $f$ није инјективна. Слично, ако $\alpha$ није цео број и $[\alpha] = \beta$, сви бројеви $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ће припадати интервалу $[\beta, \beta + 1)$ за довољно велико $x$, па ће за такве $x$ бити $f(x) = \beta$.

У другом случају означимо са $y_n = \dfrac{an+b}{d}$, $n \in \mathbb{N}_0$, и изаберимо природан број $k$, такав да је $\dfrac{a}{d} < 1 - \dfrac{1}{k}$. Како за $n \in \mathbb{N}_0$ важи $y_{n+1} - y_n = \dfrac{a}{d}$, то је $y_k - y_0 = k\dfrac{a}{d} < k - 1$. То значи да за неко $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ бројеви $y_i$ и $y_{i+1}$ припадају истом интервалу облика $[\alpha, \alpha + 1)$ за неко $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Тада је $f(i) = f(i+1)$, па према томе ни у овом случају функција $f$ није инјективна.

**232**. Ако $n$ парова бирамо један по један, то можемо учинити на $\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{2}{2}$ начина. Како нам поредак није битан, претходно добијени производ делимо са $n!$, па је број парова за први ниво такмичења једнак

$$\frac{1}{n!} \cdot \left( \binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{2}{2} \right) = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}.$$

**233**. Нека је $A_1$ средиште странице $BC$, $T$ тежиште, а $D$ подножје висине из темена $A$ троугла $ABC$ (слика 2.48).




Слика 2.48.

Како су тежишне дужи $t_b$ и $t_c$ узајамно нормалне следи да је $\triangle BCT$ правоугли. Онда је дуж $A_1T$ полупречник описаног круга око $\triangle BCT$ и $BC = 2A_1T$. Како је $AD < AA_1$ следи

$$\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{BD}{AD} + \frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AD} \geqslant \frac{BC}{AA_1} = \frac{2TA_1}{3TA_1} = \frac{2}{3}.$$

**234**. Нека је $p$ вероватноћа да играч $C$ победи играча $A$, а $q$ вероватноћа да играч $C$ победи играча $B$. Тада је $p < q$, јер је $A$ бољи играч од играча $B$. У табели су дате вероватноће да играч $C$ оствари две узастопне победе при свим могућим распоредима.

| распореди | $ABA$ | $BAB$ |
|---|---|---|
| ППП | $pqp$ | $qpq$ |
| ППГ | $pq(1-p)$ | $qp(1-q)$ |
| ГПП | $(1-p)qp$ | $(1-q)pq$ |

Како је

$$pqp + pq(1-p) + (1-p)qp = pq(2-p),$$
$$qpq + qp(1-q) + (1-q)pq = pq(2-q)$$

и $pq(2-p) > pq(2-q)$, играчу $C$ више одговара распоред $ABA$.

**235**. Претпоставимо супротно, да функција $f$ има период $T$. Тада би за свако $x$ важило

$$\cos(x+T) + \cos(x\sqrt{2} + T\sqrt{2}) = \cos x + \cos x\sqrt{2}.$$

Специјално, за $x = 0$ добијамо $\cos T + \cos T\sqrt{2} = 2$, одакле следи $T = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, и $T\sqrt{2} = 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$. Из последње две једнакости добијамо да је $\sqrt{2}$ количник два цела броја, што није тачно ($\sqrt{2}$ је ирационалан број), па претпоставку морамо одбацити. Дакле, функција $f(x) = \cos x + \cos x\sqrt{2}$ није периодична.

**236**. (а) Користећи познату неједнакост $|\sin t| \leqslant |t|, t \in \mathbb{R}$, добијамо

$$|\sin x - \sin x_1| = 2\left|\sin\frac{x-x_1}{2}\cos\frac{x+x_1}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_1}{2}\right| = |x-x_1| \leqslant \frac{1}{100}.$$

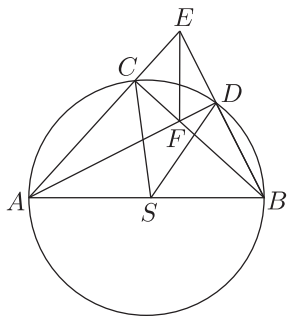
(б) Одговор је негативан. С обзиром на то да је за $x_1 = \sqrt{n\pi}, n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi} - \sqrt{n\pi}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}+\sqrt{n\pi}} = 0,$$

за довољно велико $n$ биће $\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi} - \sqrt{n\pi} < \delta$, ма како било унапред задато $\delta > 0$. Дакле, ако изаберемо $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}$, биће $x \in \Delta$ и

$$|\sin x^2 - \sin x_1^2| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) - \sin n\pi\right| = 1 > \frac{1}{100}.$$

**237**. Тачке $C$ и $D$ припадају кругу над пречником $AB$, па је $AD \perp BD$ и $BC \perp AC$ (слика 2.49). Зато је тачка $F$ ортоцентар троугла $ABE$. Према томе $EF \perp AB$.

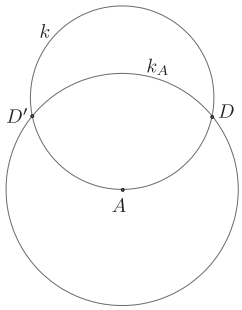



Слика 2.49.

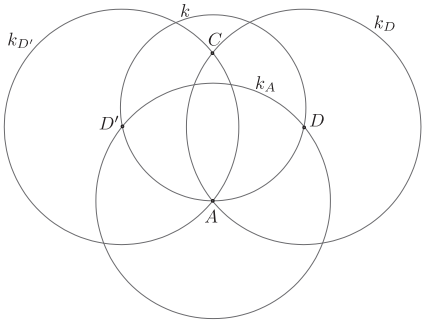
Како је $\sphericalangle CSD = 90°$, то је $\sphericalangle CAD = 45°$. Дакле, троугао $ACF$ је једнакокракоправоугли, па је $AC = CF$. Осим тога $\sphericalangle ECF = \sphericalangle BCA = 90°$ и $\sphericalangle EFC = \sphericalangle BAC$ (углови са нормалним крацима). Закључујемо да су троуглови $ECF$ и $BCA$ подудрни, из чега следи $EF = AB$, односно вектор $\overrightarrow{EF}$ не зависи од избора тачака $C$ и $D$.

**238**. Конструкцију ћемо извести у четири корака.

*1. корак.* На кружници $k$ изаберемо произвољну тачку $A$ и опишемо кружницу $k_A$ са средиштем у тачки $A$ и полупречником мањим од пречника кружнице. Пресечне тачке кружница $k$ и $k_A$ обележимо са $D$ и $D'$ (слика 2.50).



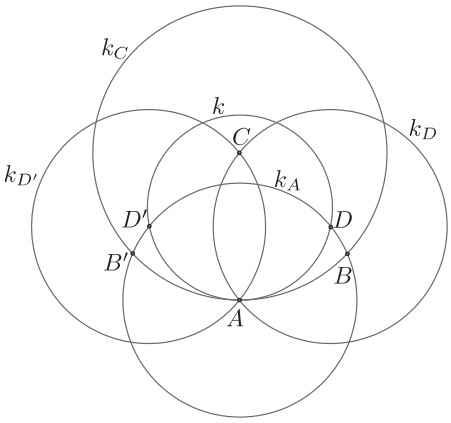

Слика 2.50.




Слика 2.51.

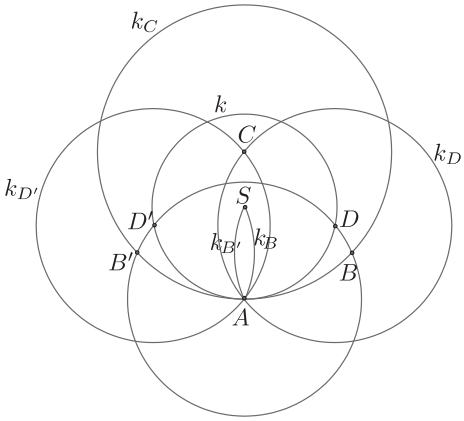
*2. корак.* Конструишемо кружнице $k_D$ и $k_{D'}$, са центрима у тачкама $D$ и $D'$, које пролазе кроз тачку $A$. Другу пресечну тачку ових кружница обележимо са $C$ (слика 2.51).

*3. корак.* Са центром у тачки $C$ конструишемо кружницу $k_C$ која пролази кроз тачку $A$. У пресеку $k_C$ и $k_A$ добијамо тачке $B$ и $B'$ (слика 2.52).




Слика 2.52.

*4. корак.* Конструишемо кружнице $k_B$ и $k_{B'}$, са центрима у тачкама $B$ и $B'$, које пролазе кроз тачку $A$. Другу пресечну тачку ових кружница обележимо са $S$. Тачка $S$ је центар кружнице $k$ (слика 2.53).




Слика 2.53.

*Доказ.* На основу конструкције, тачке $A$, $S$ и $C$ су колинеарне. Такође, на основу конструкције имамо да је $CA = CB$, $BS = BA$ и $\sphericalangle CAB = \sphericalangle SAB = \sphericalangle BSA$, па закључујемо да је $\triangle ABS \sim \triangle ABC$. На основу тога је $AS : AB = AB : AC$, односно, $AS = \dfrac{AB^2}{AC}$.

Нека је тачка $E$ средиште кружнице. Тачка $E$ мора припадати правој $AC$ (на основу конструкције) и мора се налазити унутар кружнице $k$. Како је $EA = ED$, $AD = CD$ и $\sphericalangle EAD = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DCA$, закључујемо да су троуглови $ADE$ и $CAD$ слични, па имамо да је $AE : AD = AD : AC$. На основу последњег важи $AE = \dfrac{AD^2}{AC}$ и како је $AB = AD$ следи $AS = AE$.

Како се тачке $S$ и $E$ налазе са исте стране тачке $A$ на правој $AC$ и $AS = AE$ закључујемо да се тачке $S$ и $E$ се поклапају. Овим је доказ завршен.

**239**. Нека је $O$ произвољна тачка. Како тачке $P$ и $R$ (слика 2.54) припадају равни којој су паралелне праве $AD$ и $BC$, то те тачке деле дужи $AB$ и $DC$ у истом односу, тј. постоји реалан број $\lambda$, такав да важи

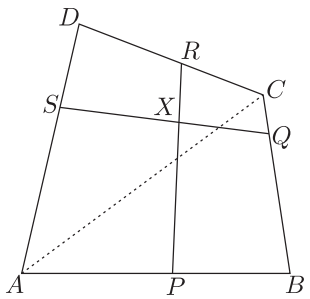
$$\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OD} + (1-\lambda)\overrightarrow{OC}. \tag{2.47}$$

Аналогно добијамо да постоји број $\mu$ такав да је

$$\overrightarrow{OS} = \mu\overrightarrow{OA} + (1-\mu)\overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{OQ} = \mu\overrightarrow{OB} + (1-\mu)\overrightarrow{OC}. \tag{2.48}$$

Нека су тачка $X$ дужи $PR$ и тачка $Y$ дужи $QS$ одређене условима

$$\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OS} + (1-\lambda)\overrightarrow{OQ}, \quad \overrightarrow{OY} = \mu\overrightarrow{OP} + (1-\mu)\overrightarrow{OR}. \tag{2.49}$$




Слика 2.54.

Из једнакости (2.47), (2.48) и (2.49) следи

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY} = \lambda\mu\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\mu\overrightarrow{OB} + (1-\lambda)(1-\mu)\overrightarrow{OC} + \lambda(1-\mu)\overrightarrow{OD}.$$

Према томе, $X \equiv Y$, па се дужи $PR$ и $QS$ секу, одакле закључујемо да тачке $P, Q, R$ и $S$ припадају једној равни.

**240**. Ако је $p = 2$, тада $p$ дели $2^n - n$ за сваки паран број $n$. Претпоставимо да је $p$ непаран број. На основу мале Фермаове теореме следи да је $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, одакле, степеновањем, добијамо $2^{(p-1)^{2k}} \equiv 1 \equiv (p-1)^{2k} \pmod p$. Последња конгруенција је еквивалентна са чињеницом да $p$ дели $2^n - n$ за $n = (p-1)^{2k}$, где је $k$ произвољан број.

**241**. Ако је $q = 2$, $p$ може бити било који прост број јер је $(p+1)^2$ потпун квадрат. Ако је $q \neq 2$, $q$ је непаран број, па можемо писати $q = 2k+1$. Тада је $(p+1)^q = [(p+1)^k]^2 \cdot (p+1)$. Одавде следи да је $p+1$ потпун квадрат природног броја. Дакле, $p + 1 = n^2$, односно $p = (n-1)(n+1)$. Како је $p$ прост број следи да је $n - 1 = 1$ и $n + 1 = p$, одакле добијамо $p = 3$. Значи, скуп решења је $R = \{(p, 2), (3, q) \mid$ где је $p$ прост број, а $q$ непаран прост број$\}$.

**242**. За $n = 1$ имамо да је $d(1) = 1$, па су тада сви чланови низа једнаки 1, односно сви чланови низа су тада потпуни квадрати.

У случају када је $n > 1$ уведимо ознаке $d_0 = n$ и $d_i = d(d_{i-1})$. Тада дати низ строго опада док се не заустави на броју 2. Дакле, $d_k = 2$ за неко $k$.

Ако је број $n$ прост, имамо да је $d_1 = d_2 = \cdots = 2$, па у низу $d_i$ нема квадрата.

Претпоставимо да је $n$ сложен број. То повлачи да је $d_1 > 2$, па је $k \geqslant 2$. Испитајмо претходне чланове низа. Број $d_{k-1}$ има тачно два делиоца по дефиницији, па мора бити прост (он је непаран, јер је $d_{k-1} > 2$). Следи да $d_{k-2}$ има непаран број делилаца. Како су једини бројеви који имају непаран број делилаца потпуни квадрати, закључујемо да је $d_{k-2}$ потпун квадрат.

Према томе, услове задатка испуњавају сви прости бројеви $n$.

**243**. Означимо дечаке са $b_1, b_2, \ldots, b_n$, а девојчице са $g_1, g_2, \ldots, g_n$, тако да $(b_i, g_i)$ чине један пар. Посматрамо таблицу $n \times n$, где на позицији $(i, j)$ пишемо 1, ако је дечак $b_i$ позвао девојчицу $g_j$, а 0 у супротном. По дефиницији се на дијагонали налазе све јединице. За $i \neq j$, позиције $(i, j)$ и $(j, i)$ не смеју обе бити означене са 1, јер у том случају упаривање није јединствено – можемо да извршимо упаривање $(b_i, g_j)$ и $(b_j, g_i)$ уместо $(b_i, g_i)$ и $(b_j, g_j)$. Дакле, највећи број јединица у таблици (односно укупан број позива дечака) је једнак

$$n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Да бисмо показали да је овај број позива достижан, претпоставимо да је дечак $b_i$ позвао девојчице $g_1, g_2, \ldots, g_i$. Очигледно, тада имамо јединствено упаривање и добијамо доње-троугаону таблицу са укупно $1 + 2 + \cdots + n$ позива.

**244**. У једном мерењу је немогуће утврдити да ли је распоред налепница исправан, пошто стављањем два тега на једну страну ваге не можемо утврдити њихов распоред. Доказаћемо да је могуће проверити распоред налепница у два мерења. У првом мерењу на један тас ставимо златник из ћупа означеног са 6, а на други тас златнике из ћупова 1, 2 и 3. Ако је равнотежа нарушена, тада је тас са теговима из ћупова 1, 2 и 3 претегао и налепнице су лоше залепљене. У супротном знамо да су златници тежине 6 правилно означени, као и да су скупови $\{1, 2, 3\}$ и $\{4, 5\}$ такође добро означени до на пермутацију. У другом мерењу ставимо на леви тас тегове 6 и 1, а на десни 5 и 3. Леви тас има тежину већу или једнаку од 7, док десни тас може бити од 5 до 8. Ако десна страна није претегла, тада знамо да су налепнице лоше постављене. У супротном, ћупови 5, 3 и 1 су добро означени, а самим тим и ћупови 2 и 4.

**245**. Приметимо да важи

$$c_k = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad \text{и} \quad d_k = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k) = 2^k k!.$$

Доказаћемо да је прва сума једнака $c_n$, тј. да је

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{2^{n-k} n!}{k!} \cdot \frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Последња једнакост је еквивалентна са

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^{n-k} \binom{2k}{k} = (-1)^n \binom{2n}{n}, \tag{2.50}$$

па ћемо доказати ову једнакост. Како је биномни коефицијент $\binom{2k}{k}$ слободан члан у развоју $(x + \frac{1}{x})^{2k}$, тада је лева страна суме слободан члан у рационалној функцији:

$$\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^{n-k} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2k}.$$

С друге стране,

$$\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\right)^n=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}-4\right)^n=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n},$$

чији слободан члан представља управо десну страну једнакости (2.50).

Друга сума је једнака нули, јер је

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{2^{n-k}n!}{k!}2^k k!=2^n n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=2^n n!(1-1)^n=0.$$

**246**. Означимо са $X_k=\sum_{i=1}^{k}x_i$ суму првих $k$ бројева $x_i$. Аналогно нека је $Y_k=\sum_{j=1}^{k}y_j$. Без губљења општости претпоставимо да важи неједнакост $X_n>Y_m$ (у случају једнакости задатак је решен). За сваки број $1\leqslant p\leqslant m$, дефинишимо индекс $f(p)$ на следећи начин:

$$X_{f(p)}\leqslant Y_p<X_{f(p)+1},\quad 0\leqslant f(p)\leqslant n-1.$$

Такав индекс сигурно постоји, због претпоставке $X_n>Y_m$. Даље, нека је $g(p)=Y_p-X_{f(p)}$. Ако је $g(p)$ једнако нули за неко $p$, задатак је решен. По дефиницији индекса $f(p)$ имамо:

$$g(p)=Y_p-X_{f(p)}<x_{f(p)+1}\leqslant m.$$

Дакле, важи неједнакост $0<g(p)\leqslant m-1$. На основу Дирихлеовог принципа следи да постоје два индекса $p_1<p_2$, таква да је $g(p_1)=g(p_2)$. Тада је:

$$\sum_{i=f(p_1)+1}^{f(p_2)}x_i=X_{f(p_2)}-X_{f(p_1)}=Y_{p_2}-Y_{p_1}=\sum_{j=p_1+1}^{p_2}y_j.$$

Дакле, постоје непразан скуп неких од бројева $x_i$ и непразан скуп неких од бројева $y_i$ такви да су суме чланова та два скупа једнаке.

**247**. Када уведемо смену $y=x-3\frac{1}{2}$ једначина постаје

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^4+\left(y+\frac{1}{2}\right)^4=(2y)^4,\quad \text{тј.}\quad 2y^4+3y^2+\frac{1}{8}=16y^4,$$

одакле је $112y^4-24y^2-1=0$. Сада уводимо смену $t=y^2$ и тако добијамо квадратну једначину $112t^2-24t-1=0$, чија су решења $t_1=\frac{1}{4}$ и $t_2=-\frac{1}{28}$. Дакле, $y\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},i\sqrt{\frac{1}{28}},-i\sqrt{\frac{1}{28}}\right\}$, односно, $x\in\left\{3,4,\frac{7}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{14},\frac{7}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{14}\right\}$.

**248**. Дату једначину има смисла решавати само у скупу $x\in\mathbb{R}^+$ и тад је она еквивалентна са

$$10^{-3}x^{\log_{10}x}\cdot\frac{1}{x^2}+\left(\log_{10}^2x-2\log_{10}x-3\right)\cdot\frac{1}{x}=1,$$

односно са

$$10^{-3}\left(10^{\log_{10} x}\right)^{\log_{10} x}\cdot\frac{1}{10^{\log_{10} x^2}}+\left(\log_{10}^2 x-2\log_{10} x-3\right)\cdot\frac{1}{10^{\log_{10} x}}=1,$$

тј. са

$$10^{\log_{10}^2 x-2\log_{10} x-3}+\frac{\log_{10}^2 x-2\log_{10} x-3}{10^{\log_{10} x}}=1.$$

Уводећи смену $t=\log_{10} x$ добијамо једначину

$$10^{t^2-2t-3}+\frac{t^2-2t-3}{10^t}=1.$$

Непосредно видимо да је за $t^2-2t-3=0$, тј. за $t=-1$ или $t=3$, последња једначина задовољена.

Када је $t^2-2t-3>0$, важи и $10^{t^2-2t-3}>1$, па је онда $10^{t^2-2t-3}+\dfrac{t^2-2t-3}{10^t}>1$.

Када је $t^2-2t-3<0$, важи и $10^{t^2-2t-3}<1$, па је онда $10^{t^2-2t-3}+\dfrac{t^2-2t-3}{10^t}<1$.

Према томе, једина решења полазне једначине су $x_1=10^{-1}$ и $x_2=10^3$.

**249**. Тврђење ћемо доказати математичком индукцијом.

База индукције. За $n=1$ тврђење је тачно, јер је

$$\frac{(a_1a_2)^2-(a_1a_0)^2}{4d}=a_1^2\frac{(a_2-a_0)(a_2+a_0)^2}{4d}=a_1^2\frac{2d\cdot 2a_1}{4d}=a_1^3.$$

Индукцијска претпоставка. Претпоставимо да је тврђење тачно за неки природан број $k$, тј. да је

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_k^3=\frac{(a_ka_{k+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d}.$$

Индукцијски корак. Докажимо да онда тврђење важи и за природан број $k+1$. На основу претпоставке и особина аритметичког низа добијамо да је

$$\begin{aligned}a_1^3+a_2^3+\cdots+a_k^3&=\frac{(a_ka_{k+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d}+a_k^3=\frac{(a_ka_{k+1})^2-(a_1a_0)^2+4da_{k+1}^3}{4d}\\&=\frac{a_{k+1}^2(a_k^2+4d(a_k+d))-(a_1a_0)^2}{4d}\\&=\frac{a_{k+1}^2(a_k+2d)^2-(a_1a_0)^2}{4d}=\frac{(a_{k+1}a_{k+2})^2-(a_1a_0)^2}{4d},\end{aligned}$$

па тврђење важи за природан број $k+1$.

На основу принципа математичке индукције тврђење важи за сваки природан број $n$.

**250**. Како дато тврђење важи за свако $x\in\mathbb{R}$, важи и за $x=0$ и $x=1$. За $x=0$ добијамо $f(0)-(f(0))^2\geqslant\frac{1}{4}$, односно $(f(0)-\frac{1}{2})^2\leqslant 0$. На основу последњег закључијемо да је $f(0)=\frac{1}{2}$. За $x=1$ добијамо $f(1)-(f(1))^2\geqslant\frac{1}{4}$, односно $(f(1)-\frac{1}{2})^2\leqslant 0$, одакле је $f(1)=\frac{1}{2}$. Дакле, $f(0)=f(1)$, па функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ са датим својством није инјективна.

**251**. Како је $f(1) < f(2) < f(3) < \cdots$, закључујемо да $f(1)$ не може бити једнако 1. Из неједнакости $f(1) < f(f(1)) = 3$ следи да је $f(1) = 2$ и $f(2) = 3$. Сада није тешко увидети да важи $f(f(2)) = f(3) = 2 \cdot 3$. Ако уместо $n$ сменимо $f(n)$ у идентитет, добијамо

$$f(3n) = f(f(f(n))) = 3f(n).$$

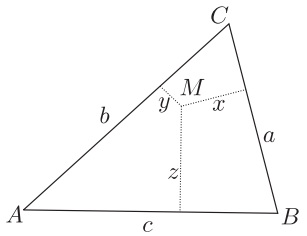
Сада математичком индукцијом доказујемо да важи

$$f(n) = \begin{cases} n + 3^k, & \text{за } 3^k \leqslant n \leqslant 2 \cdot 3^k, \\ 3n - 3^{k+1}, & \text{за } 2 \cdot 3^k < n < 3^{k+1}. \end{cases}$$

За $n = 3^{k+1}$ имамо да је $f(3^{k+1}) = 3f(3^k) = 3 \cdot (3^k + 3^k) = 2 \cdot 3^{k+1}$, док за $n = 2 \cdot 3^{k+1}$ добијамо $f(2 \cdot 3^{k+1}) = 3(2 \cdot 3^{k+1} - 3^{k+1}) = 3^{k+2}$. Како је функција $f$ строго растућа, а између бројева $3^{k+1}$ и $2 \cdot 3^{k+1}$ (укључујући и та два броја) има тачно $3^{k+1} + 1$ бројева и тачно исто толико вредности за $f(3^{k+1})$ до $f(2 \cdot 3^{k+1})$, закључујемо да важи $f(n) = n + 3^{k+1}$ за $3^{k+1} \leqslant n \leqslant 2 \cdot 3^{k+1}$. Претпоставимо сада да је $2 \cdot 3^{k+1} < n < 3^{k+2}$. Тада је по услову задатка $f(f(n - 3^{k+1})) = 3 \cdot (n - 3^{k+1})$, за $3^{k+1} < n - 3^{k+1} < 2 \cdot 3^{k+1}$. По индукцијској хипотези добијамо да је $f(n - 3^{k+1}) = n$ и најзад $f(n) = 3n - 3^{k+2}$. Како је $2 \cdot 3^6 < 2008 < 3^7$ закључујемо да је $f(2008) = 3 \cdot 2008 - 3^7 = 3837$.

**252**. Претпоставимо да је то могуће. Нека је $n$ број четвороуглова у подели. Означимо са $S$ збир свих углова тих четвороуглова. Тада је $S = 360°n$. Сваки од четвороуглова има по један неконвексан угао и теме сваког од неконвексних углова се налази у унутрашњости многоуглова. Свако теме може бити теме само једног од неконвексних углова. Према томе, број темена неконвексних углова је $n$, па је збир свих углова тих темена једнак $360°n$. Како четвороуглови у подели имају још темена (темена многоугла, и евентуално, темена на рубу многоугла), закључујемо да је $S > 360°n$, што је контрадикција.

**253**. Нека су дужине страница троугла редом $a$, $b$ и $c$, а растојања произвољне тачке троугла до правих које садрже те странице редом $x$, $y$ и $z$ (слика 2.55).




Слика 2.55.

Тада је, на основу неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског,

$$ax + by + cz \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Како је површина троугла $P = \frac{1}{2}(ax + by + cz)$, следи да је

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geqslant \frac{2P}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \text{тј.} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{4P^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Једнакост је тачна ако и само ако је $a : b : c = x : y : z$.

Конструишимо тачку $M$ унутар троугла $ABC$ која задовољава овај услов. Нека је $N$ тачка угла $ACB$ удаљена $a$ од $BC$ и $b$ од $AC$. Свака тачка $K$ полуправе $CN$ задовољава очигледно $x(K) : y(K) = a : b$. Обратно, тачка $K$ овог угла која задовољава $x(K) : y(K) = a : b$ припада полуправој $CN$. У супротном права кроз $K$ паралелна са $BC$ секла би $CN$ у $L$. Тада из $x(L) = x(K)$ следи $y(L) = y(K)$ и одатле добијамо $BC \parallel AC$, што је немогуће. Дакле, полуправа $CN$ је скуп тачака $\sphericalangle ACB$ за који важи $x : y = a : b$. Слично, скуп тачака $\sphericalangle CAB$ за које је $x : z = b : c$ је полуправа с врхом у $A$. Те две полуправе се секу у тачки $M$ унутар троугла, за коју важи

$$\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}.$$

Стога је $M$ тачка са траженим својством.

**254**. Дказаћемо прво следеће помоћно тврђење.

Лема. Нека су $A, B, C, D$ произвољне тачке и нека су $E, F, G, H$ тим редом средишта дужи $AB, BC, CD$ и $DA$. Ако је $T$ пресечна тачка дужи $EG$ и $FH$ тада је

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}, \tag{2.51}$$

где је $O$ произвољна тачка.

*Доказ.* Уочимо (слика 2.56) да је $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$, али и $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\big)$. Слично је и $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\big)$. Како је и $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, добијамо да је $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, па је четвороугао $EFGH$ паралелограм. Према томе, тачка $T$ полови дужи $EG$ и $FH$. Дакле, имамо

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}\big), \tag{2.52}$$

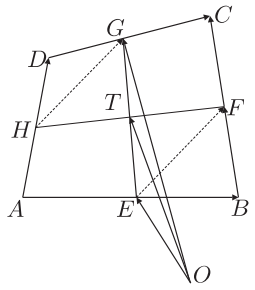
а како је

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\big) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\big), \tag{2.53}$$

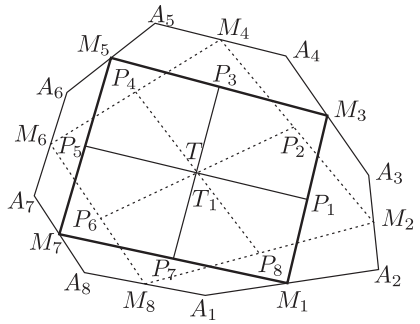
заменом (2.53) у (2.52) добијамо једнакост (2.51). □

Докажимо сада тврђење задатка. Означимо са $T$ пресек дужи $P_1P_5$ и $P_3P_7$, а са $T_1$ пресек дужи $P_2P_6$ и $P_4P_8$ (слика 2.57). Треба да докажемо да је $T \equiv T_1$, а за то је довољно доказати да је $\overrightarrow{OT} \equiv \overrightarrow{OT_1}$, где је $O$ произвољна тачка. Посматрајмо тачке $M_1, M_3, M_5, M_7$. На основу леме имамо

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4}}{4}.$$




Слика 2.56.




Слика 2.57.

Како је

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}), \quad \overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}),$$
$$\overrightarrow{OM_5} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6}), \quad \overrightarrow{OM_7} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_7} + \overrightarrow{OA_8}),$$

добијамо

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6} + \overrightarrow{OA_7} + \overrightarrow{OA_8}}{8}.$$

Ако посматрамо тачке $M_2, M_4, M_6, M_8$, аналогно добијамо

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6} + \overrightarrow{OA_7} + \overrightarrow{OA_8}}{8}.$$

Тиме смо доказали да је $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1}$, тј. $T \equiv T_1$.

**255**. Нека је $O$ центар описаног круга око троугла $ABC$, а тачке $A'$, $B'$ и $C'$ редом средишта страница $BC$, $AC$ и $AB$. Како се центар описаног круга налази у пресеку симетрала страница, није тешко закључити да важи

$$S_{\triangle OCP} = \frac{PC \cdot CB'}{2} = \frac{PC \cdot AC}{4} = \frac{CK \cdot BC}{4} = \frac{CK \cdot CA'}{2} = S_{\triangle OCK}.$$

Зато су висина из темена $P$ у троуглу $OCP$ и висина из темена $K$ у троуглу $OCK$ једнаке, па права $OC$ садржи тежишну дуж у троуглу $OPK$. Следи да су тачке $O, C$ и средиште дужи $PK$ колинеарне.

**256**. Нека је $S$ центар круга $\Gamma$ са пречником $MN$ који споља додирује круг $K$. Означимо угао $MPN$ са $\varphi$. За тачку $X$ израз $p(X) = SX^2 - \frac{MN^2}{4}$ представља потенцију тачке $X$ у односу на круг $\Gamma$. Нека права $PN$ сече круг $\Gamma$ у тачки $Q$. Тада важи $\sphericalangle PQM = \sphericalangle NQM = \frac{\pi}{2}$ и

$$p(P) = PQ \cdot PN = (PM \operatorname{ctg} \varphi) \cdot PN = 2 \cdot S_{\triangle MPN} \operatorname{ctg} \varphi.$$

С друге стране, имамо следеће

$$p(P) = (SA^2 + AP^2) - \frac{MN^2}{4} = (SA^2 + AO^2) - \frac{MN^2}{4} + AP^2 - AO^2$$
$$= p(O) - r^2 = r(r + MN) - r^2 = r \cdot MN.$$

Изједначавањем датих израза добијамо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2 \cdot S_{\triangle MPN}}{r \cdot MN} = \frac{AP \cdot MN}{r \cdot MN} = \frac{AP}{r},$$

што значи да је угао $MPN$ константан.

**257**. Нека је $\Gamma$ приписани круг у троуглу $ABC$ који одговара темену $C$. Ако са $P'$ означимо тачку дијаметрално супротну тачки $P$ у односу на уписани круг $k$, а са $E'$ тачку додира приписаног круга $\Gamma$ са страницом $AB$, из хомотетије ова два круга следи да су тачке $C$, $P'$ и $E'$ колинеарне. Како је $PP'$ нормално на страницу $AB$, а тачке $F$ и $O$ су средишта дужи $AC$ и $PP'$, добијамо да је $E \equiv E'$. Није тешко приметити да је четвороугао $APOR$ квадрат, па је $AP = r = \frac{b+c-a}{2}$. Сада је $AE = c - r = \frac{a+c-b}{2}$.

У троуглу $APM$ имамо да је $\sphericalangle PAM = 90^\circ - \beta$ и $\sphericalangle APM = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$. Нека је тачка $G$ пресек праве $BO$ и странице $AC$. Из особине симетрале угла следи $CG = \frac{ab}{a+c}$. Троуглови $BGC$ и $MPA$ су слични, па добијамо

$$\frac{AM}{AP} = \frac{BC}{GC}, \quad \text{тј.} \quad AM = r \cdot \frac{(a+c)a}{ab}.$$

Даљим сређивањем добијамо

$$AM = \frac{(b+c-a)(a+c)}{2b} = \frac{ba + bc + c^2 - a^2}{2b} = \frac{ba + bc + -b^2}{2b} = AE.$$

**258**. Приметимо да важи

$$\cos x_i = \sqrt{1 - \sin^2 x_i} = \sqrt{\sum_{i \neq j} \sin^2 x_j}.$$

Користећи неједнакост између квадратне и аритметичке средине, за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ добијамо

$$\cos x_i = \sqrt{n-1}\sqrt{\frac{\sum\limits_{i \neq j} \sin^2 x_j}{n-1}} \geqslant \sqrt{n-1}\frac{\sum\limits_{i \neq j} \sin x_j}{n-1} = \frac{\sum\limits_{i \neq j} \sin x_j}{\sqrt{n-1}}.$$

Сада, сумирањем по свим $i$, добијамо неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} \cos x_i \geqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \sin x_j$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n} (n-1) \sin x_i = \sqrt{n-1} \sum_{i=1}^{n} \sin x_i,$$

која је еквивалентна са траженом.

**259**. Нека је $a$ основна ивица, а $H$ висина пирамиде. Из $V = B \cdot H = a^2 \cdot H$, добијамо $H = \dfrac{V}{a^2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{a^2}$. Збир дужина свих ивица призме је

$$f(a) = 8a + 4H = 8a + \frac{48\sqrt{3}}{a^2}.$$

Како је

$$f'(a) = 8 - \frac{96\sqrt{3}}{a^3} \quad \text{и} \quad f''(a) = \frac{288\sqrt{3}}{a^4},$$

функција $f$ има минимум за $a = \sqrt[3]{12\sqrt{3}}$. Тада је

$$H = \frac{12\sqrt{3}}{\left(\sqrt[3]{12\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt[3]{12\sqrt{3}} = a,$$

то јест ради се о коцки чија је површина $P = 6a^2 = 36\sqrt[3]{2}$.

**260**. Претпоставимо да су бројеви $x$, $y$ и $z$ целобројна решења једначине и да ниједан од њих није дељив са 7. Ако је $r$ остатак при дељењу неког броја са 7 ($0 < r < 7$), онда трећи степен тог броја даје остатак $r^3$ при дељењу са 7 . Како бројеви $1^3$,$2^3$,$3^3$,$4^3$,$5^3$,$6^3$ при дељењу са 7 дају, редом, остатке 1,1,6,1,6,6, не постоје три броја чији трећи степени у збиру дају остатак 0 при дељењу са 7, а да при томе ниједан од њих није дељив са 7.

**261**. Уочимо да је

$$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 - 1)^2 + 2 \geqslant 2 \quad \text{и} \quad y^4 - 3y^2 + 4 = \left(y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geqslant \frac{7}{4}.$$

Стога је $2(x^4 - 2x^2 + 3)(y^4 - 3y^2 + 4) \geqslant 7$, а једнакост важи само ако је

$$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 - 1)^2 + 2 = 2 \quad \text{и} \quad y^4 - 3y^2 + 4 = \left(y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4},$$

односно ако је $x^2 = 1$ и $y^2 = \dfrac{3}{2}$. Дакле,

$$(x, y) \in \left\{ \left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \left(1, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right), \left(-1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \left(-1, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \right\}.$$

**262**. Када извршимо назначена степеновања и од обе стране једначине одузмено 1 добијамо

$$2m^2 + 2m = 2n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n.$$

Сада, обе стране поделимо са 2 и групишемо чланове на десној страни на следећи начин

$$m^2 + m = (n^2 + n)^2 + 2(n^2 + n).$$

Видимо да је десна страна једначине за 1 мања од квадрата тринома $n^2+n+1$, па зато обема странама додајемо број 1. Дакле, полазна једначина је еквивалентна са једначином

$$m^2+m+1=(n^2+n+1)^2.$$

Како за $m>0$ важи

$$m^2<m^2+m+1<(m+1)^2,$$

а за $m<-1$ важи

$$m^2>m^2+m+1>(m+1)^2,$$

закључујемо да је $m=0$ или $m=-1$. Провером добијамо да су решења једначине уређени парови $(0,0),(0,-1),(-1,-1)$ и $(-1,0)$.

**263**. Постоје, за $x=y=z=0$ дати изрази јесу квадрати броја 0. Показаћемо и да других природних бројева са датим својством нема. Нека је

$$x+y=a^2,$$

$$2x+y=b^2, \tag{2.54}$$

$$x+2y=c^2. \tag{2.55}$$

Сабирајући (2.54) и (2.55) и замењујући $3(x+y)$ са $3a^2$ добијамо

$$3a^2=b^2+c^2. \tag{2.56}$$

Како квадрати целих бројева при дељењу са 3 дају остатке или 0 или 1, на основу (2.56) закључујемо $a\equiv b\equiv c\equiv 0 \pmod 3$. Нека су $a,b$ и $c$ најмањи природни бројеви који су решења једначине (2.56). Међутим, ако је $(a,b,c)$ решење једначине (2.56), тада је и $(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3})$ решење те једначине, што је у контрадикцији са чињеницом да су $a$, $b$ и $c$ најмањи природни бројеви за које важи (2.56). Дакле, уређена тројка $(0,0,0)$ је једино решење.

**264**. По услову задатка важи

$$\sqrt[3]{n}=\frac{n}{1000}-a,$$

где је $0\leqslant a<1$. Уводећи смену $m=\sqrt[3]{n}$ добијамо $m^3-1000m-1000a=0$, односно

$$m^2=1000+\frac{1000a}{m}.$$

На основу последњег следи да је $m^2\geqslant 1000$, то јест $m\geqslant 32$. С друге стране, пошто је $a<1$ и $m\geqslant 32$, следи да је $m^2\leqslant 1000+\frac{1000}{32}<1032$, па је $m\leqslant 32$ због $32^2<1032<33^2$. Како је $m\geqslant 32$ и $m\leqslant 32$, закључујемо да је $m=32$. Дакле, $n=32^3=32768$.

**265**. Одговор је потврдан, што се може наслутити покушајима за мало $n$. Доказаћемо тврђење математичком индукцијом. За $n=2$ распоредимо бројеве у скупове $\{11,22\}$ и $\{21,12\}$. Претпоставимо сада да смо елементе скупа $M_n$ распоредили у два скупа $A$ и $B$ са траженим својством. Низове дужине $n+1$ добијамо тако што на крај сваког од

низова дужине $n$ додамо или 1 или 2. Нека се у скупу $A_1$ налазе низови добијени тако што се на сваки низ из $A$ на крају допише 1, а у скупу $A_2$ нека се налазе низови који су добијени тако што се на сваки низ из $A$ на крају допише 2. Аналогно дефинишемо скупове $B_1$ и $B_2$. Тада скуп $M_{n+1}$ разбијамо на скупове $A_1 \cup B_2$ и $A_2 \cup B_1$, који очигледно имају тражено својство.

**266**. Претпоставимо, без губитка општости, да је сума $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ позитивна. Нека је

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i.$$

За граничне случајеве добијамо

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i > 1 \quad \text{и} \quad S_0 = -\sum_{i=1}^{n} x_i < -1.$$

Претпоставимо да не постоји индекс $k$, тако да је $-1 \leqslant S_k \leqslant 1$. Нека је $m$ највећи индекс за који је $S_m < 0$ (такав индекс сигурно постоји због $S_0 < 0$). Број $m$ је сигурно мањи од $n$, јер је $S_n > 0$, па постоји $S_{m+1}$. На основу претпоставке је $S_m < -1$ и $S_{m+1} > 1$, одакле следи

$$2 < S_{m+1} - S_m = 2x_{m+1} \leqslant 2|x_{m+1}| \leqslant 2.$$

Контрадикција! Дакле, постоји природан број $k$ са траженим својством.

**267**. Нека је $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Тада је, по услову задатка,

$$\begin{aligned} P(2) &= (a_0 + a_2 \cdot 2^2 + a_4 \cdot 2^4 + \cdots) + 2(a_1 + a_3 \cdot 2^2 + a_5 \cdot 2^4 + \cdots) \\ &= (a_0 + a_2 \cdot 4 + a_4 \cdot 4^2 + \cdots) + 2(a_1 + a_3 \cdot 4 + a_5 \cdot 4^2 + \cdots) = n. \end{aligned}$$

Коефицијенти полинома $P$ припадају скупу $\{0, 1, 2, 3\}$, па су у заградама, за дати полином, одређени бројеви $x = \overline{a_0a_2a_4\ldots}$ и $y = \overline{a_1a_3a_5\ldots}$, који су записани у бројевном систему са основом 4. При томе ови бројеви јединствено одређују одговарајуће коефицијенте ($x$ парне, а $y$ непарне). Како је полином једнозначно одређен својим коефицијентима, следи да је број полинома са траженим својством једнак броју ненегативних целобројних решења једначине $x + 2y = n$. Није тешко видети да ова једначина има $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ решења, јер $y \in \{0, 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Дакле, има $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ полинома $P$ чији коефицијенти припадају скупу $\{0, 1, 2, 3\}$ и за које важи $P(2) = n$.

**268**. На основу неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског важи

$$\Big(\frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + \cdots + \frac{S}{S-x_n}\Big)\Big(\frac{S-x_1}{S} + \frac{S-x_2}{S} + \cdots + \frac{S-x_n}{S}\Big) \geqslant n^2,$$

и како је

$$\frac{S-x_1}{S} + \frac{S-x_2}{S} + \cdots + \frac{S-x_n}{S} = n - 1,$$

добијамо тражену неједнакост.

**269**. За сваке четири тачке простора $A, B, C$ и $D$ важи

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}.$$

Користећи претходне једнакости добијамо

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.
\end{aligned}$$

**270**. I) Права $CY$ је радикална оса за кругове описане око $\triangle AHC$ и $\triangle EBC$, па је зато довољно показати да тачка $X$ има једнаку потенцију у односу на оба круга. У односу на круг око троугла $AHC$, потенција тачке $X$ је $XA \cdot XH$, а у односу на круг око троугла $BCE$, она износи $XE \cdot XF$ (круг око троугла $BCE$ је заправо круг над пречником $BC$, јер је $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90°$). Како је четвороугао $AFHE$ тетиван, јер су углови код $E$ и $F$ прави, из потенције тачке $X$ у односу на круг описан око њега закључујемо $XE \cdot XF = XA \cdot XH$, што смо и желели да добијемо.

II) Уочимо инверзију са центром у $C$ и полупречником $\sqrt{CA \cdot CE} = \sqrt{CD \cdot CB}$ (јер је четвороугао $ABDE$ тетиван, а производ под кореном је заправо потенција тачке $C$ у односу на круг око тог четвороугла). Како је и четвороугао $AFHE$ тетиван, следи $CE \cdot CA = CF \cdot CH$, па се овом инверзијом тачке $A$, $F$, $B$ сликају у тачке $E$, $H$, $D$, респективно. Права $EF$ слика се онда у круг описан око $\triangle AHC$, док се права $AH$ слика у круг око $\triangle CEF$, односно $\triangle CEB$. Због тога се тачка $X$ (пресек праве $EF$ и $AH$) слика у $Y$ (пресек одговарајућих кругова). Како су оригинал и слика при инверзији увек колинеарни са центром инверзије, следи да су тачке $C$, $X$ и $Y$ колинеарне.

**271**. На правој $CD$ доцртамо тачку $Z$, тако да важи $\sphericalangle BZC = \sphericalangle ADB$. Због једнакости углова над тетивом $AB$ добијамо да је четвороугао $MXBZ$ тетиван. Из потенције тачке $Y$ у односу на ова два круга добијамо

$$YM \cdot YB = XY \cdot YZ \quad \text{и} \quad YM \cdot YB = YD \cdot YC.$$

На основу претходних једнакости добијамо

$$XD \cdot YC = (DY - XY)YC = XY \cdot CZ,$$

па је дати израз једнак $CZ$ и не зависи од избора тачке $M$.

**272**. Ако посматрамо хомотетију из тачке $C$, која слика уписани круг у $\triangle ABC$ у приписани круг иза странице $AB$, добијамо да се тачка $M$ слика у додирну тачку приписаног круга са страницом $AB$. Сада није тешко израчунати да је $X'B = AX$. Нека је $Z$ додирна тачка уписаног круга са страницом $BC$. Тада можемо увести смену $x = AX = AY$, $y = BX = BZ$ и $z = CY = CZ$. Из Менелајеве теореме и због распореда тачака $A - X - X'$ имамо да су тачке $A, L, I$ колинеарне ако и само ако је

$$\frac{XA}{AX'} \cdot \frac{X'L}{LM} \cdot \frac{MI}{IX} = 1.$$

Након скраћивања и замене израза за $x$ и $y$, добијамо да је последњи израз еквивалентан са

$$\frac{LM}{LX'} = \frac{XA}{AX'} = \frac{x}{y}. \tag{2.57}$$

Нека је $C'$ подножје висине из темена $C$. Тада су троуглови $CC'X'$ и $MXX'$ слични, па имамо

$$\frac{CC'}{2r} = \frac{CX'}{MX} = 1 + \frac{CM}{MX} = 1 + \frac{LX'}{LM + LX'}. \tag{2.58}$$

Сада на основу (2.57) и (2.58) добијамо да су тачке $A, L, I$ колинеарне ако и само ако важи

$$\frac{CC'}{2r} = 1 + \frac{y}{y+x} = \frac{2y+x}{x+y} = \frac{x+y+z+(y-z)}{AB}.$$

Користећи формулу за површину троугла

$$S = \frac{CC' \cdot AB}{2} = r(x+y+z),$$

добијамо да је последњи израз еквивалентан са $y = z$, односно $AC = BC$.

**273**. Нека је

$$A = \frac{h_a - r}{h_a + r} + \frac{h_b - r}{h_b + r} + \frac{h_c - r}{h_c + r} \quad \text{и} \quad B = \frac{h_a + r}{h_a - r} + \frac{h_b + r}{h_b - r} + \frac{h_c + r}{h_c - r}.$$

Како је

$$h_a = \frac{2P}{a}, \quad h_b = \frac{2P}{b}, \quad h_c = \frac{2P}{c} \quad \text{и} \quad r = \frac{P}{s}, \tag{2.59}$$

добијамо да је

$$A = \frac{2s-a}{2s+a} + \frac{2s-b}{2s+b} + \frac{2s-c}{2s+c},$$

то јест

$$A = 3 - 2\left(\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c}\right). \tag{2.60}$$

Уведимо, сада, смену

$$x = 2a+b+c, \quad y = a+2b+c \quad \text{и} \quad z = a+b+2c.$$

Онда је $a+b+c = \frac{1}{4}(x+y+z)$, $a = \frac{1}{4}(3x-y-z)$, $b = \frac{1}{4}(3y-z-x)$ и $c = \frac{1}{4}(3z-x-y)$. Замењујући последње у (2.60) добијамо

$$A = 3 - 2\left(\frac{3x-y-z}{4x} + \frac{3y-z-y}{4y} + \frac{3z-x-y}{4z}\right),$$

односно

$$\begin{aligned} A &= 3 - \frac{3}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\Big(\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}\Big) \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big) + \Big(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\Big) + \Big(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Сада, на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине два позитивна броја, добијамо

$$A \geqslant -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(2+2+2) = \frac{3}{2}.$$

Једнакост важи у случају једнакостраничног троугла.

На основу (2.59) имамо да је

$$B = \frac{2s+a}{2s-a} + \frac{2s+b}{2s-b} + \frac{2s+c}{2s-c} = 3 + 2\Big(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\Big)$$

Користећи, сада, познату неједнакост

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

(доказати!) добијамо $B \geqslant 3+3 = 6$. И сада, једнакост важи само у случају једнакостраничног троугла.

**274**. Обележимо пресечну тачку симетрале угла $\gamma$ и странице $c$ са $C_1$. Тада важи

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta CAC_1} + P_{\Delta CBC_1}. \tag{2.61}$$

Како је $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$, $P_{\Delta CAC_1} = \frac{1}{2}as_c\sin\frac{\gamma}{2}$ и $P_{\Delta CBC_1} = \frac{1}{2}bs_c\sin\frac{\gamma}{2}$ и $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ заменом у (2.61) добијамо

$$2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = (a+b)s_c\sin\frac{\gamma}{2},$$

одакле је $s_c = \dfrac{ab\cdot 2\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$. Остаје још да се елиминише $\cos\frac{\gamma}{2}$ из последње једнакости. На основу косинусне теореме је $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, и како је $\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\gamma}{2}}$ добијамо $\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{(a+b)^2-c^2}{4ab}}$. Дакле,

$$s_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

**275**. Уводећи смену $y = x\sin x$ дати израз пишемо у еквивалентном облику

$$S = \frac{9y^2+4}{y} = 9y + \frac{4}{y}.$$

Како је за $0 < x < \pi$, $y$ ненегативан број можемо применити неједнакост између аритметичке и геометријске средине, па добијамо

$$S \geqslant 2\sqrt{9y \cdot \frac{4}{y}} = 12.$$

Једнакост се достиже за $9y = \frac{4}{y}$, односно за $y = \frac{2}{3}$. Остаје да проверимо да ли једначина $x \sin x = \frac{2}{3}$ заиста има решења. Нека ја $f(x) = x \sin x$. Ова функција је непрекидна и при томе је $f(0) = 0$, а $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > \frac{2}{3}$, па мора постојати $x$ такво да је $f(x) = x \sin x = \frac{2}{3}$. До овог закључка се може доћи и ако се нацртају графици функција $f_1(x) = \sin x$ и $f_2(x) = \frac{2}{3x}$ за $0 < x < \pi$, и утврди да се они секу. Дакле, једначина $x \sin x = \frac{2}{3}$ има решење, па минимум датог израза јесте једнак 12.

**276**. Ослобађајући се апсолутних вредности добијамо

$$f(x) = \begin{cases} (1-2a)x - 2a, & x < -1, \\ x, & -1 \leqslant x < 1, \\ 3x - 2, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Ако желимо да $f$ буде бијекција, онда не смеју да постоје два различита броја који се сликају у исти број и за сваки реалан број $y$ мора да постоји реалан број $x$ такав да је $f(x) = y$. Како је $f(x)$ растућа функција за $x \geqslant -1$ мора бити растућа и за $x < -1$. Дакле, $a$ одређујемо из неједнакости $1 - 2a > 0$. Дакле, за $a < \frac{1}{2}$ функција $f$ јесте бијекција и тада је

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2a}{1-2a}, & x < -1, \\ x, & -1 \leqslant x < 1, \\ \dfrac{x+2}{3}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

**277**. Како (1.3) важи за свако $x \in \mathbb{R}$, важи и за свако $1 - x$. Тако замењујући $x$ са $1 - x$ у (1.3) добијамо

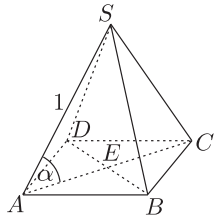
$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4. \tag{2.62}$$

Из (1.3) следи да је $f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x)$, па замењујући то у (2.62) добијамо

$$(1-x)^2(2x - x^4 - x^2 f(x)) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4.$$

Из последњег следи да је $f(x) = 1 - x^2$.

**278**. Нека је $S$ врх пирамиде, $ABCD$ њена основа и $E$ подножје нормале из $S$ на раван основе (слика 2.58). Тада је троугао $SEA$ правоугли, чија је хипотенуза дужине 1, то јест $AS = 1$. Нека је $\sphericalangle SAE = \alpha$, где је $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.




Слика 2.58.

Тада је $SE = \sin\alpha$ висина пирамиде, а $2AE = 2\cos\alpha$ дијагонала квадрата у основи, па је запремина пирамиде

$$V = V(\alpha) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2AE)^2}{2} \cdot SE = \frac{2}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

Како је

$$V'(\alpha) = \frac{2}{3}\cos\alpha(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) = \frac{2}{3}\cos\alpha(1 - 3\sin^2\alpha)\,,$$

закључујемо да је $V'(\alpha) > 0$ за $0 < \sin\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$, док је $V'(\alpha) < 0$ за $\frac{1}{\sqrt{3}} < \sin\alpha < 1$ ($\alpha$ је оштар угао). Дакле, максимална запремина се добија када је $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и тада је $V = \frac{4}{27}\sqrt{3}$.

**279**. Тачно $2n - m = m - 2(m - n)$ птица су саме у својим кавезима, и њих можемо да одаберемо на $\binom{m}{2n-m}$ начина, а онда им одаберемо кавезе на $\frac{n!}{(m-n)!}$ начина. Преосталих $2(m - n)$ птица можемо поставити у ред на $(2m - 2n)!$ начина, и две по две их стављамо у први кавез, други, итд. При томе се сваки распоред добија на $2^{m-n}$ начина. Према томе, број тражених распореда је

$$\binom{m}{2n-m}\frac{n!}{(m-n)!}(2m-2n)!\frac{1}{2^{m-n}} = \frac{m!n!}{2^{m-n}(m-n)!(2n-m)!}\,.$$

**280**. Нека се под датим условима може формирати $n$ екипа. Уочимо да двочланих подскупова скупа од 25 ученика има $\binom{25}{2} = 300$. Свака од $n$ екипа садржи по $\binom{5}{2} = 10$ таквих двочланих подскупова. Због услова задатка два пара из различитих екипа су различита, па мора бити $10n \leqslant 300$, тј. $n \leqslant 30$.

**281**. Сваки од бројева $A_k$ и $B_k$ је једнак или $+1$ или $-1$. Претпоставимо да је $p$ од 2008 бројева $A_k$ једнако $-1$ и $q$ од 2008 бројева $B_k$ једнако $-1$. Производи $A_1A_2\cdots A_{2008}$ и $B_1B_2\cdots B_{2008}$ су једнаки, па следи $(-1)^p = (-1)^q$, односно бројеви $p$ и $q$ су исте парности. Даље добијамо

$$\begin{aligned}&A_1 + A_2 + \ldots + A_{2008} + B_1 + B_2 + \cdots + B_{2008}\\ &= 1\cdot(2008 - p) + (-1)\cdot p + 1\cdot(2008 - q) + (-1)\cdot q = 4016 - 2(p + q).\end{aligned}$$

Како је $p + q$ паран број, следи да је тражена сума дељива са 4.

**282**. Означимо са $a$, $b$ и $d$ редом дужине дуже страница правоугаоника, краће странице правоугаоника и дијагонале правоугаоника са целобројним дужинама страница. Тада је $a > 2000$, $b \leqslant 60$ и $d^2 - a^2 = b^2 \leqslant 3600$, то јест $(d-a)(d+a) \leqslant 3600$. Како је $d > a > 2000$, то је $d + a > 4000$, одакле онда следи да је $d - a < \frac{3600}{4000}$, то јест $d - a < 1$. Дакле, $a < d < a + 1$, што значи да је дужина $a$ дуже странице правоугаоника највећи цео број мањи од дужине дијагонале $d$ тог правоугаоника.

Посматрајмо сада два правоугаоника која задовољавају услове задатка и који при томе имају подударне дијагонале. Из претходних разматрања следи да дужина те две дијагонале није цео број, као и да су дужине дужих страница та два правоугаоника једнаке, јер је њихова дужина једнозначно одређена (дужина $a$ дуже странице правоугаоника је највећи цео број мањи од дужине дијагонале $d$). Дакле, та два правоугаоника имају подударне дијагонале и један пар страница, па су и они међусобно подударни.

**283**. Како је $AB = (a^p)^{p-1} - 1$, на основу мале Фермаове теореме, закључујемо да је производ $AB$ дељив са $p$, па бар један од бројева $A$ и $B$ мора бити дељив са $p$. Приметимо да је $A - B = 2$, одакле следи да разлика $A - B$ није дељива са $p$ (јер је $p$ прост број већи од 2), па не могу оба броја $A$ и $B$ бити дељиви са $p$. Дакле, тачно један од њих јесте дељив са $p$.

**284**. Пошто $q$ дели $p-1$, по је $q < p$. Како је $p$ прост који дели $q^3 - 1 = (q-1)(q^2+q+1)$ и $p > q - 1$, следи да $p$ дели $q^2 + q + 1$. Нека је $q^2 + q + 1 = kp$ и, супротно тврђењу, $k > 1$. Тада из $q \mid (p-1)$ добијамо $p - 1 = lq$ за неко $l \in \mathbb{N}$, па је

$$q^2 + q + 1 = k(lq + 1) = klq + k.$$

Одатле следи да $q \mid (k-1)$, па је $k \geqslant q + 1$. Тада добијамо

$$q^2 + q + 1 \geqslant (q+1)(lq+1) \geqslant q^2 + 2q + 1,$$

што је немогуће. Дакле, мора бити $k = 1$ и $p = q^2 + q + 1$.

**285**. За $a = 0$, имамо једниствено решење $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2009} = 0$. Претпоставимо сада да је $a \neq 0$. Систем је онда еквивалентан са

$$\frac{x_1}{x_2} = -a, \quad \frac{x_2}{x_3} = -a^2, \quad \ldots, \quad \frac{x_{2009}}{x_1} = -a^{2009}.$$

Множењем ових једнакости добијамо

$$1 = (-1)^{2009} a^{1+2+\cdots+2009} = -a^{2009 \cdot 1005},$$

одакле следи да је $a = -1$. Сада није тешко закључити да су решења

$$x_1 = x_2 = -x_3 = -x_4 = \cdots = -x_{2007} = -x_{2008} = x_{2009} = b,$$

где је $b$ произвољан реалан параметар.

**286**. Једначина $f(x) = x$ има два реална решења $a < b < 0$. Полином

$$g(x) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{n}(x)\cdots))$$

је степена $2^n$, па добијамо $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Са друге стране, имамо $g(b) = b < 0$. Како је полином непрекидна функција, закључујемо да $g(x)$ има бар један реалан корен.

**287**. Прво ћемо доказати да важи следећа неједнакост

$$\frac{4}{x^2+yz} \leqslant \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz}.$$

Она је еквивалентна са $4xyz \leqslant (y+z)(x^2+yz)$, односно са

$$xyz \leqslant \frac{yx^2+y^2z+zx^2+yz^2}{4},$$

што јесте тачно на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине позитивних бројева ($xyz = \sqrt[4]{yx^2 \cdot y^2z \cdot zx^2 \cdot yz^2}$). Једнакост важи ако и само ако је $x = y = z$. Дакле, за $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ важи

$$\frac{4}{x^2+yz} \leqslant \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz}, \quad \frac{4}{y^2+zx} \leqslant \frac{1}{yz} + \frac{1}{yx}, \quad \frac{4}{z^2+xy} \leqslant \frac{1}{zx} + \frac{1}{zy},$$

одакле сабирањем добијамо

$$\frac{2}{x^2+yz} + \frac{2}{y^2+xz} + \frac{2}{z^2+xy} \leqslant \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}.$$

**288**. Како је $y = 2 - x$, заменом на левој страни неједнакости добијамо израз

$$I = x^2(2-x)^2(2x^2-4x+4).$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине позитивних бројева $a$ и $b$ важи $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Примењујући последње добијамо да је $x(2-x) \leqslant 1$, одакле је $x^2(2-x)^2 \leqslant 1$. Како је $2x^2-4x+4 = 2((x-1)^2+1) \leqslant 2$, закључујемо да је $I \leqslant 2$.

Једнакост важи ако и само ако је $x = 2 - x$ и $x - 1 = 0$. Дакле, једнакост важи за $x = y = 1$.

**289**. Како је $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, где је $z = x + iy$, на основу дате једнакости добијамо

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

односно, после сређивања,

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Дакле, сви комплексни бројеви $z$ за које важи $|z-1| = 2|z+1|$ се налазе на кружници са центром у тачки $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ и полупречником $\frac{4}{3}$.

**290**. Уочимо прво следећи идентитет

$$\binom{p+q}{q} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{q}{p-k}.$$

Заиста, лева страна представља коефицијент уз $x^p$ у полиному $(1+x)^{p+q}$, док је десна страна једнака коефициенту уз $x^p$ у производу $(1+x)^p(1+x)^q$. Онда је

$$\binom{p+q}{q} - \binom{q}{p} - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k}\binom{q}{p-k}.$$

Сваки од биномних коефицијената $\binom{p}{k}$ је, за $k = 1, 2, \ldots p-1$, дељив са $p$, због

$$\binom{p}{k} = p \cdot \frac{(p-1)(p-2)\cdot \ldots \cdot (p-k+1)}{k!}.$$

Аналогно, сваки биномни коефицијент $\binom{q}{k}$, за $k = 1, 2, \ldots q-1$, дељив је са $q$. Дакле, $pq$ дели $\binom{p+q}{q} - \binom{q}{p} - 1$.

**291**. Нека је $h(x) = f(x) - g(x)$. Тада је $h(x)$ полином степена не већег од $n$ за који је

$$h(x_0) = h'(x_1) = h''(x_2) = \cdots = h^{(n)}(x_n) = 0,$$

а треба доказати да је $h(x) \equiv 0$. Нека је

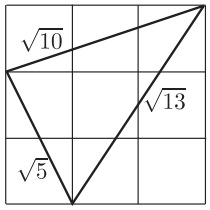
$$h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Тада из последње једначине следећег система

$$\begin{aligned}
h(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= 0,\\
h'(x_1) &= a_1 x_1 + 2a_2 x_1 + \cdots + n a_n x_1^{n-1} &= 0,\\
h''(x_2) &= 2a_2 + \cdots + n(n-1) a_n x_1^{n-2} &= 0,\\
&\vdots\\
h^{(n-1)}(x_{n-1}) &= (n-1)!a_{n-1} + n!a_n &= 0,\\
h^{(n)}(x_n) &= n!a_n &= 0,
\end{aligned}$$

добијамо да је $a_n = 0$, затим из претпоследње да је $a_{n-1} = 0$ и тако даље. Најзад, из прве једначине горњег система следи да је $a_0 = 0$. Дакле, сви коефицијенти полинома $h$ су једнаки нули, што је и требало доказати.

**292**. Користећи Питагорину теорему лако се уверавамо да је на слици 2.59 нацртан баш троугао са датим страницама.



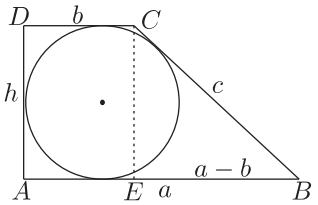

Слика 2.59.

Његова површина је $P = 3^2 - \dfrac{1}{2} \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3) = 3{,}5$.

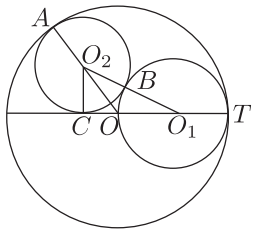
**293**. Нека је $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$, $AD = h$ и $AD \perp AB$. Означимо са $E$ подножје нормале из $C$ на $AB$ (слика 2.60). Троугао $BEC$ је правоугли, па применом Питагорине теореме добијамо $c^2 - h^2 = (a-b)^2$. Како је трапез $ABCD$ тангентан, па важи $c+h = a+b$. Онда из последње две једнакости добијамо $(c-h)(a+b) = (a-b)^2$, то јест $c = \dfrac{(a-b)^2}{a+b} + h$. Дакле,

$$h = a + b - c = \frac{1}{2}\left(a + b - \frac{(a-b)^2}{a+b}\right) = \frac{2ab}{a+b},$$

па је $P = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = ab$.




Слика 2.60.




Слика 2.61.

**294**. Означимо са $k$ и $k_1$ редом дате кругове са центрима $O$ и $O_1$.

*Анализа*. Претпоставимо да круг $k_2$ са центром $O_2$ и полупречником $x$ додирује кругове $k$ и $k_1$ и праву $OO_1$ редом у тачкама $A$, $B$ и $C$ (слика 2.61). Нека је $OC = c$. Како је

$$O_1O_2 = \frac{R}{2} + x, \quad OO_2 = R - x, \quad O_2C = x, \quad CO_1 = \frac{R}{2} + c$$

и како су троуглови $O_2CO$ и $O_2CO_1$ правоугли (са правим углом код темена $C$), то на основу Питагорине теореме добијамо

$$\left(\frac{R}{2} + c\right)^2 + x^2 = \left(\frac{R}{2} + x\right)^2 \quad \text{и} \quad c^2 + x^2 = (R - x)^2,$$

тј. $Rc + c^2 = Rx$ и $c^2 = R^2 - 2Rx$. Елиминацијом $c$ из ових једнакости добијамо $x = \frac{4R}{9}$, па је $O_1O_2 = \frac{17R}{18}$ и $OO_2 = \frac{5R}{9}$.

*Конструкција.* Конструишимо круг $k_3$ са центром $O_1$ и полупречником $\frac{17R}{18}$ и круг $k_4$ са центром $O$ и полупречником $\frac{5R}{9}$. Нека је $O_2'$ пресек кругова $k_3$ и $k_4$. Конструишимо круг $k_2'$ са центром $O_2'$ и полупречником $\frac{4R}{9}$. Тада је $k_2'$ тражени круг.

*Доказ.* Кругови $k_3$ и $k_4$ се секу јер бројеви $\frac{17R}{18}$, $\frac{5R}{9}$ и $\frac{R}{2}$ задовољавају потребан и довољан услов да могу бити странице троугла. Како је

$$\left(\frac{17}{18}R\right)^2 > \left(\frac{5}{9}R\right)^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2,$$

то је троугао $O_1O_2'O$ тупоугли са тупим углом код темена $O$. Према томе, тачка $O$ се налази између тачке $O_1$ и подножја $C'$ висине троугла $O_1O_2'O$ из темена $O_2'$. Нека је $C'O = c'$ и $C'O_2' = h$. Како су троуглови $O_2'C'O$ и $O_2'C'O_1$ правоугли са правим углом код темена $C'$, то је

$$h^2 = \left(\frac{5}{9}R\right)^2 - c'^2 = \left(\frac{17}{18}R\right)^2 - \left(\frac{1}{2}R + c'\right)^2.$$

Даље лако добијамо $c' = \frac{R}{3}$ и $h = \frac{4R}{9}$, па круг $k_2'$ додирује праву $OO_1$. Из једнакости

$$O_1O_2' = \frac{17}{18}R = \frac{1}{2}R + \frac{4}{9}R$$

следи да круг $k_2'$ додирује круг $k_1$. Како је

$$OO_2' = \sqrt{c'^2 + h^2} = \frac{5}{9}R = R - \frac{4}{9}R,$$

то се и кругови $k_2'$ и $k$ додирују.

*Дискусија.* Кругови $k_1$ и $k_2'$ имају две пресечне тачке, па задатак има два решења.

**295**. Обележимо са $a$, $b$, $c$ редом ширину прве, друге и треће колоне, а са $x$, $y$, $z$ редом ширину прве, друге и треће врсте. Тада је на основу датих података $ax = 8, bx = 10$, $by = 5$ и $cz = 12$, одакле добијамо

$$a = \frac{8}{x}, \quad b = \frac{10}{x}, \quad c = \frac{12}{z}, \quad y = \frac{x}{2}.$$

Означимо са $P$ површину полазног правоугаоника. Како је

$$\begin{aligned} P &= 8 + 10 + 5 + 12 + az + ay + bz + cy + cx \\ &= 35 + \frac{8}{x} \cdot z + \frac{8}{x} \cdot \frac{x}{2} + \frac{10}{x} \cdot z + \frac{12}{z} \cdot \frac{x}{2} + \frac{12}{z} \cdot x = 39 + 18\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right), \end{aligned}$$

на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине позитивних бројева $\frac{z}{x}$ и $\frac{x}{z}$ закључујемо да је

$$P \geqslant 39 + 18 \cdot 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}} = 75.$$

При томе, једнакост је испуњена ако и само ако је $x = z$. Дакле, најмања могућа површина правоугаоника $ABCD$ јесте 75 и она се достиже ако и само ако је $x = z = 2y$.

**296**. На страници $BC$ троугла $ABC$ уочимо тачку $D$ такву да је $\sphericalangle BAD = \beta$. Тада је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = 2\beta$. Дакле, $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ су једнакокраки, па је $AD = BD = a - b$. На основу косинусне теореме примењене на $\triangle ABC$ важи

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta. \tag{2.63}$$

Применом синусне теореме на $\triangle ABD$ добијамо једнакост

$$\frac{a-b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(180^\circ - 2\beta)},$$

одакле, због $\sin(180^\circ - 2\beta) = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$, следи да је

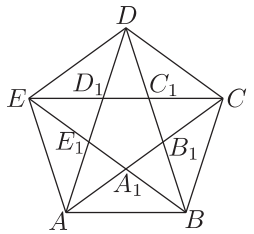
$$\cos\beta = \frac{c}{2(a-b)}. \tag{2.64}$$

Коначо, на основу (2.63) и (2.64) добијамо да је

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{ac^2}{a-b},$$

што је еквивалентно са $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$, што је и требало доказати.

**297**. (а) Збир унутрашњих углова петоугла $A_1B_1C_1D_1E_1$ (видети слику 2.62) је $3 \cdot 180^\circ$, а збир унутрашњих углова десетоугла $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$ је $8 \cdot 180^\circ$.




Слика 2.62.

Сваки од углова тог петоугла у збиру са одговарајућим углом десетоугла даје $360^\circ$. Зато је тражени збир углова звезде, који је једнак збиру углова десетоугла код темена $A, B, C, D$ и $E$, то јест једнак је $8 \cdot 180^\circ + 3 \cdot 180^\circ - 5 \cdot 180^\circ = 180^\circ$.

(б) Ако је петоугао $ABCDE$ правилан, он је симетричан у односу на симетралу сваког од својих углова, одакле следи да је $AA_1 = AE_1 = EE_1$, $AC \parallel ED$ и $\sphericalangle AA_1E = \sphericalangle A_1ED = \sphericalangle CEA = \sphericalangle EAA_1$. Дакле, троугао $AEA_1$ је једнакокрак. Нека је $AE = a$ и $A_1E_1 = x$. Тада из сличности једнакокраких троуглова $A_1AE_1$ и $A_1EA$ (који имају једнаке углове на основици) добијамо $AA_1 : A_1E_1 = A_1E : AA_1$, то јест $(a - x) : x = a : (a - x)$. Решавањем ове једначине по $x$, узимајући у обзир да је $x < a$, добијамо $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$. Петоуглови $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ су слични, па је однос њихових површина

$$S : S_1 = \left(\frac{a}{x}\right)^2 = \frac{2}{7 - 3\sqrt{5}}.$$

**298**. Нека је $C'$ средиште дужи $AB$, а тачка $F$ пресек правих $AD$ и $BE$. Троугао $AFB$ је правоугли (по конструкцији), па је $\sphericalangle C'FA = \sphericalangle C'AF = \sphericalangle CAF = \frac{\alpha}{2}$. Закључујемо да је $AC$ паралелно са $FC'$, а како је $A'C'$ средња линија троугла $ABC$ следи да су тачке $C'$, $A'$ и $F'$ колинеарне. Како је $FC'$ тежишна дуж у троуглу $ABF$, из Чевине теореме за тачку $A'$ добијамо

$$\frac{FD}{DA} \cdot \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BE}{EF} = 1,$$

односно $FD : DA = EF : BE$. Дакле, четвроугао $ABED$ је трапез, па је $DE \parallel AB$.

**299**. Дата релација се може записати у облику

$$\frac{\left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| - \left|\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right|}{2} \leqslant y \leqslant 1 + \frac{|\sin 2x + \cos 2x| + |\sin 2x - \cos 2x|}{2}.$$

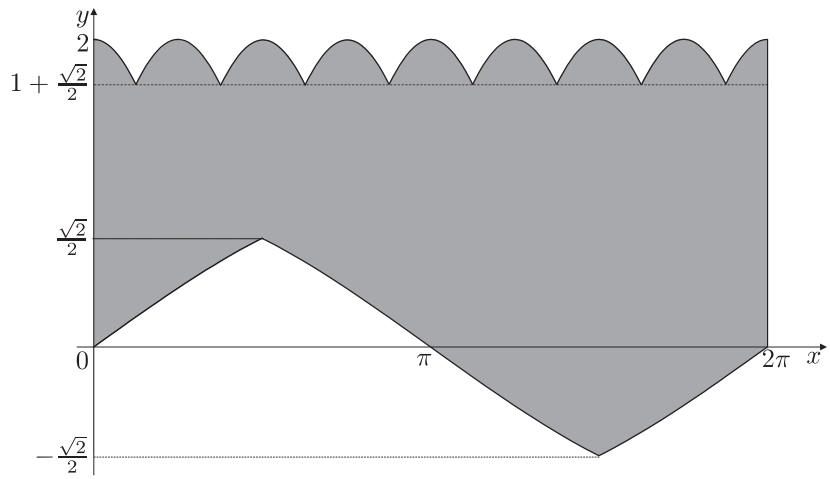
Како лева страна ове двоструке неједнакости узима вредности

$$L = \begin{cases} \sin\frac{x}{2}, & \text{за } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \cos\frac{x}{2}, & \text{за } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \\ -\sin\frac{x}{2}, & \text{за } x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \end{cases}$$

а десна

$$D = \begin{cases} 1 + \cos 2x, & \text{за } x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right], \\ 1 + \sin 2x, & \text{за } x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right], \\ 1 - \cos 2x, & \text{за } x \in \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right], \\ 1 - \sin 2x, & \text{за } x \in \left[\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right], \end{cases}$$

закључујемо да је на слици 2.63 приказан скуп тачака равни $xOy$ које задовољавају услове дате у задатку.




Слика 2.63.

**300**. Парови највеће и најмање цифре могу бити $(9,2),(8,1),(7,0)$. За остале 4 цифре тих шестоцифрених бројева у сваком од ова три случаја имамо по 6 могућности, па их можемо изабрати на $\binom{6}{4}$ начина. Одабраних 6 различитих цифара можемо распоредити на $6!$ начина. Од укупног броја распореда $3\cdot\binom{6}{4}\cdot 6!$ треба одузети број оних распореда који почињу цифром 0, јер они не представљају шестоцифрене бројеве. Ти распореди се јављају када је највећа цифра 7, а најмања 0, и има их $\binom{6}{4}\cdot 5!$. Дакле, укупан број шестоцифрених бројева са траженим својством је

$$3\cdot\binom{6}{4}\cdot 6!-\binom{6}{4}\cdot 5!=\binom{6}{4}(3\cdot 6!-5!)=30600.$$

**301**. Сијалица са редним бројевим $k\leqslant n$ ће променити стање $\tau(k)$ пута, где је $\tau(k)$ број делилаца броја $k$. Како су у почетном стању све сијалице искључене, да би $k$-та сијалица након проласка последњег ученика била упаљена, она мора да промени своје стање непаран број пута. Уколико имамо природан број $n$ чија је канонска факторизација $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$, тада је $\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$. Како нас занимају само они бројеви код којих је $\tau(k)$ непарно, видимо да је то могуће само у случају да су сви $\alpha_i$ парни, тј. када је број $k$ квадрат природног броја. Дакле, коначно решење је $[\sqrt{n}\,]$.

**302**. За решавање дате једначине искористићемо неједнакост између квадратне и аритметичке средине, као и неједнакост $|x|\geqslant x$. На основу тих неједнакости важи

$$\sqrt{\frac{(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{2008}-x_{2009})^2+x_{2009}^2}{2010}}$$
$$\geqslant\frac{(1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_{2008}-x_{2009})+x_{2009}}{2010},$$

односно,

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{2008}-x_{2009})^2+x_{2009}^2 \geqslant \frac{1}{2010}.$$

Једнакост важи ако и само ако су сви чланови једнаки, то јест

$$1-x_1=x_1-x_2=\cdots=x_{2008}-x_{2009}=x_{2009}=\frac{1}{2010}.$$

Решавањем система добијамо $x_k=1-\dfrac{k}{2010}, k=1,2,\ldots,2009.$

**303**. Решења неједначине (1.4) има смисла тражити само у скупу $[-1,1]$, јер је то највећи скуп на коме су дефинисани сви изрази који се јављају у тој неједначини. Тада је $x+1\geqslant 0$ и $1-x\geqslant 0$. Такође, одмах је јасно да за $a\leqslant 0$ неједначина (1.4) нема решења, јер збир две ненегативне величине не може бити мањи од неког непозитивног броја. Сада, под условима $x\in[-1,1]$ и $a>0$, неједначину (1.4) квадрирамо и добијамо

$$2\sqrt{1-x^2}<a^2-2. \tag{2.65}$$

Неједначина (2.65) има решења само када је $a\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$, а имајући у виду да смо квадрирање вршили под условом $a>0$, закључујемо да решења неједначине (1.4) има смисла даље тражити у скупу $[-1,1]$ под новим условом за $a$, $a\in(\sqrt{2},+\infty)$. Квадрирањем неједначине (2.65), тод наведеним условима, добијамо $4(1-x^2)<(a^2-2)^2$, односно

$$x^2>a^2\left(1-\frac{a^2}{4}\right). \tag{2.66}$$

На основу неједначине (2.66) (уочимо да је израз са десне стране неједначине (2.66) позитиван за $a\in(2,+\infty)$, једнак нули за $a=2$, а негативан за $a\in(\sqrt{2},2)$) и претходно утврђених услова закључујемо:

- за $a>2$ скуп решења неједначине (1.4) је интервал $[-1,1]$;
- за $a=2$ скуп решења неједначине (1.4) је $[-1,0)\cup(0,1]$;
- за $a\in(\sqrt{2},2)$ важи $\sqrt{a^2\left(1-\frac{a^2}{4}\right)}<1$, па је тада скуп решења
$$\left[-1,-\sqrt{a^2\left(1-\frac{a^2}{4}\right)}\right)\cup\left(\sqrt{a^2\left(1-\frac{a^2}{4}\right)},1\right];$$
- за $a\leqslant\sqrt{2}$ неједначина (1.4) нема решења.

**304**. Прво ћемо одредити област у којој има смисла тражити решење неједначине (1.5), то јест област дефинисаности израза у тој неједначини. Услови $4^x-12>0$, $\log_2(4^x-12)>0$, $\sqrt{x}>0$ и $x\neq 1$ нас доводе до закључка да $x\in(\log_4 13,+\infty)$. Како је $\log_4 13>1$ и $2>1$ нејдначина (1.5) је за $x\in(\log_4 13,+\infty)$ еквивалентна са

$$\log_2(4^x-12)\leqslant\sqrt{x}^2,$$

односно са $4^x-12\leqslant 2^x$, одакле закључујемо да $x\in(\log_4 13,2]$.

**305**. Конјуговањем једначине $x+y+z=1$ добијамо $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}=1$. На основу тога и услова $x\cdot\overline{x}=y\cdot\overline{y}=z\cdot\overline{z}=1$ следи да је $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Множењем последње једначине са $xyz$, због $xyz=1$, добијамо $xy+yz+xz=1$. Према томе,

$$(x+y+z)(xy+yz+xz)=1.$$

На основу претходне једначине и $x+y+z=1=xyz$ следи

$$\begin{aligned}1&=(x+y+z)(xy+yz+xz)=x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)+3xyz\\&=x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-z)+3\\&=x^2-x^3+y^2-y^3+z^2-z^3-(x+y+z)+4\\&=-x^3+x^2-x+1-y^3+y^2-y+1-z^3+z^2-z+1+1,\end{aligned}$$

односно, $x^3-x^2+x-1+y^3-y^2+y-1+z^3-z^2+z-1=0$. Дакле, бројеви $x,y,z$ су корени полинома

$$P(t)=t^3-t^2+t-1=(t-1)(t-i)(t+i),$$

па је $\{x,y,z\}=\{1,-i,i\}$, што значи да укупно имамо шест решења.

**306**. За $p=2$ и $p=3$ имамо $2^1=1^3+1^3$ и $3^2=1^3+2^3$. Нека је $p>3$ и претпоставимо да постоје бројеви $n$, $x$ и $y$ тако да важи $p^n=x^3+y^3$. Међу свим тројкама $(n,x,y)$ одаберимо ону код које је $n$ минимално. Како је $(x,y)\neq(1,1)$, лако добијамо да су бројеви $x+y$ и $x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy\geqslant xy$ већи од 1. Из идентитета $p^n=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ следи да $p$ дели $x+y$ и $x^2-xy+y^2$, па $p$ дели $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=3xy$. Како је $p>3$, следи да $p$ дели $x$ или $y$. Како $p$ дели и $x+y$, имамо да је $x=p\cdot x'$ и $y=p\cdot y'$, где $x',y'\in\mathbb{N}$. Коначно, добијамо идентитет $p^{n-3}=x'^3+y'^3$, што је у супротности са минималним избором броја $n$.

**307**. За природне бројеве $n$ и $m$ постоје цели бројеви $\alpha$ и $\beta$, тако да важи $\alpha\cdot n+\beta\cdot m=\mathrm{nzd}(n,m)$. Користећи последњу једнакост добијамо

$$\frac{\mathrm{nzd}(n,m)}{n}\binom{n}{m}=\frac{\alpha n}{n}\cdot\binom{n}{m}+\frac{\beta m}{n}\cdot\binom{n}{m}=\alpha\binom{n}{m}+\beta\binom{n-1}{m-1},$$

па је тражени број цео (збир два цела броја). Међутим, како је и $\dfrac{\mathrm{nzd}(n,m)}{n}\dbinom{n}{m}>0$, закључујемо да је дати број природан.

**308**. Како је $k\cdot k!=(k+1)k!-k!=(k+1)!-k!$, то је

$$\begin{aligned}N&=1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots+(n-3)(n-3)!\\&=(2!-1!)+(3!-2!)+\cdots+((n-2)!-(n-3)!)=(n-2)!-1.\end{aligned}$$

Множењем претходне једнакости са $n-1$ и додавањем обема странама једнакости $n$, добијамо $(n-1)N+n=(n-1)!+1$. На основу Вилсонове теореме следи да је број $n$ прост ако и само ако $n\mid N$, јер је $(n,n-1)=1$.

**309**. Нека су $p_1, p_2, \ldots, p_k$ различити прости бројеви. На основу Кинеске теореме о остацима, систем

$$x \equiv -1 \pmod{p_1^2},\ x \equiv -2 \pmod{p_2^2},\ \ldots,\ x \equiv -k \pmod{p_k^2}$$

има решење. Ово значи да бројеви $x+1, x+2, \ldots, x+k$ имају тражену особину. Наиме $x+i$ је дељив са $p_i^2$ за $i = 1, 2, \ldots, k$.

**310**. (а) Нека је

$$P = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_i - a_j|.$$

Посматрајмо бесконачан скуп $\{P, 2P, 3P, \ldots\}$. Покажимо да су бројеви $a_1 + kP, a_2 + kP, \ldots, a_n + kP$ узајамно прости у паровима за сваки природан број $k$. Претпоставимо супротно. Тада за неке $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, бројеви $a_i + kP$ и $a_j + kP$ имају заједнички делилац $d > 1$. Одавде следи да је $a_i - a_j = (a_i + kP) - (a_j + kP)$ дељиво са $d$, тј. да је $P$ дељиво са $d$. Међутим, ако су и $a_i + kP$ и $P$ дељиви са $d$ тада $d \mid a_i$. Слично, ако $d \mid (a_j + kP)$ и $d \mid P$, тада $d \mid a_j$. Дакле, $d > 1$ је заједнички делилац бројева $a_i$ и $a_j$ што је супротно претпоставци да су ови бројеви узајамно прости. Дакле, за свако $k \in \mathbb{N}$ бројеви $a_i + kP$, $i = 1, 2, \ldots, n$, су узајамно прости у паровима.

(б) Означимо са $d$ разлику између највећег и најмањег од бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Претпоставимо да важи задати услов. Посматрајмо све просте бројеве $p \leqslant d$. За сваки такав број $p$ нека је $r_p$ елемент скупа $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ који се појављује не више од једанпут међу бројевима $r_1(p), r_2(p), \ldots, r_n(p)$. Нека је

$$r_p^* = \begin{cases} p - r_p, & r_p > 0, \\ 0, & r_p = 0. \end{cases}$$

Пошто су различити прости бројеви узајамно прости, према Кинеској теореми о остацима следи да постоји цео број $b$ такав да су конгруенције $b \equiv r_p^* \pmod{p}$ задовољене за све просте бројеве $p \leqslant d$.

Докажимо да су бројеви $a_1 + b, a_2 + b, \ldots, a_n + b$ узајамно прости у паровима. Претпоставимо да бројеви $a_i + b$ и $a_j + b$ имају заједнички прост фактор $\overline{p}$, за неке $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Разликујемо следећа два случаја.

1° $\overline{p} > d$. У овом случају из $a_i + b \equiv 0 \pmod{\overline{p}}$ и $a_j + b \equiv 0 \pmod{\overline{p}}$ следи да $p \mid (a_i - a_j)$, тј. да је $|a_i - a_j| \geqslant \overline{p}$, што је у контрадикцији са $\overline{p} > d \geqslant |a_i - a_j|$.

2° $\overline{p} \leqslant d$. У овом случају имамо да је

$$a_i + b = (mp + r_i(p)) + (np + r_p^*) \quad \text{и} \quad a_j + b = (\ell p + r_j(p)) + (np + r_p^*),$$

где су $m, n, \ell$ неки цели бројеви.

Претпоставимо да је $r_p^* = p - r_p$. Тада је број $a_i + b$ дељив са $p$ само ако је број $r_i(p) - r_p$ дељив са $p$, то јест ако је $r_i(p) = r_p$. Слично, $a_j + b$ је дељиво са $p$ ако је $r_j(p) = r_p$. Међутим, остатак $r_p$ појављује се највише једанпут у скупу остатака $\{r_1(p), r_2(p), \ldots, r_n(p)\}$. Контрадикција!

Ако је $r_p^* = 0$, тада су оба броја $r_i(p)$ и $r_j(p)$ дељива са $p$. Ово нас доводи до једнакости $r_i(p) = r_j(p) = 0 = r_p$, што нас поново доводи до контрадикције са избором броја $r_p$.

Дакле, бројеви $a_1 + b, a_2 + b, \ldots, a_n + b$ су узајамно прости у паровима.

Нека је

$$P^* = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} |(a_i + b) - (a_j + b)|.$$

Према делу задатка (а) бројеви $a_1 + b + kP^*, a_2 + b + kP^*, \ldots, a_n + b + kP^*$ су узајамно прости у паровима.

**311**. Из $f(x) = f(y)$ следи

$$f(n) - x = f(n + f(x)) = f(n + f(y)) = f(n) - y, \tag{2.67}$$

одакле добијамо да је $x = y$. Дакле, функција $f$ је „1-1". За $m = 0$, на основу (2.67), добијамо $f(n) = f(n + f(0))$, па је, због инјективности, $f(0) = 0$. Слично, на основу (2.67), за $n = 0$ добијамо $f(f(m)) = -m$. Дакле, функција $f$ је бијекција. Када заменимо $n$ са $f(n)$ у (2.67) добијамо

$$f(f(n) + f(m)) = f(f(n)) - m = -n - m = f(f(n + m)),$$

па, због инјективности, следи $f(n) + f(m) = f(n + m)$. Математичком индукцијом се лако показује да важи $f(n) = f(1) \cdot n$. Међутим, ово није решење једначине јер би у том случају, на основу $-n = f(f(n)) = f(f(1) \cdot n) = f(1)^2 \cdot n$, следило $f(1)^2 = -1$. Дакле, не постоји функција са захтеваним својством.

**312**. Користећи формулу за израчунавање тангенса збира углова добијамо:

$$\begin{aligned}(1 + \operatorname{tg} k)(1 + \operatorname{tg}(45^\circ - k)) &= 1 + \operatorname{tg} k + \operatorname{tg}(45^\circ - k) + \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - k) \\ =&1 + \operatorname{tg} 45^\circ(1 - \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - k)) + \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - k) = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

Сада, одговарајућим груписањем чинилаца, лако израчунавамо да је

$$P = (1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 44^\circ) \cdot \ldots \cdot (1 + \operatorname{tg} 22^\circ)(1 + \operatorname{tg} 23^\circ) \cdot (1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = 2^{23}.$$

**313**. Означимо са $a_k$ број тачака које се налазе на правој $x = k$, $k = 0, 1, \ldots, 9$. Нека је $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 21$ и претпоставимо да међу изабраним тачкама нема правоугаоника чије су странице паралелне координатним осама. Према томе, у две различите колоне не постоји пар тачака са идентичним $y$ координатама, односно,

$$\binom{5}{2} \geqslant \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \cdots + \binom{a_{10}}{2}.$$

Сређивањем израза и коришћењем неједнакости Коши–Шварца следи

$$20 \geqslant \sum_{i=1}^{10} a_i^2 - \sum_{i=1}^{10} a_i \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} a_i\right)^2}{10} - \sum_{i=1}^{10} a_i = \frac{S^2}{10} - S.$$

На основу последњег добијамо $S^2 - 10S - 200 = (S-20)(S+10) \leqslant 0$, што повлачи да је $S \leqslant 20$, а то је по услову задатка немогуће. Дакле, постоји правоугаоник чија су темена међу датим тачкама, а странице паралелне координатним осама.

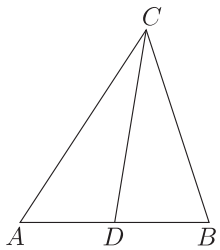
**314**. Нека је тачка $F$ пресечна тачка праве $AO$ и круга описаног око $\triangle ABD$. Како је $AO = OF$, довољно је доказати да је $F$ средиште дужи $OE$. Из једнакости

$$\sphericalangle DCB + \sphericalangle BOD = 60^\circ + 2\sphericalangle BAD = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ,$$

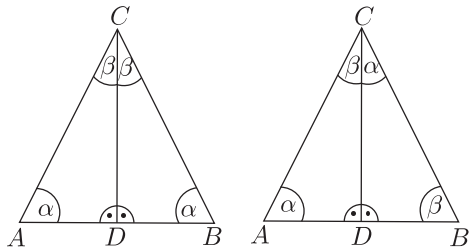
следи да је четвороугао $CBOD$ тетиван. Означимо са $S$ центар описаног круга око четвороугла $CBOD$. Како је $\triangle BDC \cong \triangle ABD$, следи да је $SC = AO$ и $SC \parallel AO$. Дакле, четвороугао $OSCF$ је паралелограм (странице $OF$ и $SC$ су паралелне и једнаке). Коначно, закључујемо $OF = OS = FC$. Права $CO$ је симетрала унутрашњег угла $BCD$, због $BO = DO$. Према томе, $\sphericalangle OCE = 90^\circ$, па је троугао $OCE$ правоугли. Како је $F$ тачка на хипотенузи $OE$ за коју важи $OF = FC$, следи да је $F$ средиште дужи $OE$, што је и требало показати.

**315**. Нека је $N$ тачка која је симетрична ортоцентру $H$ у односу на тачку $M$. Дакле, четвороугао $BNCH$ је паралелограм и важи $HM = MN$. Како је $\sphericalangle NBC = \sphericalangle BCH = 90^\circ - \sphericalangle B$, добијамо да је $\sphericalangle ABN = 90^\circ$ и слично $\sphericalangle ACN = 90^\circ$. Четвороуглови $BEHN$ и $CNHF$ су тетивни, јер имају по пар наспрамних углова једнаких $90^\circ$. Из једнакости периферијских углова у овим четвороугловима следи $\sphericalangle ENH = \sphericalangle EBH = 90^\circ - \sphericalangle A$ и $\sphericalangle FNH = \sphericalangle FCH = 90^\circ - \sphericalangle A$. Дакле, у $\triangle ENF$ дуж $NH$ је нормала и симетрала угла, па коначно добијамо $HE = HF$.

**316**. (а) Нека је $\triangle ABC$ подељен правом $p$ на два слична троугла. Очигледно је да тада права $p$ мора да садржи једно од темена тог троугла, и нека је то теме $C$ (слика 2.64). Означимо са $D$ тачку пресека праве $p$ и странице $AB$. Претпоставимо да слични троуглови $ADC$ и $DBC$ нису правоугли. То повлачи да је један од углова код темена $D$ туп и нека је то $\sphericalangle ADC$. Како је $\sphericalangle BDC$ оштар није могуће да су $\sphericalangle ADC$ и $\sphericalangle BDC$ једнаки. Нека је $\delta$ угао троугла $DBC$ који је једнак углу $\sphericalangle ADC$. Тада је $\delta + \sphericalangle BDC = 180^\circ$, то јест збир два угла троугла $DBC$ је $180^\circ$. Контрадикција. Дакле, ако је троугао подељен на два слична троугла они морају бити правоугли.




Слика 2.64.




Слика 2.65.

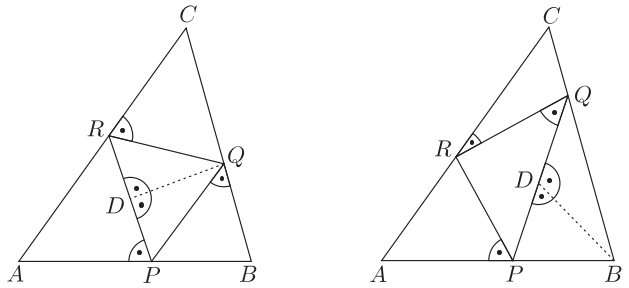
Штавише, на основу слике 2.65, лако долазимо до закључка да та два троугла морају бити подударни ако је $\triangle ABC$ оштроугли или тупоугли, док у случају када је $\triangle ABC$

правоугли они могу бити и само слични, али не и подударни (хипотенузина висина дели правоугли троугао на два слична правоугла троугла).

(б) Претпоставимо да је могуће оштроугли троугао $ABC$ поделити на пет подударних троуглова правим које не пролазе кроз темена тог троугла. Онда је свако од темена $A$, $B$ и $C$ теме тачно једног од добијених подударних троуглова, па разматрамо следећа два случаја:

(i) „унутрашњи" троугао $PQR$ је подељен на два подударна троугла;

(ii) један од спољашњих троуглова, на пример $\triangle PBQ$ је подељен на два подударна троугла.




Слика 2.66.

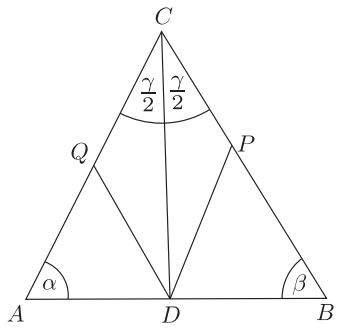
У првом случају, на основу тврђења доказаног у делу (а) закључујемо да је троугао $PQR$ подељен на два подударна правоугла троугла, што повлачи да су и остали њима подударни троуглови правоугли. Прави углови преостала три троугла не могу бити у теменима $A, B$ и $C$, јер је троугао $ABC$ оштроугли. Такође, два права угла се не могу наћи у темену „унутрашњег" троугла, на пример у $P$, јер се само једна нормала може повући из тачке на дату праву. Стога, без губитка општости, можемо претпоставити да су прави углови распоређени као на слици 2.66 лево. У том случају имамо два подударна правоугла троугла таква да је једна катета једнака хипотенузи, што је немогуће. У другом случају, приказаном на слици 2.66 десно, на сличан начин се показује да се оштроугли троугао не може поделити на пет подударних троуглова правама које не пролазе кроз темена тог троугла.

**317**. Ради једноставнијег записа уведимо следеће ознаке за углове троугла $ABC$: $\alpha = \sphericalangle BAC, \beta = \sphericalangle ABC, \gamma = \sphericalangle ACB$, као што је приказано на слици 2.67. Тада је

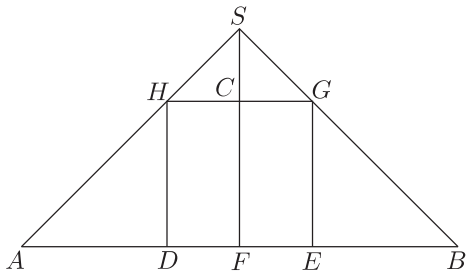
$$\sphericalangle CDB = \alpha + \frac{1}{2}\gamma > \frac{1}{2}\gamma = \sphericalangle DCB\,.$$

Стога је $BC > DB$. Слично, посматрајући $\triangle ADC$ закључујемо да је $AC > AD$. На основу услова задатка имамо да је $AC - AD = BC - BD$, то јест можемо наћи тачке $P$ и $Q$ на страницама $BC$ и $AC$ такве да је $AQ = AD$ и $BP = BD$. На основу става подударности ССУ ($CQ = AC - AD = BC - BD = CP, CD = CD$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$) закључујемо да је $\triangle CDQ \cong \triangle CDP$. Стога је $DQ = DP$

и $\sphericalangle CPD = \sphericalangle CQD$. Ово повлачи да су једнакокраки троуглови $AQD$ и $BPD$ подударни. На основу те подударности закључујемо да је $AD = DB$, па је троугао $ABC$ једнакокрак.




Слика 2.67.



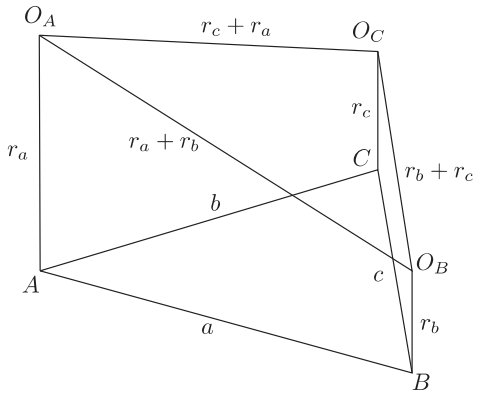

Слика 2.68.

**318**. Осни пресек купе и ваљка приказан је на слици 2.68. Обележимо полупречник основе купе са $R$, висину купе са $H$, полупречник основе ваљка са $r$, висину ваљка $h$, запремину купе са $V_k$, а запремину ваљка са $V_v$. Троугао $ABS$ је једнакокрако-правоугли, па је $\sphericalangle ABS = \sphericalangle CGS = 45°$. Одавде следи да је $BE = EG$, односно $GC = SC$. Значи $h = R - r$. Како је ваљак равностранни важи $2r = R - r$, односно $R = 3r$. Како је троугао $ABS$ једнакокрако–правоугли, то је и $R = H$. Дакле, $H = R = 3r$ и $h = 2r$, па важи

$$V_v = r^2\pi h = 2r^3\pi \quad \text{и} \quad V_k = \frac{1}{3}R^2\pi H = \frac{1}{3}27r^3\pi = 9r^3\pi.$$

Сада лако изарачунавамо да је тражени однос запремина једнак $V_v : V_k = 2 : 9$.

**319**. Обележимо полупречнике сфера са $r_a$, $r_b$, $r_c$, а њихове центре са $O_A$, $O_B$, $O_C$, као што је приказано на слици 2.69.




Слика 2.69.

Како су трапези $ABO_BO_A$, $BCO_CO_B$ и $CAO_AO_C$ правоугли, на основу Питагорине теореме важи

$$(r_a+r_b)^2 = c^2+(r_a-r_b)^2,\ \ (r_a+r_c)^2 = b^2+(r_a-r_c)^2,\ \ (r_b+r_c)^2 = a^2+(r_c-r_b)^2,$$

односно

$$4r_ar_b = c^2, \quad 4r_ar_b = b^2, \quad 4r_br_c = a^2. \tag{2.68}$$

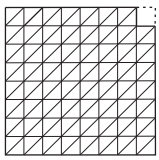
Множењем левих, односно десних страна једначина из система (2.68) добија се једначина $64r_a^2r_b^2r_c^2 = a^2b^2c^2$. На основу последњег закључујемо да је $8r_ar_br_c = abc$, што заједно са системом једначина (2.68) даје коначно решење

$$r_a = \frac{bc}{2a}, \quad r_b = \frac{ac}{2b}, \quad r_c = \frac{ab}{2c}.$$

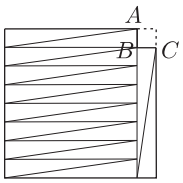
**320**. Број непарних бројева написаних на табли се не мења ако су избрисана два броја различите парности или ако су избрисана два парна броја, док се смањује за 2 ако су избрисана два непарна броја. Дакле, парност броја непарних бројева на табли је инваријанта (не мења се) применом задатог поступка. Како је на почетку било 15 непарних бројева, закључујемо да ће последњи број на табли бити непаран.

**321**. Уколико таблицу попунимо редом бројевима од 1 до $n^2$, бројеви који се налазе у доњем десном углу димензија $m \times m$ су обојени и плаво и црвено, пошто представљају највећих $m$ бројева у својим врстама и колонама. Доказаћемо да је $m^2$ најмањи број поља која морају бити обојена обема бојама. Посматрамо редом бројеве од $n^2$ до 1 и у сваком моменту маркирамо највећи број. Уколико се у некој врсти или колони налази $m$ маркираних бројева, дату врсту или колону маркирамо и надаље више не посматрамо бројеве из ње. Све док не маркирамо $m$ врста или $m$ колона, бирамо највећи број и маркирамо га. Тај број се сигурно налази у $m$ највећих бројева из своје врсте и своје колоне. На крају имамо $m$ врста или $m$ колона са по $m$ маркираних поља, па је најмањи број поља која су обојена у плаво и црвено једнак $m^2$.

**322**. (а) Очигледно је могуће испунити овај захтев, на пример поделити дијагоналом сваки „мали” квадрат на два подударна троугла (слика 2.70).



Слика 2.70.




Слика 2.71.

(б) Овај захтев је могуће испунити као што је то приказано на слици 2.71 и тада је сваки од приказаних троуглова површине $\frac{7}{2}$.

(в) Претпоставимо да је захтев испуњен, то јест да је преостали део квадрата подељен на мање од 18 троуглова једнаке површине. Означимо са $T$ троугао чија страница $a$ садржи тачке $A$ и $B$. Онда површина троугла $T$ мора бити већа од $\frac{7}{2}$, а максимална дужина висине која одговара страници $a$ је 7. Стога страница $a$ мора бити дужа од 1, што значи да је $B$ унутрашња тачка странице $a$. Слично, троугао $T_1$ са страницом $b$ која садржи тачке $B$ и $C$, мора бити такав да је $B$ унутрашња тачка странице $b$. Значи троуглови $T$ и $T_1$ се секу. Контрадикција! Значи, није могуће поделити преостали део квадрата на мање од 18 троуглова једнаке површине.

**323**. (а) Овај захтев је могуће испунити. На пример, обојимо све дијагоналне квадрате. Њих има 100, а сваки има 0 обојених суседних квадрата.

(б) Претпоставимо да је могуће обојити непаран број квадрата тако да сваки обојени квадрат има непаран број обојених суседних квадрата. Нека је $a$ број обојених квадрата који има једног обојеног „суседа”, а $b$ број обојених квадрата који има три обојена „суседа”. Укупан број обојених квадрата мора бити непаран, па је $a+b=2n+1$. Ако је $N$ број заједничких страница обојених квадрата, онда је очигледно $a+3b=2N$. На основу уочених једнакости следи

$$2N = a + 3b = (a+b) + 2b = 2n + 1 + 2b,$$

што је немогуће (паран број не може бити једнак непарном). Дакле, није могуће испунити тражени захтев.

**324**. (а) Како је

$$\begin{aligned} xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 &= xy(z+1) + x(z+1) + y(z+1) + (z+1) \\ &= (x+1)(y+1)(z+1), \end{aligned}$$

и $244 = 2 \cdot 2 \cdot 61$, закључујемо да је

$$((x+1),(y+1),(z+1)) \in \{(2,2,61),(2,61,2),(61,2,2)\},$$

односно $(x,y,z) \in \{(1,1,60),(1,60,1),(60,1,1)\}$.

(б) Дата једнакост је еквивалентна са $112x + 22y + 13z = 243$. Како су $y$ и $z$ ненегативни бројеви, закључујемо да је $x = 1$. Онда је $22y + 13z = 131$. Последња једнакост је еквивалентна са $2z - 10 = 11(11 - x - 2z)$, па закључујемо да је $z = 5$, јер је само у том случају $2z - 10$ дељиво са 11. Коначно, добијамо и вредност за $y$, $y = 3$. Дакле, тражени број је 135.

**325**. Ради прегледнијег записа означимо израз $a^2 + 2a + 9$ са $x$. Тада је

$$\begin{aligned} (a^2+2a+9)^2 + 3a(a^2+2a+9) - 4a^2 &= x^2 + 3ax - 4a^2 \\ &= x^2 - ax + 4ax - 4a^2 \\ &= x(x-a) + 4a(x-a) \\ &= (x+4a)(x-a) \\ &= (a^2+6a+9)(a^2+a+9) \\ &= (a+3)^2(a^2+a+9). \end{aligned}$$

Како је $4131 = 3^5 \cdot 17$, а број $(a+3)^2$ потпун квадрат већи или једнак $4^2$, закључујемо да је $(a+3)^2 = 9^2$ и $a^2 + a + 9 = 51$. На основу прве једнакости следи да је $a = 6$, а како је и $6^2 + 6 + 9 = 51$, закључујемо да је број 6 ($a = 6$) једино решење проблема.

**326**. Означимо са $M$ дати израз. Онда је

$$\begin{aligned} M &= x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 + x^2 + 4x + 7 \\ &= x^4(x-y) - y^4(x-y) + (x+2)^2 + 3 \\ &= (x-y)(x^4 - y^4) + (x+2)^2 + 3 \\ &= (x-y)(x^2+y^2)(x-y)(x+y) + (x+2)^2 + 3 \\ &= (x^2+y^2)(x-y)^2(x+y) + (x+2)^2 + 3. \end{aligned}$$

Дакле, израз $M$ је збир ненегативних израза, па је његова најмања вредност једнака 3 када је $(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y) = 0$ и $(x+2)^2 = 0$, то јест за $x = -2, y = 2$. Због услова $x + y \geqslant 0$ случај $x = -2, y = -2$ не узимамо у обзир.

**327**. Дату једначину можемо записати у облику $Ax = B$, где је

$$\begin{aligned} A &= 3(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2 \\ &= 3 + 3a^2 + 2a^4 - 1 - 2a - 2a^2 - 2a^3 - a^2 - a^4 \\ &= 2a^4 - 2a^3 - 2a + 2 = 2a^3(a-1) - 2(a-1) \\ &= 2(a-1)^2(a^2 + a + 1), \\ B &= a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1 = a^2(a^3-1) + a(a^3-1) + (a^3-1) \\ &= (a-1)(a^2+a+1)^2. \end{aligned}$$

Како је

$$a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0,$$

полазна једначина је еквивалентна једначини

$$2(a-1)^2x = (a-1)(a^2+a+1).$$

Коначно, за $a \neq 1$ је $x = \dfrac{a^2+a+1}{2(a-1)}$, док је за $a = 1$ сваки реалан број решење дате једначине.

**328**. Десна страна једначине је ненегативна ако и само ако је $x \in [2,3]$, јер је $5x - 6 - x^2 = (3-x)(x-2)$. Сада, сређујући леву страну једначине, добијамо:

$$\begin{aligned} &\sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x-2)\sqrt{1 + (x-5)(x-7)}}} = \sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x-2)|x-6|}} \\ =&\sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x-2)(6-x)}} = \sqrt{4 - x|x-4|} \\ =&\sqrt{4 - x(4-x)} = |x-2| = x - 2 \quad \text{за} \quad x \in [2,3]. \end{aligned}$$

Дакле, на скупу $[2,3]$ треба решити једначину $2(x-2) = (x-3)(x-2)$. Једино решење ове, као и полазне једначине, је број 2.

**329**. Неједнакост

$$n+1<\frac{\log 4}{\log 3}+\frac{\log 44}{\log 33}+\frac{\log 4444}{\log 3333}+\cdots+\frac{\log \overbrace{44\ldots44}^{2^n}}{\log \underbrace{33\ldots33}_{2^n}}$$

следи из чињенице да је сваки од $n+1$ сабирака $\frac{\log 4}{\log 3}, \frac{\log 44}{\log 33}, \ldots, \frac{\log \overbrace{44\ldots44}^{2^n}}{\log \underbrace{33\ldots33}_{2^n}}$ већи од $1$, што је очигледно.

Да бисмо доказали другу неједнакост прво ћемо доказати да је $k$-ти сабирак увек мањи од $1+2^{-(k+1)}$, то јест да је

$$\frac{\log \overbrace{44\ldots44}^{2^k}}{\log \underbrace{33\ldots33}_{2^k}}<1+\frac{1}{2^{k+1}}. \tag{2.69}$$

За $k=0$, имамо $\frac{\log 4}{\log 3}<1+\frac{1}{2}$, што је еквивалентно са $4<3\sqrt{3}$, односно са $16<27$. Означимо са $A$ број састављен од $2^k$ јединица. Тада је (2.69) еквивалентно са

$$\log 4+\log A<(\log 3+\log A)\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right)=\log 3+\log A+\frac{\log 3+\log A}{2^{k+1}},$$

односно $2^{k+1}\cdot\log\frac{4}{3}<\log 3A$. Дакле, потребно је доказати следећу неједнакост

$$16^{2^k}<\frac{10^{2^k}-1}{3}\cdot 9^{2^k}.$$

Користећи грубу процену добијамо $3\cdot 16^{2^k}<81^{2^k}<(10^{2^k}-1)\cdot 9^{2^k}$. Дакле,

$$\frac{\log 4}{\log 3}+\frac{\log 44}{\log 33}+\cdots+\frac{\log \overbrace{44\ldots44}^{2^n}}{\log \underbrace{33\ldots33}_{2^n}}<\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<n+2.$$

**330**. Нека је $p$ прост број и претпоставимо да $p^{2k+1}$ дели $m$, а $p^{2k+2}$ не дели $m$. Како $mn$ дели $m^2+n^2+m$ следи да $m\mid n^2$, па зато $p^{2k+1}$ дели $n^2$. Како је $p$ прост број, онда је $n$ дељиво са $p^{k+1}$. Према томе, $p^{2k+1}\cdot p^{k+1}=p^{3k+2}$ дели $m^2+n^2+m$, јер $mn$ дели $m^2+n^2+m$. Како $p^{2k+2}$ дели $m^2$ и $n^2$, следи да је и број $m$ дељив са $p^{2k+2}$. Контрадикција! Дакле, сваки прост број $p$ има парни експонент у канонској факторизацији броја $m$, па је $m$ потпун квадрат.

**331**. За $n=3$, имамо пермутације $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$. На основу пермутације $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ можемо да конструишемо пермутацију дужине $2n$ на следећи

начин: $(2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n, 2a_1-1, 2a_2-1, \ldots, 2a_n-1)$. Нека су $i$ и $j$ два произвољна елемента различите парности из нове пермутације. Лако закључујемо да се та два елемента морају налазити или у првој или у другој половини пермутације. Како тврђење задатка важи за оба дела пермутације, користећи математичку индукцију закључујемо да исто важи и за нову пермутацију бројева од 1 до $2n$. Полазећи од $n = 3$, можемо конструисати пермутацију величине $3 \cdot 2^k$, где је $k \geqslant 1$. Брисањем бројева из пермутације не нарушавамо услов задатка, па за сваки природан број $n > 2$ постоји пермутација у којој се између свака два броја $i$ и $j$ не налази њихова аритметичка средина.

**332**. Означимо елементе скупа $A$ са $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и нека је $p$ прост број облика $3k-1$, који је већи од свих елемената скупа $A$ (остављамо читаоцу да докаже да простих бројева облика $3k-1$ има бесконачно много). За свако $1 \leqslant i \leqslant n$ посматрамо бројеве $a_i, 2a_i, \ldots, (p-1)a_i$. Они формирају потпун систем остатака по модулу $p$ и зато постоји $k$ њих који су конгруентни са $k, k+1, \ldots, 2k-1$ по модулу $p$.

Нека $x_j$ означава колико има бројева међу $ja_1, ja_2, \ldots, ja_n$ који су конгруентни са $k, k+1, \ldots, 2k-1$ по модулу $p$. Како је $x_0 + x_1 + \cdots + x_{p-1} = kn$, по Дирихлеовом принципу постоји $x_t$ тако да је

$$x_t \geqslant \frac{nk}{p} = \frac{nk}{3k-1} > \frac{n}{3}.$$

Подскуп $B$ конструишемо као скуп свих $a \in A$, за које је $ta$ конгруентно са неким од $k, k+1, \ldots, 2k-1$ по модулу $p$. Очигледно овај скуп тривијално задовољава све услове задатка.

**333**. Из услова $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, имамо идентитет

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j.$$

Трансформацијом леве стране неједнакости добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{i<j} \frac{4a_i a_j}{a_i + a_j} &= \sum_{i<j} \frac{4a_i a_j (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{a_i + a_j} \\ &= 4\sum_{i<j} a_i a_j + \sum_{i<j} \frac{4a_i a_j (1 - a_i - a_j)}{a_i + a_j} \\ &= 2\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \sum_{i<j} \frac{4a_i a_j (1 - a_i - a_j)}{a_i + a_j}.\end{aligned}$$

Дакле, преостаје нам да докажемо неједнакост

$$\begin{aligned}&\sum_{i<j} \frac{4a_i a_j (a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_n)}{a_i + a_j} \\ \leqslant &(n-2)\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).\end{aligned}$$

На основу неједнакости аритметичке и хармонијске средине следи

$$\frac{4a_ia_ja_k}{a_i+a_j} \leqslant (a_ia_k+a_ja_k).$$

Сумирањем ових неједнакости за $k \neq i, j$ добијамо

$$\frac{4a_ia_j(1-a_i-a_j)}{a_i+a_j} \leqslant (1-a_i-a_j)(a_i+a_j) = a_i+a_j-a_i^2-a_j^2-2a_ia_j.$$

Када саберемо ове неједнакости за свако $i<j$, коначно добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}\frac{4a_ia_j(1-a_i-a_j)}{a_i+a_j} &\leqslant (n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i-(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum_{i<j}a_ia_j\\ &= (n-1)-(n-2)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\\ &= (n-2)\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).\end{aligned}$$

**334**. Нека су $P'(x)$ и $Q'(x)$ полиноми са коефицијентима који су остаци коефицијената полинома $P(x)$ и $Q(x)$ по модулу 3, редом. Следи да полином $P'(x)$ дели полином $Q'(x)$ у прстену $Z_3[X]$. Како је

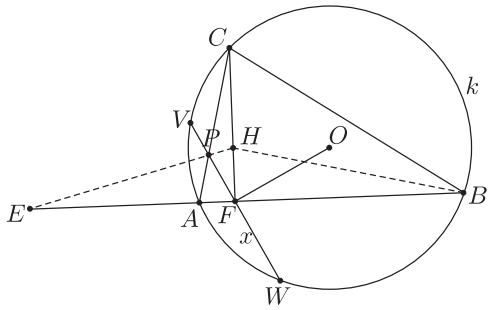
$$P'(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 \quad \text{и} \quad Q'(x) = x^m + x^{m-1} + \cdots + x + 1,$$

следи да $x^{n+1}-1$ дели $x^{m+1}-1$. Највећи заједнички делилац за полиноме $x^{n+1}-1$ и $x^{m+1}-1$ је једнак $x^d-1$, где је $d$ највећи заједнички делилац за бројеве $n+1$ и $m+1$ (доказ тврђења је заснован на Еуклидовом алгоритму). Одавде следи да је $d=n+1$, и коначно да $n+1$ дели $m+1$.

**335**. Нека је $O$ центар круга $\Omega$. Како је $\sphericalangle PAO = \sphericalangle PBO = 90^\circ$, тачке $P, A, O, B$ се налазе на истом кругу, који сече $CD$ у тачки $S$. Зато је $\sphericalangle OSP = 90^\circ$, па је $CS = SD$. Периферијски углови $ASC$ и $ABP$ су једнаки. Због $BE \parallel AP$ закључујемо да је $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAP$ и $\sphericalangle PAF = \sphericalangle AFB$ (углови са паралелним крацима). Дакле, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAP = \sphericalangle ABP = \sphericalangle ASC$. Због $\sphericalangle AFB + \sphericalangle FAB = \sphericalangle ABE, \sphericalangle ADS + \sphericalangle SAD = \sphericalangle ASC$ и $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ASC$ следи $\sphericalangle AFB + \sphericalangle FAB = \sphericalangle ADS + \sphericalangle SAD$. Како је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADS = \sphericalangle PAF = \sphericalangle AFB$ следи и да је $\sphericalangle FAB = \sphericalangle SAD$, па су троуглови $ABF$ и $ADS$ слични. Аналогно закључујемо да су и троуглови $ABE$ и $ASC$ слични. На основу доказаних сличности троуглова и $CS = SD$ следи $BE = BF$.

**336**. Означимо пресек правих $PH$ и $AB$ са $E$ и пресек $PF$ са кругом описаним око $\triangle ABC$ са $V$ и $W$ (слика 2.72). Како је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle FHB$ (као углови са нормалним крацима), проблем се своди на то да докажемо да је $\sphericalangle FHP = \sphericalangle FHB$. Доказаћемо да су троуглови $EFH$ и $FBH$ подударни, па на основу тога закључити да је $\sphericalangle FHP = \sphericalangle FHB$. Применом Менелајеве теореме за сечицу $E-P-H$ троугла $AFC$ важи

$$\frac{FE}{EA}\cdot\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CH}{HF} = 1. \tag{2.70}$$




Слика 2.72.

Како је $OF \perp VW$ то је $VF = FW = x$.

На основу потенције тачке $P$ на круг $k$ важи

$$AP \cdot PC = VP \cdot PW = (VF - PF) \cdot (WF + PF) \\ = (x - PF) \cdot (x + PF) = x^2 - PF^2, \tag{2.71}$$

а на основу потенције тачке $F$ на круг $k$ имамо да је

$$AF \cdot FB = VF \cdot FW = x^2.$$

Применом Стјуартове теореме на дуж $PF$ у $\triangle AFC$ имамо да је

$$PF^2 = \frac{AP}{AC} \cdot CF^2 + \frac{PC}{AC} \cdot AF^2 - AP \cdot PC,$$

па је, због (2.71),

$$PF^2 = \frac{AP}{AC} \cdot CF^2 + \frac{PC}{AC} \cdot AF^2 - (x^2 - PF^2) = \frac{AP}{AC} \cdot CF^2 + \frac{PC}{AC} \cdot AF^2 - x^2 + PF^2,$$

односно,

$$x^2 = AF \cdot FB = \frac{AP}{AC} \cdot CF^2 + \frac{PC}{AC} \cdot AF^2 = \frac{AP}{AC} \cdot CF^2 + \frac{AC - AP}{AC} \cdot AF^2.$$

Даље, еквивалентним трансформацијама добијамо

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AF}{CF} \cdot \frac{FB - AF}{CH},$$

што заменом у (2.70) даје

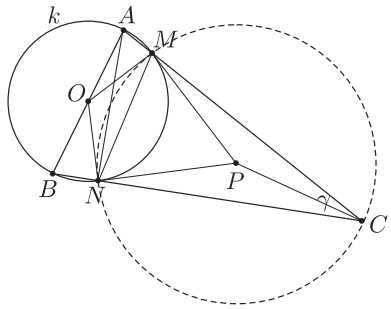
$$\frac{FE}{EA} \cdot \frac{AF}{CF} \cdot \frac{FB - AF}{CH} \cdot \frac{CH}{HF} = \frac{FE}{FE - AF} \cdot \frac{AF}{CF} \cdot \frac{FB - AF}{HF} = 1. \tag{2.72}$$

Како је $\triangle AFC \sim \triangle FBH$, то је $\dfrac{AF}{CF} = \dfrac{HF}{FB}$, што заменом у (2.72) даје

$$\frac{FE}{FE - AF} \cdot \frac{HF}{FB} \cdot \frac{FB - AF}{HF} = 1,$$

одакле следи $FE = FB$. Сада на основу става СУС закључујемо да је $\triangle EFH \cong \triangle FBH$, па је $\sphericalangle FHP = \sphericalangle FHB = \sphericalangle BAC$.

**337**. Означимо $\sphericalangle ACB$ са $\gamma$ (слика 2.73).




Слика 2.73.

Како је периферијски угао над пречником прав то су $M$ и $N$ подножја висина, па је зато $\sphericalangle NAC = 90^\circ - \gamma$, а његов централни $\sphericalangle NOM = 180^\circ - 2\gamma$. Како је $NPMO$ тетиван четвороугао следи да је $\sphericalangle NPM = 2\gamma$. Опишимо, сада, круг $k_1$ са центром $P$ и полупречником $MP = NP$. Тада централном углу $\sphericalangle NPM = 2\gamma$ одговара периферијски угао величине $\gamma$, па тачка $C$ припада кругу $k_1$. Дакле, $MP = NP = CP$, а како је по услову задатка $CP = MN$ закључујемо да је $\triangle MNP$ једнакостраничан. Према томе, $\sphericalangle NPM = 60^\circ$, одакле лако закључујемо да је $\sphericalangle NCM = \sphericalangle ACB = 30^\circ$.

**338**. Означимо пресек $AB$ и $PK$ са $E$ (слика 2.74).

Како је $AB$ пречник круга $k$ то је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADK = 90^\circ$. Праве $PK$ и $AB$ су међусобно нормалне ако и само ако је $\sphericalangle AEK = 90^\circ$, односно ако и само ако је $AKED$ тетиван четвороугао. Означимо $\sphericalangle DAB$ са $\varepsilon$. Како је

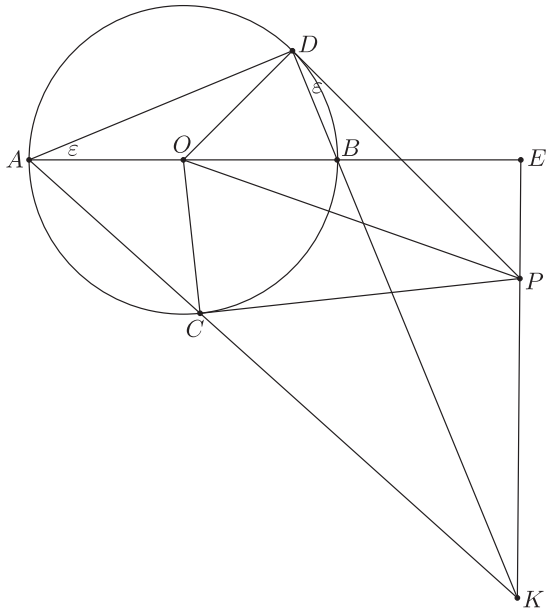
$$\sphericalangle KDP = \sphericalangle DAB = \sphericalangle DAE = \varepsilon,$$

четвороугао $AKED$ је тетиван ако и само ако је $\sphericalangle DKE = \sphericalangle DAE = \varepsilon$, односно треба да докажемо да је $\triangle DKP$ једнакокрак. Овај троугао је једнакокрак ако и само ако је сличан $\triangle AOD$ (једнакокраки троугао са истим углом на основици). Како је $\sphericalangle DAO = \sphericalangle PDK = \varepsilon$ потребно је још доказати $\dfrac{OA}{AD} = \dfrac{PD}{DK}$, односно $\dfrac{OA}{PD} = \dfrac{AD}{DK}$, то јест

$$\frac{OD}{PD} = \frac{AD}{DK}. \tag{2.73}$$

На основу

$$\sphericalangle POD = \frac{\sphericalangle DOC}{2} \quad \text{и} \quad \sphericalangle DOC = 2\sphericalangle CAD = 2\sphericalangle KAD$$




Слика 2.74.

закључујемо да је $\sphericalangle POD = \sphericalangle KAD$. Дакле, $\triangle OPD \sim \triangle AKD$, одакле следи (2.73). Према томе јесте $PK \perp AB$.

**339**. Из услова задатка добијамо да је $\sphericalangle IBR = \sphericalangle IBS = 90^\circ$, јер је права $RS$ симетрала спољашњег угла код темена $B$ у $\triangle ABC$ ($BI \perp KL$, $KL \parallel RS$). Нека је $r$ полупречник уписане кружнице. Тангенс $\sphericalangle RIS$ израчунаћемо као тангенс збира $\sphericalangle BIS$ и $\sphericalangle BIR$. Применом синусне теореме на $\triangle BLS$ добијамо

$$\frac{BS}{\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{BL}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

одакле је

$$BS = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Посматрајући правоугли троугао $BIS$ закључујемо да је

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BIS = \frac{BS}{BI} = \frac{r \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогно добијамо симетричан израз за $\operatorname{tg} \sphericalangle BIR$,

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BIR = \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Коначно, применом формуле за тангес збира углова добијамо

$$\operatorname{tg} \sphericalangle RIS = \operatorname{tg}\left(\sphericalangle BIS + \sphericalangle BIR\right) = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Сада на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине позитивних бројева $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ и $\cos^2 \frac{\gamma}{2}$ следи тражена неједнакост

$$\operatorname{tg} \sphericalangle RIS \geqslant 2 \cdot \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \beta}{\sin^3 \frac{\beta}{2}}.$$

**340**. Уочимо да је

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \\ &= 2(a^2+b^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd).\end{aligned}$$

На основу претходног следи да је $(a+b+c+d)^2$ паран број, па је и $a+b+c+d$ паран. Како је и $a+b+c+d \geqslant 4$, следи да је $a+b+c+d$ сложен број.

**341**. Збир свих позитивних делилаца броја $n = \prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ је

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\alpha_i} p_i^j.$$

Тако, збир делилаца броја $A$ износи

$$\sigma(A) = \left(1+2+\cdots+2^k\right)(1+p)(1+q) = \left(2^{k+1}-1\right) \cdot 9 \cdot 2^{2k-1}.$$

Збир свих делилаца броја $B$ је исти:

$$\sigma(B) = \left(1+2+\cdots+2^k\right)(1+r) = \left(2^{k+1}-1\right) \cdot 9 \cdot 2^{2k-1}.$$

С друге стране је

$$\begin{aligned}A+B = 2^k(pq+r) &= 2^k\left(\left(3 \cdot 2^{k-1}-1\right)\left(3 \cdot 2^k-1\right)+9 \cdot 2^{2k-1}-1\right) \\ &= 2^k\left(9 \cdot 2^{2k}-9 \cdot 2^{k-1}\right) = 2^{2k-1} \cdot 9 \cdot \left(2^{k+1}-1\right).\end{aligned}$$

Према томе,

$$\sigma(A) - A = (A+B) - A = B \quad \text{и} \quad \sigma(B) - B = (A+B) - B = A,$$

тј. збир правих делилаца броја $A$ је једнак $B$, а збир правих делилаца броја $B$ је једнак $A$. Дакле, $A$ и $B$ јесу пријатељски бројеви.

**342**. Нека су $f_n$ и $f_{n+k}, k > 0$, два различита Фермаова броја. Претпоставимо да је $m$ цео позитиван број такав да $m \mid f_n$ и $m \mid f_{n+k}$. Нека је $x = 2^{2^n}$. Тада је

$$\frac{f_{n+k}-2}{f_n} = \frac{x^{2^k}-1}{x+1} = x^{2^k-1} - x^{2^k-2} + \cdots - 1,$$

па $f_n \mid (f_{n+k}-2)$, одакле следи да $m \mid (f_{n+k}-2)$. Како $m \mid f_{n+k}$, то $m \mid 2$. Међутим, како су Фермаови бројеви непарни следи да је $m = 1$, одакле следи тврђење задатка.

**343**. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ произвољни бројеви из скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Сваки од њих се може записати у облику $a_i = 2^{k_i} b_i$, где је $b_i$ непаран. Тада су $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ непарни бројеви из интервала $[1, 2n-1]$, а како у интервалу $[1, 2n-1]$ постоји само $n$ непарних бројева, два су једнака, тј. за неке $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \neq j$, је $b_i = b_j$, па један од бројева $a_i$ и $a_j$ дели други.

**344**. Користећи неједнакост $S(a)S(b) \geqslant S(ab)$, која важи за све природне бројеве $a$ и $b$ (доказати!), добијамо

$$S(n) = S(n \cdot 10000) = S(16n \cdot 625) \leqslant S(16n)S(625) = S(16n) \cdot 13.$$

Дакле, $\dfrac{S(n)}{S(16n)} \leqslant 13$, док за $n = 625$ важи једнакост.

**345**. Посматрамо бројеве по модулу $4$, тако да имамо $1005^2$ копија сваког од бројева $0, 1, 2, 3$. Поделимо таблу на $1005^2$ делова димензија $2 \times 2$ и претпоставимо да постоји распоред бројева, у коме сума свака два суседна броја није дељива са $4$. Тада би сваки део $2 \times 2$ морао да садржи тачно једну $0$ и једну $2$, а на преостала два поља би морали бити уписани исти бројеви. Дакле, тада би број јединица био паран. Контрадикција!

**346**. Претпоставимо да је поплочавање могуће без квадрата $1 \times 1$. Обојимо редове квадрата $23 \times 23$ црно и бело наизменично. Црних поља има за $23$ више него белих. Сваки квадрат $2 \times 2$ садржи подједнако црних и белих поља, док сваки квадрат $3 \times 3$ покрива $3$ поља једне боје више него друге. Према томе, разлика броја црних и белих поља је дељива са $3$. Контрадикција! Значи, за поплочавање је неопходан бар један квадрат $1 \times 1$. Могуће је поплочавање при коме се користи само један квадрат $1 \times 1$. Он се стави у центар, а преостали део табле подели на правоугаонике $11 \times 12$ који се потом лако могу поплочати квадратима $2 \times 2$ и $3 \times 3$. Дакле, за захтевано поплочавање је потребан најмање један квадрат $1 \times 1$.

**347**. Доказаћемо следеће општије тврђење. *Нека је дат алфабет $A$ који се састоји од $n$ слова $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и реч $w$ дужине $2^n$ састављена од слова из $A$. Тада $w$ садржи непразну реч $x$, у којој се свако слово појављује паран број пута.*

Свако слово $a_i$ представимо вектором $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ дужине $n$, у коме се јединица налази на позицији $i$. Векторе сабирамо по координатама по модулу $2$. За дату реч $w = x_1 x_2 \cdots x_{2^n}$ дефинишемо векторе $v_i = e_{x_1} + e_{x_2} + \cdots + e_{x_i}$. Подреч $x_i x_{i+1} \cdots x_j$ садржи паран број појављивања сваког слова ако и само ако

важи $e_{x_i} + e_{x_{i+1}} + \cdots + e_{x_j} = (0, 0, \ldots, 0) = 0$. Уколико постоји $1 \leqslant i \leqslant 2^n$ тако да је $v_i = 0$, тада је тражена подреч $x_1 x_2 \cdots x_i$. Иначе, постоје индекси $1 \leqslant p < q \leqslant 2^n$, тако да је $v_p = v_q$ и тражена подреч је управо $x_p x_{p+1} \cdots x_q$.

Доказаћемо да је процена $2^n$ најбоља могућа. Конструишимо индуктивно реч $w_n$ дужине $2^n - 1$, на следећи начин: $w_1 = a_1$ и $w_{k+1} = w_k a_{k+1} w_k$ за $k < n$. Лако се проверава да све подречи од $w_n$ садрже неко слово непаран број пута. Ако посматрамо природне бројеве уместо слова, довољно је узети да је $a_i$ управо $i$-ти прост број.

**348**. Означимо са $F(n)$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, број начина на које можемо ставити $n$ писама $P_1, P_2, \ldots, P_n$ у коверте $K_1, K_2, \ldots, K_n$ тако да ниједно писмо не буде у „свом" коверту (писмо $P_i$ и коверат $K_i$ су пар). Нека је писмо $P_1$ стављено у коверат $K_2$. Тада су могућа два случаја.

(а) *Писмо $P_2$ је у коверти $K_1$.* Тада остају 4 писма која треба ставити (погрешно) у 4 коверте. То је могуће на $F(4)$ начина. Писмо $P_1$ се може наћи (погрешно) у 5 коверата. Ако је $P_i$ у $K_1$ кад год је $P_1$ у $K_i$ онда је број начина да се писма распореде погрешно $5 \cdot F(4)$.

(б) *Писмо $P_2$ није у коверти $K_1$.* Тада треба 5 писама расторедити у 5 коверата. То је могуће на $F(5)$ начина. У овом случају, с обзиром да се $P_1$ може наћи (погрешно) у 5 коверата, укупан број погрешних начина је $5 \cdot F(5)$ (тако да је $P_1$ у $K_i$, а $P_i$ није у $K_1$).

Дакле, $F(6) = 5F(5) + 5F(4)$ и аналогно $F(5) = 4F(4) + 4F(3)$, $F(4) = 3F(3) + 3F(3)$, $F(3) = 2F(2) + 2F(1)$. С обзиром на то да је $F(1) = 0$ и $F(2) = 1$, добијамо $F(3) = 2$, $F(4) = 9$, $F(5) = 44$ и $F(6) = 265$.

НАПОМЕНА. Овај задатак је специјалан случај познатог проблема погрешно адресираних писама.
*Написано је $k$ писама, по једно свакој од $k$ различитих особа, и адресирано је $k$ коверата са њиховим адресама. На колико различитих начина је могуће убацити ова писма у коверте тако да свако писмо буде у погрешној коверти?*
Овај проблем је први разматрао Николас II Бернули (1687–1759), а независно од њега касније га је решио и Леонард Ојлер (1707–1783). Интересантно је да су обојица живела у Базелу (Швајцарска), који је као слободан императорски град дуго био центар науке и уметности. Решење проблема погрешно адресираних писама је:

$$k!\left(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!}\right).$$

**349**. Датих 1000 тачака оформљује највише (уколико никоје три нису колинеарне) $\binom{1000}{3}$ троуглова. Међу њима изаберемо један троугао највеће површине. Нека је то троугао $ABC$. Кроз темена $A$, $B$ и $C$ повучемо праве паралелне наспрамним страницама. Пресечне тачке тих правих су темена новог троугла $A_1B_1C_1$. Површина $\triangle A_1B_1C_1$ није већа од 4 и показаћемо да се свих 1000 тачака налази унутар овог троугла. Претпоставимо, супротно, да постоји тачка $P$ која се не налази ван $\triangle A_1B_1C_1$. Тада се $\triangle ABC$ и тачка $P$ налазе на различитим странама бар једне од правих $A_1B_1$, $B_1C_1$,

$C_1A_1$. Нека је то на пример $B_1C_1$. Тада троугао $BCP$ има већу површину од троугла $ABC$. Контрадикција. Дакле, свих 1000 датих тачака се налази у троуглу површине не веће од 4.

**350**. Како је $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, за међусобно различите нуле $x_1$, $x_2, x_3$ и $x_4$ полинома $q(x)$ важи $x_i^5 = 1, i = 1, 2, 3, 4$. Користећи последњу једнакост добијамо

$$\begin{aligned} p(x_i) &= x_i^{44} + x_i^{33} + x_i^{22} + x_i^{11} + 1 \\ &= (x_i^5)^8 \cdot x_i^4 + (x_i^5)^6 \cdot x_i^3 + (x_i^5)^4 \cdot x_i^2 + (x_i^5)^2 \cdot x_i + 1 \\ &= x_i^4 + x_i^3 + x_i^2 + x_i + 1 = 0. \end{aligned}$$

Како за сваки корен $x_i$ полинома $q(x)$ важи $p(x_i) = 0$, закључујемо да је полином $p(x)$ дељив полиномом $q(x)$.

**351**. Применом Вијетових формула на једначину $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ добијамо:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= b, \\ x_1x_2x_3 &= -c. \end{aligned}$$

Квадрирањем друге једнакости добијамо

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3^2 = b^2,$$

тј. $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = b^2$. Сада, на основу друге две једнакости, следи $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2(-c)(-a) = b^2$, односно,

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = b^2 - 2ac.$$

**352**. Елементарним трансформацијама добијамо

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+nb} + \frac{b}{b+na} &= \frac{n(a^2+b^2) + 2ab}{n(a-b)^2 + ab(n+1)^2} \\ &= 1 - \frac{(n^2-1)ab}{n(a-b)^2 + ab(n+1)^2}. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Како је $\dfrac{(n^2-1)ab}{n(a-b)^2 + ab(n+1)^2} > 0$, на основу (2.74) следи $\dfrac{a}{a+nb} + \dfrac{b}{b+na} < 1$. На основу (2.74) и $(a-b)^2 \geqslant 0$ закључујемо да је и

$$\frac{a}{a+nb} + \frac{b}{b+na} \geqslant 1 - \frac{(n^2-1)ab}{0 + ab(n+1)^2} = \frac{2}{n+1}.$$

**353**. Елементарним трансформацијама и коришћењем неједнакости између аритметичке и хармонијске средине два позитивна броја добијамо да је

$$\begin{aligned}2 = a+b+c &= \frac{ab+ca}{b+c}+\frac{bc+ab}{c+a}+\frac{ca+cb}{a+b}\\ &= bc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)+ca\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)+ab\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}\right)\\ &\geqslant bc\cdot\frac{4}{(a+b+c)+a}+ca\cdot\frac{4}{(a+b+c)+b}+ab\cdot\frac{4}{(a+b+c)+c}\,.\end{aligned}$$

На основу последњег, због $a+b+c=2$, следи

$$2 \geqslant \frac{4bc}{2+a}+\frac{4ca}{2+b}+\frac{4ab}{2+c},$$

тј.

$$\frac{bc}{2+a}+\frac{ca}{2+b}+\frac{ab}{2+c} \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

**354**. Уочимо да је

$$\begin{aligned}\frac{x^2(y+1)}{x+y+xy} &= \frac{x^2y+x^2}{x+y+xy} = \frac{x^2+xy+x^2y-x-y-xy+x+y}{x+y+xy}\\ &= \frac{(x-1)(x+y+xy)+x+y}{x+y+xy} = x-1+\frac{x+y}{x+y+xy}.\end{aligned}$$

На основу неједнакости аритметичке и геометријске средине два позитивна броја важи

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

па, на основу претходног, добијамо

$$\frac{x^2(y+1)}{x+y+xy} = x-1+\frac{x+y}{x+y+xy} \geqslant x-1+\frac{4}{4+x+y}\,.$$

Аналогно је

$$\frac{y^2(z+1)}{y+z+yz} \geqslant y-1+\frac{4}{4+y+z} \quad \text{и} \quad \frac{z^2(x+1)}{z+x+zx} \geqslant z-1+\frac{4}{4+z+x}.$$

Како је $x+y+z=3$, добијамо

$$\begin{aligned}&\frac{x^2(y+1)}{x+y+xy}+\frac{y^2(z+1)}{y+z+yz}+\frac{z^2(x+1)}{z+x+xz}\\ \geqslant &x+y+z-3+\frac{4}{4+x+y}+\frac{4}{4+y+z}+\frac{4}{4+z+x},\end{aligned}$$

тј.

$$\frac{x^2(y+1)}{x+y+xy}+\frac{y^2(z+1)}{y+z+yz}+\frac{z^2(x+1)}{z+x+xz}\geqslant\frac{4}{7-z}+\frac{4}{7-x}+\frac{4}{7-y}.$$

На основу неједнакости аритметичке и хармонијске средине два позитивна броја важи

$$\frac{1}{7-x}+\frac{1}{7-y}+\frac{1}{7-z}\geqslant\frac{9}{21-(x+y+z)},$$

па је

$$\begin{aligned}\frac{x^2(y+1)}{x+y+xy}+\frac{y^2(z+1)}{y+z+yz}+\frac{z^2(x+1)}{z+x+xz}&\geqslant 4\cdot\frac{9}{21-(x+y+z)}\\&\geqslant 4\cdot\frac{9}{21-3}=2.\end{aligned}$$

**355**. Нека је $z=\cos x+i\sin x$ и $S=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n$. Израчунаћемо прво $S$. На основу

$$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n=\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\quad\text{и}\quad z^k=\cos kx+i\sin kx$$

следи

$$\begin{aligned}&1+\cos x+i\sin x+\cos 2x+i\sin 2x+\cdots+\cos nx+i\sin nx\\=&\frac{\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x-1}{\cos x+i\sin x-1}.\end{aligned}$$

Како је

$$\begin{aligned}\cos x+i\sin x-1&=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}i\\&=-2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}i=-2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x-1\\=&-2\sin\frac{(n+1)x}{2}\left(\sin\frac{(n+1)x}{2}-i\cos\frac{(n+1)x}{2}\right),\end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned}S&=\frac{-2\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}-i\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}}\\&=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\left(\sin\frac{(n+1)x}{2}-i\cos\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\\&=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\sin\frac{(n+1)x}{2}-i\cos\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Како је $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\operatorname{Re} S$ и

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} S &= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\cos\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}\right)\\ &= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{nx}{2},\end{aligned}$$

следи да је

$$1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{nx}{2}.$$

**356**. Проценићемо дате изразе тако да их можемо упоредити. Приметимо прво да су $\sin 1$, $\sin 2$ и $\sin 3$ позитивни бројеви, а да је $\sin 4$ негативан број. Дакле,

$$\frac{\sin 1}{\sin 2}>0,\quad \frac{\sin 2}{\sin 3}>0,\quad \frac{\sin 3}{\sin 4}<0.$$

Применом формуле за синус двоструког угла и чињенице да је косинус опадајућа функција на интервалу $[0,\frac{\pi}{2}]$ добијамо да је

$$\frac{\sin 1}{\sin 2}=\frac{\sin 1}{2\sin 1\cos 1}=\frac{1}{2\cos 1}<\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{3}}=1.$$

Како је $x>\sin(x)$ за $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, важи

$$\frac{\sin 2}{\sin 3}=\frac{\sin 2}{\sin(\pi-3)}>\frac{\sin 2}{0{,}15}=\frac{\sin(\pi-2)}{0{,}15}>\frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{0{,}15}=\frac{1}{0{,}3}>3.$$

Дакле,

$$\frac{\sin 3}{\sin 4}<\frac{\sin 1}{\sin 2}<\frac{\sin 2}{\sin 3}.$$

**357**. Приметимо да за $i=0,1,\ldots,n$ важи:

$$\begin{aligned}\sphericalangle OA_iB &= \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{i^2+i+1}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{i+1-i}{(i+1)i+1}\right)\\ &= \operatorname{arctg}(i+1)-\operatorname{arctg}(i).\end{aligned}$$

Сабирањем претходних једнакости добијамо

$$\sum_{i=0}^{n}\sphericalangle OA_iB=\sum_{i=0}^{n}(\operatorname{arctg}(i+1)-\operatorname{arctg}(i))=\operatorname{arctg}(n+1).$$

С друге стране, $\sphericalangle OA_{n+1}B=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n+1}\right)$, односно,

$$\sum_{i=0}^{n}\sphericalangle OA_iB=90^\circ-\sphericalangle OA_{n+1}B,$$

што је и требало доказати.

**358**. Без губљења општости, претпоставимо да је страница квадрата дужине 2. Средиште странице $AB$ је управо координатни почетак, $A(-1,0)$, $C(1,-2)$ и $P(\cos x, \sin x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Тада важи

$$AP^2 + CP^2 = (1+\cos x)^2 + \sin^2 x + (1-\cos x)^2 + (2+\sin x)^2 = 8 + 4\sin x.$$

Последњи израз је максималан за $x = \frac{\pi}{2}$, односно $P$ је средиште лука $\overset{\frown}{AB}$.

**359**. Доказаћемо да је пројекција дате криве на на $y$-осу интервал $[0,1]$.

Како је $(x^2+y^2)^2 \geqslant 0$ и $4x^2 \geqslant 0$ мора бити и $y \geqslant 0$. Са друге стране, на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине позитивних бројева $x^2$ и $y^2$ имамо $(x^2+y^2)^2 \geqslant 4x^2y^2$ и како је $y \geqslant 0$, следи да је $1 \geqslant y$. За $x = 0$ имамо да је $y = 0$, а за $x = -1$ је $y = 1$. Још треба показати да је крива непрекидна (да је свака тачка интервала $[0,1]$ пројекција неке тачке дате криве). Дата крива се може дефинисати и помоћу $|x|^2 + y^2 = 2|x|\sqrt{y}, y \geqslant 0$, тј. са

$$x = \sqrt{y}(1-\sqrt{1-y}) \quad \text{или} \quad x = \sqrt{y}(1+\sqrt{1-y}), \ \text{ за } y \in [0,1],$$

па крива јесте непрекидна (две дате функције су непрекидне).

**360**. Уочимо прво да је

$$\frac{a+1}{a(a+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+(a+2)}{a(a+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}\right).$$

Аналогно важи и за друга два сабирка, па је

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right).$$

На основу неједнакости аритметичке и хармонијске средине бројева $a$, $b$ и $c$,

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

и услова $a+b+c \leqslant 3$, добијамо

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c} \geqslant 3.$$

Аналогно, на основу неједнакости аритметичке и хармонијске средине бројева $a+2$, $b+2$ и $c+2$ и услова $(a+2)+(b+2)+(c+2) \leqslant 9$ следи

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2} \geqslant \frac{9}{(a+2)+(b+2)+(c+2)} \geqslant 1.$$

У оба случаја једнакост важи за $a = b = c = 1$. Стога је

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)} \geqslant \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1,$$

тј.

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}\geqslant 2.$$

За $a=b=c=1$ важи једнакост, па је тражени минимум број 2.

**361**. Приметимо прво да је

$$P(n)=n^3-n^2-5n+2=(n+2)(n^2-3n+1)\,,$$

као и да $P(n)^2=p^2$, за прост број $p$, важи ако и само ако је $P(n)=\pm p$. Последње је могуће једино ако је $n+2=\pm 1$ (и $n^2-3n+1=\pm p$) или $n^2-3n+1=\pm 1$ (и $n+2=\pm p$). Стога разликујемо следеће случајеве.

(i) Ако је $n+2=1$, тј. $n=-1$, тада је $n^2-3n+1=5$.

(ii) Ако је $n+2=-1$, тј. $n=-3$, тада је $n^2-3n+1=19$.

(iii) Ако је $n^2-3n+1=1$, тада је $n(n-3)=0$, па је $n=0$ или $n=3$. Тада је $n+2=2$, односно, $n+2=5$.

(iv) Ако је $n^2-3n+1=-1$, тада је $(n-1)(n-2)=0$, па је $n=1$ или $n=2$. Тада је $n+2=2$, односно, $n+2=4$. Број 4 није прост, па $n=2$ није решење.

Дакле, $n\in\{-3,-1,0,1,3\}$.

**362**. Једини савршен факторијел је 3!. Лако је уочити да $2!=2$ није савршен. За $n>3$, због $3!=6$, имамо да је $n!=6k$, где је $k>1$. Услед тога су бројеви 1, $k$, $2k$ и $3k$ чиниоци броја $n!$. Како је $1+k+2k+3k=6k+1>6k$, закључујемо да за $n>3$ број $n!$ не може бити савршен.

**363**. Нека је $p$ најмањи прост чинилац од $n$, и нека је $n=p\cdot d$. Тада је

$$\frac{np+p}{n+p}=\frac{p(n+1)}{p(d+1)}=\frac{n+1}{d+1}$$

природан број (по претпоставци). Како $n+p$ дели и $np+p^2$, онда $n+p$ дели и разлику $(np+p^2)-(np+p)=p^2-p$. При томе је $n+p\leqslant p^2-p$, јер је $p^2-p$ природан број. На основу последње неједнакости следи да је $n<p^2$, па делећи ову неједнакост са $p$ добијамо $d<p$. Претпоставимо да $d$ има неки прост чинилац $q$. Тада је $q\leqslant d<p$. С друге стране, $q$ дели и $n$, па услов минималности за $p$ даје $q\geqslant p$. Контрадикција! Дакле, $q$ не постоји и закључујемо да је $d=1$, односно $n=p$, што је и требало доказати.

**364**. Претпоставимо да $x$, $x\neq 0$, и $y$ задовољавају једначину и нека је $a$ највећи заједнички делилац бројева $x$ и $y$. Онда је $a$ и највећи заједнички делилац за $x$ и $y-x$, па можемо писати $x=ab$ и $y-x=ac$, где су $b$ и $c$ узајамно прости бројеви. Онда се дата једначина трансформише у $c(1+ac+2ab)=a^2b^3$. Како су $b^3$ и $c$ узајамно прости бројеви, као и $1+ac+2ab$ и $a^2$, следи да је

$$c=a^2 \quad \text{и} \quad b^3=1+ac+2ab=a^3+2x+1.$$

Последњу једначину можемо записати и као $0 = (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 + 2x + 1$, односно $0 = (a-b)^3 + 3(a-b)^2x + 2x + 1$. Уведимо смену $3(a-b)+2 = t$. Тада је $a - b = \frac{t-2}{3}$, па једначина постаје

$$\left(\frac{t-2}{3}\right)^3 + tx + 1 = 0,$$

односно, $27x = -\dfrac{19}{t} - 12 + 6t - t^2$. Како су и $x$ и $t$ цели бројеви, на основу последње једнакости закључујемо да $t$ може бити само један од бројева $1, 19, -1, -19$.

(i) За $t = 1$ добијамо $27x = -26$, што је немогуће.

(ii) За $t = 19$ добијамо $27x = -260$, што је такође немогуће.

(iii) За $t = -19$ добијамо да је $x = -18$. Тада је $ab = x = -18$ и $a - b = \frac{t-2}{3} = -7$, одакле следи $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = -23$, што је немогуће.

(iv) За $t = -1$ добијамо да је $x = 0$, што је у контрадикцији са претпоставком $x \neq 0$.

Дакле, нема решења за које је $x \neq 0$.

**365**. Ако је $m = 1$, на основу (ii) и (i) добијамо $a_{n+1} - a_n = n + 2$, а за $m = n = 0$ добијамо $a_0 = -1$. Стога, за $n > 0$, имамо

$$a_n - a_0 = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(i+2) = \sum_{i=2}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1,$$

па је

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 = \frac{n^2+3n-2}{2}.$$

Слично, имамо да је

$$a_{-n} - a_0 = \sum_{i=1}^{n}(a_{-i} - a_{-i+1}) = \sum_{i=1}^{n}(i-2) = \sum_{i=1}^{n-2} i - 1 = \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1,$$

па је

$$a_{-n} = \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 2 = \frac{n^2-3n-2}{2} = \frac{(-n)^2+3(-n)-2}{2}.$$

Дакле,

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 = \frac{n^2+3n-2}{2} \qquad \text{за сваки цео број } n.$$

Директном провером лако потврђујемо да овако дефинисани изрази $a_n$ задовољавају једнакости (i) и (ii).

**366**. Приметимо да важи $x^3 + ax - 2(a+4) = (x-2)(x^2+2x+(a+4))$, па је 2 један корен полинома. Како дата кубна једначина има 3 реална корена, разматрамо два случаја. Ако квадратна једначина $x^2+2x+(a+4)$ има тачно један реалан корен дискриминанта је једнака 0, па је $4-4(a+4)=0$, односно $a=-3$. Ако је $x=2$ корен са вишеструкошћу два, тада је $2^2+2\cdot 2+(a+4)=0$, односно $a=-12$. Директно проверавамо да $a=-3$ и $a=-12$ задовољавају услов задатка.

**367**. Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{(4-a^2)(4-b^2)}} \geqslant \frac{2}{4-ab},$$

$$\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{(4-b^2)(4-c^2)}} \geqslant \frac{2}{4-bc},$$

$$\frac{1}{4-c^2}+\frac{1}{4-a^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{(4-c^2)(4-a^2)}} \geqslant \frac{2}{4-ca}.$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо прву неједнакост. Неједнакост

$$\frac{1}{4-a^2} \leqslant \frac{a^4+5}{18},$$

је еквивалентна са $0 \leqslant 4a^4+2-a^6-5a^2 = (a^2-1)^2(2-a^2)$, која је тачна због $a^2 \leqslant \sqrt{3}$. Аналогно важи

$$\frac{1}{4-b^2} \leqslant \frac{b^4+5}{18} \quad \text{и} \quad \frac{1}{4-c^2} \leqslant \frac{c^4+5}{18}.$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2} \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4+15}{18} = 1.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a=b=c=1$.

**368**. За $a=4$ добијамо $x^3+y^3 = 4xy(x+y)+4$, односно

$$(x+y)^3 = 7xy(x+y)+4.$$

Лако проверавамо да једначина нема решења у $\mathbb{Z}$ посматрањем случајева $x+y \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod 7$ (куб целог броја никада не даје остатак 4 при дељењу са 7).

Уколико фиксирамо $y=0$, добијамо $x^3=a$. Према томе, за $a=n^3$, $n=1,2,\ldots$ једначина има решење $(n,0)$.

**369**. Доказаћемо јаче тврђење: *постоји бесконачно много парних бројева $n$, таквих да $n$ дели $2^n+2$ и $n-1$ дели $2^n+1$*. Назовимо такве бројеве „добрим”. Лако се проверава

да је $n = 2$ добар број. Остаје да докажемо следеће: уколико је $n$ добар број, тада је број $m = 2^n + 2$ такође добар.

Како је $n$ паран број, следи $m = 2^n + 2 = 2(2^{n-1} + 1) = n \cdot M$ за непаран број $M$. Такође, $m - 1 = 2^n + 1 = (n-1)M'$ за непаран број $M'$. Сада добијамо

$$2^m + 2 = 2(2^{(n-1)M'} + 1) = 2(2^{n-1} + 1)(2^{(n-1)(M'-1)} - \cdots - 2^{n-1} + 1)\,,$$

па је $2^m + 2$ дељиво са $2(2^{n-1} + 1) = m$. Слично,

$$2^m + 1 = 2^{nM} + 1 = (2^n + 1)(2^{n(M-1)} - \cdots - 2^n + 1)\,,$$

па је $2^m + 1$ дељиво са $2^n + 1 = m - 1$.

**370**. На основу услова задатка $n$ мора бити прост број, а $n + 1$ потпун квадрат (Зашто?). Дакле, $n + 1 = k^2$, односно $n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$. Како је $n$ прост број и $k - 1 < k + 1$, мора бити $k - 1 = 1$ и $k + 1 = n$. Из последњег следи да је $k = 2$, односно $n = 3$ је једини број са траженим својством.

**371**. Неједначину решавамо под условом $x \geqslant 0$, због дефинисаности израза $\sqrt{x}$ и $\sqrt[4]{x}$. Уводећи смену $t = \sqrt[4]{x}, t \geqslant 0$, неједначина постаје

$$8 \cdot 3^{t^2+t} + 9^{t+1} \geqslant 9^{t^2}.$$

Једноставним алгебарским трансформацијама добијамо следећи низ еквивалентних неједначина:

$$\begin{aligned}
&(9-1) \cdot 3^{t^2+t} + 3^{2t+2} \geqslant 3^{2t^2},\\
&3^{t^2+t+2} - 3^{2t^2} + 3^{2t+2} - 3^{t^2+t} \geqslant 0,\\
&3^{2t^2}\left(3^{-t^2+t+2} - 1\right) + 3^{t^2+t}\left(3^{-t^2+t+2} - 1\right) \geqslant 0,\\
&\left(3^{-t^2+t+2} - 1\right)\left(3^{2t^2} + 3^{t^2+t}\right) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Како је $3^{2t^2} + 3^{t^2+t} \geqslant 0$ за свако $t$, мора бити $3^{-t^2+t+2} - 1 \geqslant 0$, односно

$$-t^2 + t + 2 \geqslant 0\,.$$

На основу последњег следи $-1 \leqslant t \leqslant 2$, а како је и $t \geqslant 0$, добијамо $0 \leqslant \sqrt[4]{x} \leqslant 2$. Дакле, $0 \leqslant x \leqslant 16$.

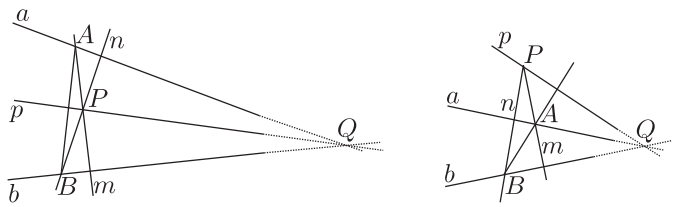
**372**. Нека су $a, b, c, d, e$ поени који су носили поменути задаци, поређани у растућем поретку. Према условима задатка важи $a < b < c < d < e$, $a + b = 10$, $d + e = 18$. Онда је $b \geqslant 6$, одакле закључујемо да је $c \geqslant 7$. Слично, $d \leqslant 8$, одакле је $c \leqslant 7$. Дакле, $c = 7$, па се за свих пет задатака добијало $4 + 6 + 7 + 8 + 10 = 35$ поена.

**373**. Нека је $x$ број кенгура који су обојени са две боје, а $y$ број кенгура који су обојени само једном бојом. Тада на основу услова задатка важи

$$x + y = 36 - 5 \quad \text{и} \quad 2x + y = (25-5) + (28-5) + (20-5).$$

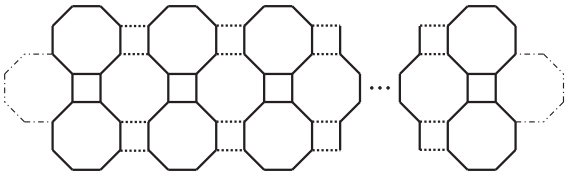
Решење овог система је $x = 27, y = 4$. Дакле, на листу су нацртана четири једнобојна кенгура.

**374**. Конструишемо нормалу $n$ из $P$ на $a$ и нормалу $m$ из $P$ на $b$ (слика 2.75). Обележимо са $B$ пресек нормале $n$ и $b$, а са $A$ пресек нормале $m$ и $a$. Онда је $P$ ортоцентар троугла $ABQ$, па је $PQ$ висина из $Q$ на $AB$. Дакле, конструишемо нормалу из $P$ на $AB$.




Слика 2.75.

**375**. Нека је $2n$ број осмоуглова који су на слици 2.76 нацртани подебљаном црном линијом. Тада у датом мозаику, поред њих има још $n+1$ многоуглова (многоуглови у средњој врсти). Према томе, $2n+n+1=61$, односно $n=20$.



Слика 2.76.

Дакле, има 20 фигура нацртаних подебљаном црном линијом, $19\cdot 4$ дужи нацртаних испрекиданом тачка – тачка линијом и $2\cdot 5$ дужи нацртаних испрекиданом тачка – црта линијом:

$$20\cdot 18+19\cdot 4+2\cdot 5=360+76+10=446\,.$$

За прављење приказаног мозаика утрошено је 446 јединица жице.

**376**. Посматрамо једнакостранични троугао $ABC$ са страницом дужине 2010. Поделимо странице датог троугла тачкама $A'$, $B'$ и $C'$ тако да је $AC'=a$, $BA'=b$ и $CB'=c$. Како је површина троугла $ABC$ већа од збира површина троуглова $AC'B'$, $BC'A'$ и $CA'B'$ добијамо да је

$$2010^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}>az\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+bx\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+cy\cdot\frac{\sqrt{3}}{4},$$

одакле следи тврђење задатка.

**377**. Нека је $C'$ тачка са круга $\Omega$ симетрична у односу на $OP$ са тачком $C$. Углови $\sphericalangle C'CD$ и $\sphericalangle OPC$ су једнаки као углови са нормалним крацима. Зато је $\sphericalangle C'PE=\sphericalangle OPC=\sphericalangle C'CD=\sphericalangle C'BD$, па је четвороугао $EBC'P$ тетиван. Онда су углови $\sphericalangle PBC'$ и $\sphericalangle PEC'$ једнаки као углови над тетивом $PC'$. Узимајући у обзир и симетричност тачака

$C$ и $C'$, важи $\sphericalangle ACC' = \sphericalangle ABC' = \sphericalangle PEC' = \sphericalangle PEC$. У троуглу $PCE$ спољашњи угао код темена $C$ једнак управо $\sphericalangle CPE + \sphericalangle CEP = \sphericalangle C'CD + \sphericalangle ACC' = \sphericalangle ACD$, па је $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCE = 90°$.

**378**. Доказаћемо да важи релација $DN \cdot DP = DC \cdot DB$, одакле следи да тачке $B, N, C, P$ припадају истом кругу. Нека је $s = \frac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла $ABC$, $r$ полупречник уписаног круга и $\phi = \sphericalangle CDN$. Тада је

$$\begin{aligned} DK &= DB - KB = \frac{a+c-b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{c-b}{2}, \\ DH &= DC - HC = \frac{a+b-c}{2} - b\cos\sphericalangle ACB \\ &= \frac{a+b-c}{2} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} = \frac{(c-b)(b+c-a)}{2a}. \end{aligned}$$

Такође важи $DN = 2r\sin\phi$ и $DP = \dfrac{DK}{\cos\phi} = \dfrac{c-b}{2\cos\phi}$. Дакле,

$$\begin{aligned} DN \cdot DP &= r(c-b)\operatorname{tg}\phi = r(c-b)\cdot\frac{MH}{DH} = r(c-b)\cdot\frac{\frac{AH}{2}}{\frac{(c-b)(s-a)}{a}} \\ &= r\cdot\frac{P_{ABC}}{s-a} = \frac{r\cdot s\cdot rs}{s(s-a)} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)} \\ &= (s-b)(s-c) = DB\cdot DC. \end{aligned}$$

**379**. Нека је $E$ тачка пресека симетрале $\sphericalangle B$ и странице $AC$. Како је $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$, троуглови $BAE$ и $BDC$ су слични, па је $BA : BE = BD : BC$, односно $BD \cdot BE = BA \cdot BC$. Тражену неједнакост добијамо користећи очигледну релацију $BD > BE$.

**380**. Да би се једна сијалица угасила, она мора да буде четврта сијалица у неком делу $2 \times 2$, где су остале сијалице угашене. Зато се сваки део $2 \times 2$ може искористити само једном за гашење сијалице. Како постоји тачно $2009 \cdot 2011$ делова $2 \times 2$, највише толико сијалица се могу угасити. Зато не можемо угасити све сијалице у таблици.

**381**. Нека су тражени бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Означимо $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2011}$ и посматрајмо систем

$$\begin{aligned} S - a_1 &= 2010\cdot 1^3, \\ S - a_2 &= 2010\cdot 2^3, \\ &\vdots \\ S - a_{2011} &= 2010\cdot 2011^3. \end{aligned}$$

Сабирањем једначина добијамо $2010S = 2010\cdot(1^3 + 2^3 + \ldots + 2011^3)$ и

$$a_i = S - 2010i^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + 2011^3 - 2010i^3, \quad i = 1, 2, \ldots, 2011.$$

Како су сви $a_i$ различити, одредили смо тражене бројеве.

**382**. Нека је $\{1, 2, \ldots, 2011\} = R_0 \cup R_1 \cup R_2$, где скуп $R_i$ представља бројеве који дају остатак $i$ при дељењу са 3, $i = 1, 2, 3$. Лако закључујемо да је $|R_1| = 671$ и $|R_0| = |R_2| = 670$. Сада можемо посматрати остатке бројева при дељењу са 3, а после пермутовати све скупове $R_i$, $i = 1, 2, 3$. Подниз састављен од $671 + 670$ јединица и двојки не сме садржати парцијалну суму која је дељива са 3, па зато имамо два могућа случаја:

$$1, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots, 1, 2 \quad \text{или} \quad 2, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots, 2, 1.$$

Како је број јединица за један већи од броја двојки, други случај је немогућ. Преосталих 670 нула се могу појавити било где у пермутацији, осим на првом месту. Зато је број начина да одаберемо нуле једнак $\binom{2010}{670}$. Најзад, укупан број пермутација је

$$\binom{2010}{670} \cdot 670! \cdot 670! \cdot 671! = \frac{2010! \cdot 670! \cdot 671!}{1340!}.$$

**383**. Ако је $A$ непарно, тада је $x^2 + Ax + B = x(x + A) + B \equiv B \pmod 2$, док је $2x^2 + 2x + C = 2x(x + 1) + C \equiv C \pmod 2$. Зато је у овом случају довољно узети $B = C + 1$.

Ако је $A$ парно, тада је

$$x^2 + Ax + B = \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + B - \frac{A^2}{4}.$$

Како квадрат природног броја даје остатке 0 или 1 при дељењу са 4, сви бројеви из првог скупа дају остатак $B - \dfrac{A^2}{4}$ или $B - \dfrac{A^2}{4} + 1$ при дељењу са 4. Бројеви из другог скупа $2x^2 + 2x + C = 2x(x + 1) + C$ дају остатак $C$ при дељењу са 4. Зато је довољно узети $C = B - \dfrac{A^2}{4} + 2$ да би скупови били дисјунктни.

**384**. Из $x_n = 3x_{n-1} + 2^{n-1}$ следи да је $2^{n-1} = x_n - 3x_{n-1}$, па померањем индекса за 1 добијамо $2^n = x_{n+1} - 3x_n$. Сада добијамо једнакост

$$x_{n+1} - 3x_n = 2(x_n - 3x_{n-1}), \quad \text{тј.} \quad x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} = 0.$$

Решења карактеристичне једначине $t^2 - 5t + 6 = 0$ су $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$, а општи члан

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n.$$

За $n = 1$ добијамо $2A + 3B = 1$. Из почетне једнакости се добија да је $x_2 = 5$, па следи да је, за $n = 2$, $4A + 9B = 5$. Решење система је $A = -1$ и $B = 1$, одакле се добија да је $x_n = 3^n - 2^n$.

**385**. Означимо са $A = x^{\log y}$ и $B = y^{\log x}$. Када логаритмујемо леве и десне стране добијамо једнакости $\log A = \log x \cdot \log y$, $\log B = \log y \cdot \log x$. Одавде следи да је $A = B$, односно $x^{\log y} = y^{\log x}$. Уведимо смену $t = \sqrt{y^{\log x}}$, тј. $t^2 = y^{\log x}$. Сада имамо једначину $t^2 + t - 110 = 0$, чија су решења $t_1 = -11$ и $t_2 = 10$. Како је $t > 0$, једино решење је $t_2 = 10$. Сада је $x^{\log y} = 100$, тј. $\log x \cdot \log y = 2$. Логаритмовањем друге једначине добијамо $\log x + \log y = 3$. Решење система је $\log x = 1, \log y = 2$ или $\log x = 2, \log y = 1$, одакле добијамо да $(x, y) \in \{(10, 100), (100, 10)\}$.

**386**. Функција квадратни корен је дефинисана само за ненегативне реалне бројеве, па сам запис $\sqrt{-1}$ нема смисла. Често се погрешно тумачи и записује да је једнакост $i^2 = -1$ еквивалентна са $i = \sqrt{-1}$, што је и учињено у датом доказу. Напоменимо да ни за $a \in \mathbb{R}^+$ решавање једначине $x^2 = a$ није еквивалентно одређивању броја $\sqrt{a}$. Посматрајмо сада једначину $x^2 = -1$. Њу решавамо на следећи начин:

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = i^2 \Leftrightarrow x^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (x-i)(x+i) = 0 \Leftrightarrow x = i \vee x = -i.$$

Наиме, решења једначине $x^2 = -a$, где је $a > 0$, су бројеви $\pm i\sqrt{a}$, а не никако $\pm\sqrt{-a}$. У датом доказу је неадекватно коришћена и једнакост $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Наиме, ова једнакост има смисла и тачна је једино када су $a$ и $b$ позитивни реални бројеви, па се не може применити за $a = 1$ и $b = -1$.

**387**. Када заменимо у полазну једначину $z = a + ib$, имагинарни део нам даје $2ab - 2a - 3b + 1 = 0$, тј. $b = \dfrac{2a-1}{2a-3}$, што када заменимо у реални део $a^2 - b^2 - 3a + 2b + 5 = 0$ добијамо једначину

$$\frac{4a^4 - 24a^3 + 69a^2 - 99a + 50}{(2a-3)^2} = 0.$$

Како је $4a^4 - 24a^3 + 69a^2 - 99a + 50 = (a-1)(a-2)(4a^2 - 12a + 25)$ и дискриминанта квадратног тринома $D = -256 < 0$, имамо да је $4a^2 - 12a + 25 > 0$ за свако $a$, те добијамо да су једина решења $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$, што нам даје решења $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 2 + 3i$.

Једначина се може решити и као обична квадратна, само би при таквом начину решавања требало обратити пажњу на корен комплексног броја.

**388**. Нека су $z_1$, $z_2$ и $z_3$ корени једначине $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, а $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$ корени једначине $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$. Тада, користећи Виетове формуле, налазимо да важи

$$\begin{aligned}
|a| &= |-a| = |z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3|,\\
|b| &= |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = |z_1z_2z_3|\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right|\\
&= |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |z_1 + z_2 + z_3| = |a|,
\end{aligned}$$

као и $|z_1z_2z_3| = |-c| = |c| = 1$. С друге стране, применом Виетових формула на другу једначину и чињеница $|a| = |b|$ и $|c| = 1$ , добијамо да је $\omega_1 = -1$ решење исте. Дакле, друга једначина је еквивалентна једначини

$$x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = (x+1)(x^2 + (|a|-1)x + 1) = 0,$$

па су $\omega_2$ и $\omega_3$ корени квадратне једначине $x^2 + (|a|-1)x + 1 = 0$. Међутим, како је $0 \leqslant |a| \leqslant 3$, за дискриминанту ове једначине важи $D = (|a|+1)(|a|-3) \leqslant 0$. Ако је $|a| = 3$, тада је $\omega_2 = \omega_3 = -1$, односно $|\omega_1| = |\omega_2| = |\omega_3| = 1$. За $0 \leqslant |a| < 3$

је $D < 0$, па имамо два конјуговано комплексна корена $\omega_3 = \overline{\omega_2}$, и за њих важи $|\omega_2|^2 = \omega_2\overline{\omega_2} = \omega_2\omega_3 = 1$, као и $|\omega_3|^2 = \omega_3\overline{\omega_3} = \omega_3\omega_2 = 1$. Тиме смо показали да је у сваком случају $|\omega_1| = |\omega_2| = |\omega_3|$.

**389**. 1) Нека је $Q$ природан број не већи од 40 и нека су $t_1, t_2, \ldots, t_n$ тежине потребних тегова. Тежине $t_1, t_2, \ldots, t_n$ треба да буду изабране тако да једнакост

$$Q = a_1t_1 + a_2t_2 + \cdots + a_nt_n \tag{2.75}$$

важи за свако $Q \in \{1, 2, \ldots, 40\}$, где коефицијент $a_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, узима вредност 1 ако је тег тежине $t_k$ стављен на тас, а у супротном је 0. Представљање броја $Q$ у облику (2.75) је еквивалентно репрезентацији тог броја у бинарном бројном систему. Заиста, ако узмемо

$$t_1 = 2^0 = 1, \quad t_2 = 2^1 = 2, \quad t_3 = 2^2 = 4, \ \ldots, \ t_n = 2^{n-1}$$

добићемо

$$Q = a_n2^{n-1} + \cdots + a_32^2 + a_22^1 + a_12^0. \tag{2.76}$$

Највећи број који се може изразити помоћу (2.76) је број који се у бинарном систему записује са $n$ јединица, то јест

$$(\underbrace{1\ldots111}_{n})_2 = 2^{n-1} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1.$$

Узимајући $n = 6$ добијамо $(111111)_2 = 2^6 - 1 = 63 > 40$, тако да избор 6 тегова задовољава услове задатка. Према томе, потребно је (и довољно) узети тегове тежина $1, 2, 4, 8, 16$ и $32$ kg. Друга решења са теговима различитих тежина не постоје.

2) И у овом случају ћемо користити идеју изнету у делу 1).

Представимо $Q \in \{1, 2, \ldots, 40\}$ у облику

$$Q = b_1t_1 + b_2t_2 + \cdots + b_mt_m, \tag{2.77}$$

где коефицијенти $b_1, b_2, \ldots, b_m$ узимају следеће вредности:

$b_k = -1$ ако се тег тежине $t_k$ ставља на исти тас где и мерени терет;
$b_k = 0$ ако тег тежине $t_k$ није стављен ни на један тас;
$b_k = 1$ ако се тег тежине $t_k$ ставља на тас на коме није мерени терет.

Ако $-1$ схватимо као цифру репрезентација, (2.77) сугерише коришћење бројевног система са основом 3. Дакле,

$$Q = b_m3^{m-1} + \cdots + b_33^2 + b_23^1 + b_13^0 = (b_m \ldots b_3b_2b_1)_3. \tag{2.78}$$

Највећи број који се може изразити помоћу (2.78) је број који се у овом систему записује са $m$ јединица, то јест

$$(\underbrace{1\ldots111}_{m})_3 = 3^{m-1} + \cdots + 3^2 + 3^1 + 3^0 = \frac{3^m - 1}{2}.$$

Узимајући $m = 4$ добијамо $(1111)_3 = 40$, тако да избор тегова са тежинама $1, 3, 9$ и $27\,\mathrm{kg}$ задовољава услов задатка.

Описани поступак мерења у случају 2) илустроваћемо на примеру терета $Q = 23\,\mathrm{kg}$. Овај број прво трансформишемо у облик (2.78):

$$Q = 23 = 27 - 4 = 27 - (3 + 1) = 1 \cdot 27 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1.$$

На основу последњег израза закључујемо да тегове од $1$ и $3\,\mathrm{kg}$ треба ставити на тас заједно са теретом, док тег тежине $27\,\mathrm{kg}$ треба ставити на други тас.

**390**. Праве $DH$ и $AF$ су паралелне, па је

$$CH : HF = CD : DA. \tag{2.79}$$

Такође, на основу паралелности правих $DF$ и $CB$ следи $CD : DA = BF : FA$, одакле, због $BF = DE$, произлази

$$CD : DA = DE : FA. \tag{2.80}$$

Важи и

$$DE : FA = DG : GF, \tag{2.81}$$

јер су троуглови $AFG$ и $EGD$ слични. На основу (2.79), (2.80) и (2.81) следи

$$CH : HF = DG : GF,$$

одакле, због обрата Талесове теореме, следи $GH \parallel AC$.

**391**. Правоугли троуглови $BCF$ и $ABD$ су слични (оштри углови $BFC$ и $ADB$ су једнаки као углови са нормалним крацима), па важи $BF : AD = BC : AB$, односно,

$$(FA + AB) : BC = BC : AB.$$

Дакле,

$$BC^2 - AB^2 = FA \cdot AB. \tag{2.82}$$

Применом Питагорине теореме на правоугли троугао $ABE$ добијамо $BE^2 - AB^2 = AE^2$. Како је $BE = BC$, на основу последње једнакости важи

$$BC^2 - AB^2 = AE^2. \tag{2.83}$$

На основу (2.82) и (2.83) следи $AE^2 = FA \cdot AB$, одакле закључујемо да је троугао $BEF$ правоугли.

**392**. Означимо са $I$ центар уписаног круга троугла $ABC$. Нека је $P$ средиште странице $BC$, а $Q$ пресек нормале из $M$ на $AC$ са кругом $\Omega_1$ (који је ближи $AC$). Како су тачке $A, I, M$ колинеарне, следи

$$\sphericalangle CIM = \sphericalangle CAI + \sphericalangle ACI = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \sphericalangle MCI.$$

Дакле, $IM = MC$ и $MP = MQ$, па је

$$\sphericalangle IMQ = \sphericalangle AMQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle CMP.$$

Зато су троуглови $IMQ$ и $CMP$ подударни и $\sphericalangle IQM = 90^\circ$. Коначно је $IQ$ тангента на круг $\Omega_1$ и $IQ \parallel AC$. Слично добијамо да је права кроз $I$ која је паралелна са $AC$ тангента на круг $\Omega_2$, чиме је задатак решен.

**393**. (а) Нека је $ABCDE$ правилан петоугао, и нека троугао $ABC$ ротира око темена $C$ тако да се $B$ поклопи са $D$, а $A$ са $F$. Онда је $\sphericalangle ADF$ опружен, а троуглови $CAF$ и $DFA$ су слични. На основу тога је

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}, \quad \text{тј.} \quad \frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 1.$$

Квадрирајући обе стране последње једнакости добијамо $\dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{b^2} - 2 = 1$, одакле непосредно следи тражена једнакост.

(б) Посматрајући једнакокраке троуглове чији су парови крак–основица $(a, b)$, $(c, a)$ и $(b, c)$ закључујемо да је

$$b^2 = 2a^2(1 - \cos 5\theta), \quad a^2 = 2c^2(1 - \cos\theta), \quad c^2 = 2b^2(1 - \cos 3\theta), \quad \text{где је } \theta = \frac{\pi}{7}.$$

Стога је

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = 2[3 - (\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta)].$$

Сада, на основу

$$\begin{aligned}\sin\theta(\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta) &= \frac{1}{2}[\sin 2\theta + (\sin 4\theta - \sin 2\theta) + (\sin 6\theta - \sin 4\theta)] \\ &= \frac{1}{2}\sin 6\theta = \frac{1}{2}\sin\theta,\end{aligned}$$

следи да је $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta = \dfrac{1}{2}$. Дакле, $\dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{b^2} + \dfrac{a^2}{c^2} = 2 \cdot \dfrac{5}{2} = 5$.

**394**. Користићемо следеће тврђење.
*За тачке $A \neq C$ и $B \neq D$, праве $AC$ и $BD$ су нормалне ако и само ако важи $AD^2 - CD^2 = AB^2 - BC^2$.*
Нека је тачка $P$ пресек нормала из $A$ и $C$ на праве $FB$ и $BD$, редом. Из тврђења добијамо $PF^2 - PB^2 = AF^2 - AB^2$ и $PB^2 - PD^2 = CB^2 - CD^2$. Како су троуглови $ABC$, $CDE$, $EFA$ једнакокраки, одузимањем следи

$$PD^2 - PF^2 = ED^2 - EF^2,$$

па је права $PE$ нормална на $DF$, што је и требало показати.

**395**. Нека дата лопта има центар $O$ и полупречник $r$. Посматрајући троуглове $ASB$ и $SBC$ на основу Питагорине теореме добијамо да је $AS = CS = \sqrt{a^2 - b^2}$. Стога је

$$V = V_{SABC} = \frac{1}{3} BS \cdot P_{\triangle ASC} = \frac{b}{6}(a^2 - b^2).$$

Нека је $D$ подножје висине из $B$ на основицу $AC$ једнакокраког троугла $ABC$. Тада је

$$AC = \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{2}, \quad BD = \sqrt{a^2 - \left(\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2},$$

па је површина пирамиде

$$P = 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{2} + \frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{2}.$$

Пирамиду $ABCS$ можемо да поделимо на четири мање пирамиде $OABS$, $OABC$, $OACS$ и $OBCS$, чије унутрашњости су дисјунктне, а чија унија је пирамида $ABCS$. На основу тога добијамо

$$\begin{aligned} V &= V_{OABS} + V_{OABC} + V_{OACS} + V_{OBCS} \\ &= \frac{P_{\triangle ABS} \cdot r}{3} + \frac{P_{\triangle ABC} \cdot r}{3} + \frac{P_{\triangle ACS} \cdot r}{3} + \frac{P_{\triangle ABS} \cdot r}{3} \\ &= \frac{P \cdot r}{3}, \end{aligned}$$

одакле следи да је

$$r = \frac{3V}{P} = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

**396**. Нека је $x = y + z$, где је $y = \lfloor x \rfloor$ и $z = \{x\}$. Онда је

$$(f(x))^2 = 1 + \frac{2\sqrt{yz}}{y + z},$$

па на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине позитивних бројева $y$ и $z$ закључујемо да $(f(x))^2 \leqslant 2$. Како је функција $f$ позитивна, закључујемо да за свако $x$ $(x \geqslant 1)$ важи $0 < f(x) \leqslant \sqrt{2}$. За $1 \leqslant x < 2$ имамо да је $y = 1$, па је

$$\lim_{x \uparrow 2} (f(x))^2 = \lim_{z \uparrow 1} \left(1 + \frac{2\sqrt{z}}{1 + z}\right) = 2.$$

Дакле, тражени број је $\sqrt{2}$.

**397**. Множењем једнакости $a_n = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}$ са $q$ добијамо

$$qa_n = q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + (n-1)q^{n-1} + nq^n.$$

Након одузимања имамо $a_n(1-q) = 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}-nq^n$, па је општи члан низа једнак

$$a_n = \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q}.$$

Како је $|q| < 1$, то је $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

**398**. Означимо $a = \sin x$ и $b = \cos x$. Тада важи $a^2 + b^2 = 1$, а дата неједнакост је еквивалентна са

$$(2ab)^n + (a^n - b^n)^2 = a^{2n} + b^{2n} + (2^n - 2)(ab)^n \leqslant 1.$$

Из Њутнове биномне формуле добијамо

$$1 = (a^2+b^2)^n = a^{2n} + b^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{2k} b^{2n-2k}.$$

Сада користећи идентитет

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 2,$$

суму $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{2k} b^{2n-2k}$ можемо посматрати као суму $2^n - 2$ бројева и применити неједнакост између аритметичке и геометријске средине

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{2k} b^{2n-2k} \geqslant (2^n - 2) a^n b^n,$$

јер је

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot 2k = 2n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} = 2n \cdot (2^{n-1} - 1) = n(2^n - 2).$$

Тиме је задатак решен.

**399**. Посматрајмо функцију $g(x) = f(x) + x$. Онда услови постају:

(i) $g(1) > 0$;

(ii) $g(x+y) = g(x)g(y)$, за све $x, y \in \mathbb{Q}$;

(iii) $g(x) = 2g(x+1)$, за свако $x \in \mathbb{Q}$.

На основу другог и трећег услова добијамо да је $g(1) = 2g(2) = 2g^2(1)$, то јест $g(1) = \dfrac{1}{2}$. Такође, на основу другог услова следи да је $g(1) = g(1)g(0)$ и како је $g(1) \neq 0$, мора бити $g(0) = 1$. На основу последњег и другог услова добијамо

$$g(-x) = \frac{1}{g(x)}. \tag{2.84}$$

Дакле, довољно је функцију одредити само за позитивне рационалне бројеве.

Прво одређујемо вредност функције за природне бројеве $g(n) = g^n(1) = \dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$. Затим одређујемо вредност функције за рационалне бројеве облика $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. На основу

$$\frac{1}{2} = g(1) = g\Big(\frac{n}{n}\Big) = g^n\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

закључујемо да је $g\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{\frac{1}{n}}$. Сада је лако уочити да за произвољан позитиван рационалан број $x = \dfrac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$, важи

$$g(x) = g\Big(\frac{m}{n}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{2^x}.$$

Због (2.84) закључујемо да за произвољан рационалан број $x$ важи $g(x) = \dfrac{1}{2^x}$. Дакле, $f(x) = -x + \dfrac{1}{2^x}$. Провером се лако утврђује да ова функција задовољава услове задатка.

**400**. Најпре одаберемо две тачке $A$ и $B$ које су исте боје и чије је растојање 2010 (на пример посматрајући једнакостраничан троугао странице 2010). Претпоставимо да су $A$ и $B$ обојене белом бојом. Над дужи $AB$ као пречником опишимо кружницу чије је средиште тачка $S$. Нека је $C$ било која тачка на кружници. Ако је $C$ беле боје, доказ је завршен јер је $\sphericalangle ACB$ прав као угао над пречником. Ако је $C$ црвене боје, одредимо тачку $D$ дијаметрално супротну тачки $C$. Ако је $D$ беле боје, троугао $ABD$ је правоугли и сва темена су беле боје, па је доказ завршен. Међутим, ако је $D$ црвене боје, уочимо нову тачку $E$ на кружници. Ако је $E$ беле боје, троугао $ABE$ је тражени троугао; ако је $E$ црвене боје, онда је $CDE$ правоугли троугао и сва темена су му црвене боје.

**401**. Како је $A_0 = p$, то формула $A_0$ није таутологија. Покажимо индукцијом да све формуле $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ јесу таутологије. Најпре претпоставимо да постоји вредност исказних слова $p$ и $q$ тако да је $\tau(A_1) = \bot$. Тада је $\tau(\neg A_0 \Rightarrow B_0) = \bot$. Одатле мора бити $\tau(A_0) = \bot$ и $\tau(B_0) = \bot$, тј. $\tau(p) = \bot$ и $\tau(q \Rightarrow \neg p) = \bot$, одакле је $\tau(p) = \bot$, $\tau(q) = \bot$ и $\tau(p) = \top$ . Како ово није могуће, то је $A_1$ таутологија. Претпоставимо да је $A_n$ таутологија. Тада за све могуће вредности исказних слова $p$ и $q$ важи $\tau(A_n) = \top$. Важи

$$\tau(A_{n+1}) = \tau(\neg A_n \Rightarrow B_n) = \tau(\bot \Rightarrow B_n) = \top,$$

па је према томе и $A_{n+1}$ таутологија. Дакле, доказали смо да су све формуле $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, таутологије.

За вредности исказних слова $\tau(p) = \tau(q) = \top$ имамо $\tau(A_0) = \tau(p) = \top$. Одавде и из првог дела задатка имамо да је $\tau(A_n) = \top$, за $n \geqslant 0$. Докажимо индукцијом да је при овим почетним условима $\tau(B_{2n}) = \bot$, $n \geqslant 0$, тј. да ниједна од формула $B_{2n}$ није таутологија. Одмах је $\tau(B_0) = \tau(q \Rightarrow \neg p) = \bot$. Претпоставимо сада да је

$\tau(B_{2n}) = \bot$ и израчунајмо $\tau(B_{2n+2})$:

$$\begin{aligned}\tau(B_{2n+2}) &= \tau(A_{2n+1}\underline{\vee}B_{2n+1}) = \tau(A_{2n+1}\underline{\vee}(A_{2n}\underline{\vee}B_{2n}))\\ &= \tau(\top\underline{\vee}(\top\underline{\vee}\bot)) = \bot.\end{aligned}$$

Ово доказује да формуле $B_{2n}$ нису таутологије.

За вредности исказних слова $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \bot$ имамо $\tau(A_0) = \tau(p) = \top$ и $\tau(B_0) = \tau(q \Rightarrow \neg p) = \top$. Покажимо да сада важи $\tau(B_{2n+1}) = \bot$, за $n \geqslant 0$. Одмах је $\tau(B_1) = \tau(A_0\underline{\vee}B_0) = \tau(\top\underline{\vee}\top) = \bot$. Сада претпоставимо да је $\tau(B_{2n+1}) = \bot$ и израчунајмо $\tau(B_{2n+3})$:

$$\begin{aligned}\tau(B_{2n+3}) &= \tau(A_{2n+2}\underline{\vee}B_{2n+2}) = \tau(A_{2n+2}\underline{\vee}(A_{2n+1}\underline{\vee}B_{2n+1}))\\ &= \tau(\top\underline{\vee}(\top\underline{\vee}\bot)) = \bot.\end{aligned}$$

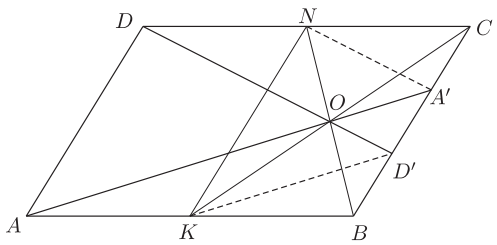
Ово доказује да ни формуле $B_{2n+1}$ нису таутологије. Дакле, ниједна од формула $B_n$, $n \in \mathbb{N}$, није таутологија.

**402**. Нека је $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, при чему су $p_i$ прости бројеви, а $\alpha_i$ природни бројеви $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Нека је $d = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ произвољан делилац броја $n^2$. Тада је $0 \leqslant \beta_i \leqslant 2\alpha_i$. Овом делиоцу броја $n^2$ придружићемо уређени пар $f(d) = (u, v)$ на следећи начин: $u = p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$, $v = p_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\delta_k}$, при чему је $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, а

$$\delta_i = \begin{cases} \beta_i - \alpha_i, & \gamma_i = \alpha_i,\\ \alpha_i, & \gamma_i < \alpha_i.\end{cases}$$

Јасно је да је $\mathrm{nzs}(u, v) = n$ и да за сваки пар $(u, v)$ коме је најмањи заједнички садржалац једнак $n$ постоји тачно један делилац $d$ броја $n^2$ такав да је $f(d) = (u, v)$. На тај начин смо направили бијекцију између свих уређених парова $(u, v)$ којима је најмањи заједнички садржалац једнак $n$ и свих делилаца броја $n^2$, одакле следи тражено тврђење.

**403**. Нека је $\{A'\} = AO \cap BC$ и $\{D'\} = DO \cap BC$ (слика 2.77).




Слика 2.77.

Из услова задатка је $A'N$ средња линија троугла $DD'C$, $KD'$ средња линија троугла $AA'B$, па је $KD' \parallel AA'$ и $A'N \parallel DD'$. Сада су у троугловима $KD'C$ и $BNA'$ дужи $A'O$ и $D'O$ редом средње линије, па тачка $O$ полови дужи $KC$ и $NB$. Значи, четвороугао $KNCB$ је паралелограм, па је и четвороугао $ABCD$ паралелограм.

**404**. Посматрамо бројеве из темена коцке по модулу 2011, али као остатке $1, 2, \ldots, 2011$. Ако су сви бројеви једнаки, задатак је решен. У супротном, постоји ивица која спаја два темена са различитим бројевима $1 \leqslant N < M \leqslant 2011$. Додавањем 2010 пута броја $N$ броју $M$, добијамо $M \to M + 2010N \equiv M - N \pmod{2011}$. Дакле, број $M$ је замењен бројем $M - N$, где је $1 \leqslant M - N \leqslant 2010$. Како је $N \geqslant 1$, сума свих остатака је смањена бар за један. По дефиницији сума свих остатака је бар 8, а понављајући овај процес долазимо до стања у коме су сви остаци једнаки.

**405**. Нека је $z = a + bi$, при чему су $a$ и $b$ реални бројеви и $b \neq 0$. Тада је $\operatorname{Im} z^5 = 5a^4 - 10a^2b^2 + b^5$ и

$$\frac{\operatorname{Im} z^5}{\operatorname{Im}^5 z} = 5\left(\frac{a}{b}\right)^4 - 10\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1.$$

Уводећи смену $x = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ добијамо

$$\frac{\operatorname{Im} z^5}{\operatorname{Im}^5 z} = 5x^2 - 10x + 1 = 5(x-1)^2 - 4.$$

Тражени минимум је $-4$ и постиже се за $x = 1$, односно за комплексне бројеве облика $z = a(1 \pm i), a \neq 0$.

**406**. Докажимо да је $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Претпоставимо супротно, на пример, без умањења општости, да је $x_1 \neq x_2$. Како је

$$x_2 - x_3 = \cos x_1 - \cos x_2 = -2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\sin\frac{x_1 + x_2}{2},$$

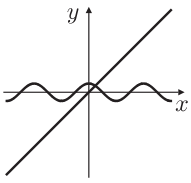
добијамо

$$|x_2 - x_3| \leqslant 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| < 2\frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2|,$$

где смо искористили познату неједнакост $|\sin\alpha| < \alpha$ за $\alpha \neq 0$. Сличним закључивањем добијамо

$$|x_1 - x_2| \leqslant |x_n - x_1| \leqslant \cdots \leqslant |x_2 - x_3| < |x_1 - x_2|,$$

тј. $|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$, што је очигледна контрадикција. Према томе, решавање система се своди на решавање једначине $\cos x = x$. Посматрајући графике функција $y = \cos x$ и $y = x$ (слика 2.78), закључујемо да та једначина има јединствено решење $x_0$. Нумеричким методама добија се његова приближна вредност $x_0 \approx 0{,}739$. Једино решење датог система је уређења $n$-торка $(x_0, x_0, \ldots, x_0)$.




Слика 2.78.

**407**. Доказаћемо да поменута нумерација места за столом постоји ако и само ако је $n$ паран број.

Ако је $n = 2k$ произвољан паран број, могуће је да поступимо на следећи начин: одаберемо на произвољан начин једно место за столом и нумеришемо га бројем $2k$; затим наредних $k-1$ места, идући у смеру казаљке на сату, нумеришемо, редом, свим парним бројевима из одговарајућег интервала $(2, 2k-2)$, тј. бројевима $(2, \ldots, 2k-2)$ и на крају преосталих $k$ места свим непарним бројевима, редом $(1, \ldots, 2k-1)$. Сада, ако конобар прво услужи госта на месту 1, поштујући установљено правило он ће услужити све присутне госте. Наиме, лако се проверава да ће конобар након госта који седи на непарном месту $i$ услужити госта на парном месту $2k-i-1$, а затим оног госта који је на непарном месту $i+2$. Према томе, редослед узлуживања гостију је следећи: $1, 2k-2, 3, 2k-4, 5, 2k-6, \ldots, 2k$.

С друге стране, ако је $n$ непаран број, $n = 2k+1$, не постоји нумерација места за столом тако да ће сви гости бити услужени, без обзира од ког госта конобар крене. Претпоставимо супротно, и нека је редослед редних бројева седишта гостију који су услужени $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$. Тада мора бити $x_{2k+1} = 2k+1$, јер би се у супротном $(x_{2k+1} < 2k+1)$ конобар вратио опет на исто место, код госта чији је редни број места за столом $x_{2k+1}$, и гост који заиста седи на месту $2k+1$ остао би неуслужен. Одатле следи да је сума

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k} = 1 + 2 + \cdots + 2k = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$

дељива са $2k+1$. Ово значи да ће се конобар, након услуживања првих $2k$ гостију, вратити на своју стартну позицију, и гост који седи на месту $2k+1$ би опет остао неуслужен.

**408**. Докажимо методом математичке индукције по $k$ да се сваки разломак $\frac{k}{n}$, где је $(k, n) = 1$ и $k < n$, може приказати у облику

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_s},$$

где је $n_1 < n_2 < \cdots < n_s$ и $n_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, s$.

За $k = 1$ нема се шта доказивати. Узмимо да је $k > 1$. Нека су $q$ и $r$ количник и остатак при дељењу $n$ са $k$, тј. нека је $n = qk + r$, где је $0 \leqslant r < k$. Због $(k, n) = 1$ је $r > 0$. Сада је

$$\frac{k}{n} - \frac{1}{q+1} = \frac{(q+1)k - n}{n(q+1)} = \frac{k-r}{n(q+1)}. \tag{2.85}$$

Како је $k - r < k$, то се по индуктивној претпоставци број $\frac{k-r}{n(q+1)}$ може написати у облику

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_j} = \frac{k-r}{n(q+1)}. \tag{2.86}$$

Због $k - r < k < n$ мора бити $n_i > q + 1$ за $i = 1, \ldots, j$. Комбинујући (2.85) и (2.86) добија се тражени приказ

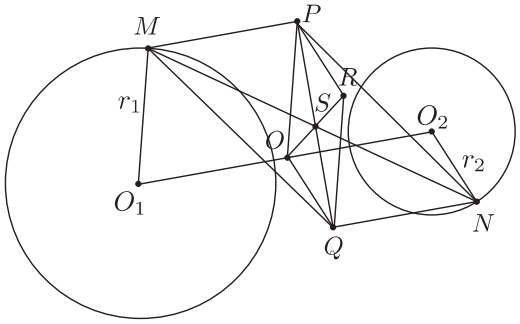
$$\frac{k}{n} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_j}.$$

На овај начин је тврђење доказано.

**409**. Означимо са $r_1$ и $r_2$ полупречнике кругова и нека је, без умањења општости, $r_1 \geqslant r_2$. Нека је тачка $O$ средиште дужи $O_1O_2$, а $P$ и $Q$ тачке такве да су четвороуглови $OO_1MP$ и $OO_2NQ$ паралелограми (слика 2.79). Тада су дужи $MP$ и $NQ$ паралелне и једнаке половини дужи $O_1O_2$, па је четвороугао $MQNP$ паралелограм. Дакле, пресек $S$ дијагонала $MN$ и $PQ$ је уједно и њихово средиште. Нека је $R$ тачка таква да је $S$ средиште дужи $OR$. Тада је четвороугао $OPRQ$ паралелограм. Сада имамо $OP = r_1$, $PR = OQ = r_2$, па из троугла $OPR$ добијамо неједнакости $OR \geqslant OP - PR$ и $OR \leqslant OP + PR$, односно $2OS \geqslant r_1 - r_2$ и $2OS \leqslant r_1 + r_2$. Одавде је

$$\frac{1}{2}(r_1 - r_2) \leqslant OS \leqslant \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Очигледно је да за сваку тачку $S$ која задовољава ове услове можемо наћи тачке $M \in k_1$ и $N \in k_2$ такве да је $S$ средиште дужи $MN$, и то конструишући прво паралелограм $OPRQ$ чије су странице $r_1$ и $r_2$.




Слика 2.79.

Дакле, за $r_1 \neq r_2$ тражена фигура је кружни прстен одређен круговима са центром $O$ и полупречницима $\frac{1}{2}|r_1 - r_2|$ и $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, док ће за $r_1 = r_2$ то бити само круг са центром $O$, полупречника $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

**410**. Ако је $p(a_i) = 0$ за неко $i$, тврђење задатка је очигледно, па зато претпоставимо да су сви $p(a_i)$ различити од 0 и међусобно различити. Постоје цели бројеви $s$ и $t$ такви да $s \mid p(a_1)$, $t \mid p(a_2)$, $st = \mathrm{nzs}(p(a_1), p(a_2))$ и $(s, t) = 1$. Како су $s$ и $t$ узајамно прости, постоје цели бројеви $m$ и $n$ такви да је $a_1 + sn = a_2 + tm =: b_2$. Очигледно $s \mid (p(a_1 + sn) - p(a_1))$ и $t \mid (p(a_2 + tm) - p(a_2))$, па $st \mid p(b_2)$. На сличан начин

добијамо $b_3$ такво да $p(a_3) \mid p(b_3)$ и $p(b_2) \mid p(b_3)$, одакле имамо и $p(a_1) \mid p(b_3)$ и $p(a_2) \mid p(b_3)$. Резонујући на исти начин добијамо индуктивно егзистенцију $a = b_k$ за свако $k$.

Полином $p(x) = 2x^2 + 2$ показује да тврђење (б) није тачно, пошто је $p(0) = 2$, $p(1) = 4$, а $p(a)$ није дељиво са 8 ни за један цео број $a$.

**411**. Тврђење је очигледно тачно у случају две планете. Претпоставимо да су полупречници планета јединични и нека су $O_1, \ldots, O_n$ центри планета. Довољно је показати да за сваки јединични вектор $\overrightarrow{a}$ постоји јединствена тачка $X$ на некој планети $i$, таква да је $\overrightarrow{O_iX} = \overrightarrow{a}$ и са које се не види ниједна од преосталих планета. Докажимо прво јединственост тачке $X$. Претпоставимо да је $\overrightarrow{O_iX} = \overrightarrow{O_jY}$ и да се из тачака $X$ и $Y$ не види ниједна друга планета. Али већ смо размотрили случај две планете: ако планета $j$ није видљива из тачке $X$, тада је планета $i$ видљива из тачке $Y$. Контрадикција! Докажимо сада егзистенцију тачке $X$. Уведимо координатни систем са осом $Ox$ у правцу вектора $\overrightarrow{a}$. Тада за тачку $X$ можемо узети тачку са неке од планета са највећом $x$ координатом.

**412**. За $a = b = c$ добијамо

$$ra^2 + (3 - r)\frac{1}{a} \geqslant 3,$$

односно $(a - 1)(r(a^2 + a + 1) - 3) \geqslant 0$ за сваки позитиван реалан број $a$. Одатле лако следи да је једина могућност $r = 1$. Нека је зато надаље $r = 1$. Дата неједнакост је еквивалентна наредној

$$\frac{2 + abc}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

На основу неједнакости између геометријске и хармонијске средине за позитивне бројеве $a, b, c$ имамо

$$\sqrt[3]{abc} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

одакле видимо да је довољно показати $\dfrac{2 + x^3}{3} \geqslant x$, при чему је $x = \sqrt[3]{abc} > 0$. Последња неједнакост је еквивалентна са $(x - 1)^2(x + 2) \geqslant 0$, што је очигледно увек тачно.

**413**. Нека је, без умањења општости, $AC = 1$ и означимо $\sphericalangle ABC = \beta$. Нека је $C_1$ симетрична тачка тачки $C$ у односу на $A$. Тада је $\sphericalangle CC_1B = 15°$. Тачка $B$ је пресечна тачка полуправе $b$ кроз $C_1$ такве да је оријентисани $\sphericalangle bC_1C = 15°$ и геометријског места тачака из којих се дуж $AC$ види под углом $\beta$. Дакле, тај пресек постоји, само се поставља питање у ком случају је вредност угла $\beta$ највећа могућа. Јасно је да је то у екстремном случају када поменуто геометријско место тачака, које је део круга, додирује полуправу $b$. Из потенције тачке $C_1$ имамо $C_1B^2 = C_1A \cdot C_1C$, тј. $C_1B = \sqrt{2}$. Како је

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

на основу косинусне теореме налазимо $AB = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ и $BC = \sqrt{3}-1$, одакле лако налазимо (опет на основу косинусне теореме на пример) да је $\beta = 105^\circ$, док су углови код темена $A$ и $C$, редом, $45^\circ$ и $30^\circ$.

**414**. Нека је $\dfrac{a^2(b-a)}{a+b} = p^2$ за неки прост број $p$. Тада је $b = \dfrac{a(a^2+p^2)}{a^2-p^2} \in \mathbb{N}$. Ако је $(a,p) = 1$, тада $(a^2+p^2, a^2-p^2) \mid 2$ и $(a^2-p^2, a) = 1$, одакле следи да $b$ није природан број јер је $a^2-p^2 > 2$. Зато нека је $a = kp$ за неки природан број $k$. Тада је

$$b = \frac{kp \cdot p^2(k^2+1)}{p^2(k^2-1)} = \frac{kp(k^2+1)}{k^2-1}.$$

Следи да $(k^2-1, k^2+1) \mid 2$ и $(k^2-1, k) = 1$, што даје $k^2-1 \mid 2p$, односно $k^2-1 \in \{1, 2, p, 2p\}$. Имамо 4 случаја:

- $k^2-1 = 1$, тј. $k^2 = 2$, што нема решења;
- $k^2-1 = 2$, тј. $k^2 = 3$, што нема решења;
- $k^2-1 = p$, тј. $(k-1)(k+1) = p$, одакле имамо да је $k = 2$ и $p = 3$, па је $a = kp = 6$, а $b = 10$;
- $k^2-1 = 2p$, тј. $(k-1)(k+1) = 2p$, а пошто су $k-1$ и $k+1$ исте парности и десна страна је паран број, то су $k-1$ и $k+1$ узастопни парни бројеви, па је лева страна дељива са $8$, а десна није, односно у овом случају нема решења.

Једино решење је $(a,b) = (6,10)$.

**415**. Очигледна решења су константне функције $f(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 1$ за све $x \in \mathbb{R}$, као и идентичка функција $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{R}$. За $x = 0$ и $y = t-1$ из дате једначине добијамо да је $f(f(0)) = f(0)f(t)$ за све $t \in \mathbb{R}$. Размотримо следећа два случаја.

1° $f(0) \neq 0$. Тада за свако $t \in \mathbb{R}$ важи $f(t) = \dfrac{f(f(0))}{f(0)} \equiv k$. За $t = 0$ добијамо $f(0)^2 = f(f(0))$, односно $k^2 = k$. Ако је $k = 0$, имамо $f(0) = 0$, што је контрадикција. Дакле, мора бити $k = 1$ и тада добијамо решење $f(x) \equiv 1$.

2° $f(0) = 0$. Сада опет разматрамо два случаја.

- $f(x) = 0$ ако и само ако је $x = 0$. За $y = -1$ из једначине добијамо $f(f(x)-x) = f(x)f(0) = 0$, па је $f(x)-x = 0$, односно $f(x) = x$ за сваки реалан број $x$.
- Постоји реалан број $x_0 \neq 0$ такав да је $f(x_0) = 0$. Тада, за $x = x_0$ и $y = \dfrac{t}{x_0}$ за произвољно $t \in \mathbb{R}$ добијамо

$$f\left(f(x_0) + x_0 \cdot \frac{t}{x_0}\right) = f(x_0) f\left(\frac{t}{x_0} + 1\right) = 0,$$

па је $f(t) = 0$. У овом случају решење је функција $f(x) = 0$ за све $x \in \mathbb{R}$.

Дакле, једина решења су функције $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$ и $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

**416**. Тачке $P$ и $N$, односно $K$ и $T$ су симетричне у односу на праву $CL$, па су и кружнице $k_1$ и $k_2$ симетричне у односу на праву $CL$. Према томе, друга пресечна тачка ових кружница (различита од $L$) налази се на правој $CL$. Нека је $X$ друга пресечна тачка кружнице $k_3$ и праве $CL$. Довољно је показати да важи $CL \cdot CX = CP \cdot CK$ (потенција тачке $C$) да бисмо закључили да тачка $X$ лежи на $k_1$, односно $k_2$. Како је $CL \cdot LX = ML \cdot LQ$ и $CL^2 = ab - AL \cdot BL$, добијамо

$$\begin{aligned} CL \cdot CX = CP \cdot CK &\Leftrightarrow CL(CL + LX) = (p-c)p \\ &\Leftrightarrow CL^2 + ML \cdot LQ = (p-c)p \\ &\Leftrightarrow CL^2 + (LA - (p-a))(LB - (p-a)) = (p-c)p \\ &\Leftrightarrow ab - cp + ac + p^2 - 2ap + a^2 = p^2 - pc \\ &\Leftrightarrow a(a+b+c) = 2ap, \end{aligned}$$

што је очигледно тачно. У претходном низу еквиваленција користили смо основне формуле за дужине одсечака које уписана и споља приписана кружница одсецају на страницама.

**417**. Посматрајмо дијагоналу дате квадратне мреже. За свако теме $A$ са те дијагонале уочимо једну од крајњих тачака дијагонале која је даља од $A$ и означимо ту тачку са $B$. Ако бубамара обиђе квадрат чија је дијагонала $AB$ за свако теме $A$, она ће обићи укупно 48 квадрата (24 са сваке дијагонале) и очигледно је да ће сваку ивицу мреже прећи бар једном. Да бисмо показали да је 48 минимални број квадрата, посматрајмо ивице мреже које имају тачно једну заједничку тачку са ивичним квадратом $25 \times 25$. Таквих ивица има $4 \cdot 24 = 96$ и сваки квадрат садржи највише две такве ивице, па је потребно обићи бар $96 : 2 = 48$ квадрата.

**418**. Означимо са $k = [\sqrt{n}]$.

(а) Једноставан пример *генеришућег* подскупа је

$$\left\{1, 2, \ldots, k-1, k, 2k, 3k, \ldots, \left[\frac{n}{k}\right]k, n\right\}$$

и он садржи $k + \left[\dfrac{n}{k}\right] \leqslant 2[\sqrt{n}] + 1$ елемената.

(б) Претпоставимо да је $m \in \mathbb{N}$ и $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ *генеришући* подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$, при чему је $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leqslant n$. За дати природан број $r$, посматрајмо разлике облика $x_i - x_j$, где је $1 \leqslant i - j \leqslant r$. Преосталих $\dfrac{(m-r)(m-r-1)}{2}$ разлика покривају највише исто толико бројева из скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, па посматраних $\dfrac{m(m-1) - (m-r)(m-r-1)}{2}$ разлика покривају бар

$$N = n - 1 - \frac{(m-r)(m-r-1)}{2}$$

разлика. Сума $S$ свих разлика облика $x_i - x_j$ за $1 \leqslant i - j \leqslant r$ је

$$S = r(x_m - x_1) + (r-1)(x_{m-1} - x_2) + \cdots + (x_{m-r+1} - x_r) \leqslant \binom{r}{2}(n-1).$$

С друге стране, према претходном разматрању ова сума није мања од

$$1 + 2 + \cdots + N > \frac{N^2}{2} \geqslant \frac{1}{2}\left(n - 1 - \frac{(m-r)^2}{2}\right)^2.$$

Следи да је

$$r^2(n-1) > 2\binom{r}{2}(n-1) \geqslant \left(n - 1 - \frac{(m-r)^2}{2}\right)^2,$$

одакле коренованьем и множењем са 2 добијамо $2r\sqrt{n-1} > 2n - 2 - (m-r)^2$. Последња неједнакост је еквивалентна са

$$(m - r - \sqrt{n-1})^2 > 3n - 3 - 2m\sqrt{n-1}. \tag{2.87}$$

Како ова неједнакост мора да важи за свако $r = 1, 2, \ldots, n-1$, можемо одабрати $r$ тако да лева страна у (2.87) буде мања од 1. Тада (2.87) постаје $3n - 4 \leqslant 2m\sqrt{n-1}$, тј.

$$m \geqslant \frac{3n-4}{2\sqrt{n-1}} > \frac{3}{2}\sqrt{n} - 1.$$

Добијена доња граница за $m$ је за довољно велико $n$ већа од $\sqrt{2n} + 2010$. Према томе, одговор на овај део задатка је негативан.

**419**. Доказаћемо прво да у сваком троуглу важи

$$\frac{h_a}{l_a^2} + \frac{h_b}{l_b^2} + \frac{h_c}{l_c^2} = \frac{R+2r}{2Rr},$$

где су $h_a, h_b, h_c$ одговарајуће висине.

Ако са $S$ обележимо површину, а са $p$ полуобим троугла, тада из основних образаца

$$\frac{h_a}{l_a} = \cos\frac{\beta-\gamma}{2}, \quad ah_a = 2S = pr, \quad a = 2R\sin\alpha$$

добијамо

$$\begin{aligned}\frac{h_a}{l_a^2} &= \left(\frac{h_a}{l_a}\right)^2 \cdot \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2pr}\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{R\sin\alpha\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{pr} \\ &= \frac{R}{2pr}\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)\right),\end{aligned}$$

па је

$$L=\frac{h_a}{l_a^2}+\frac{h_b}{l_b^2}+\frac{h_c}{l_c^2}=\frac{R}{2pr}\big[(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)+(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)\big].$$

Користећи и идентите који важе за углове троугла

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma&=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{p}{R},\\ 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}&=\frac{r}{R},\\ \sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma&=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ &=32\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\end{aligned}$$

добијамо $L=\dfrac{R}{2pr}\cdot\dfrac{p}{R}\left(1+2\dfrac{r}{R}\right)=\dfrac{R+2r}{2Rr}$.

Према неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског је

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\sqrt{h_a}}{l_a}\cdot\frac{1}{\sqrt{h_a}}+\frac{\sqrt{h_b}}{l_b}\cdot\frac{1}{\sqrt{h_b}}+\frac{\sqrt{h_c}}{l_c}\cdot\frac{1}{\sqrt{h_c}}\right)^2\\ &\leqslant\left(\frac{h_a}{l_a^2}+\frac{h_b}{l_b^2}+\frac{h_c}{l_c^2}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right),\end{aligned}$$

одакле, заједно са претходним једнакостима и

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{1}{r},$$

следи

$$\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)^2\leqslant\frac{R+2r}{2Rr}\cdot\frac{1}{r}$$

и, коначно,

$$\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\leqslant\frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{r}{R}}.$$

**420**. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине за бројеве $A$, $A$ и $H$ имамо

$$\frac{A+A+H}{3}\geqslant\sqrt[3]{A^2H}. \tag{2.88}$$

Како је

$$\begin{aligned}A^2H\geqslant G^3&\Leftrightarrow\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\frac{3abc}{ab+bc+ca}\geqslant abc\\ &\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca\\ &\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

што је тачно, из (2.88) добијамо тражену неједнакост $2A+H\geqslant 3G$.

**421**. Посматрајмо тачку $O$ која је центар описаног круга овог многоугла. Јасно је да средишта свих дијагонала (или страница) исте дужине леже на кругу са центром у $O$. Оваквих кругова има 1005 и јасно је да ће круг са највише тачака бити или један од ових или ће садржати највише две тачке са сваког од њих, тј. укупно $2 \cdot 1005 = 2010$ тачака. Како сваки од кругова са центром у $O$ садржи највише 2010 тачака, а круг који садржи средишта садржи тачно 2010 тачака, то је тражени број 2010.

**422**. Посматрајмо прво случај када је $k = 2r - 1$ непаран број. Означимо непразан низ узастопних јединица са $J$, а непразан низ узастопних нула са $N$. Тада из услова задатка следи да се низ нула и јединица може представити као $JNJN \ldots JN$ или $NJNJ \ldots NJ$, при чему у оба случаја има $r$ парова. Дакле $m$ јединица треба распоредити на $r$ места тако да на сваком буде бар једна јединица, што се може учинити на $\binom{m-1}{r-1} = \binom{m-1}{m-r}$ начина. Слично, за $n$ нула постоји $\binom{n-1}{r-1} = \binom{n-1}{n-r}$ начина. Зато је укупан број низова

$$2\binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{r-1}.$$

За паран број $k = 2r$ слично се добија да је тражени број низова

$$\binom{m-1}{r}\binom{n-1}{r-1} + \binom{m-1}{r-1}\binom{n-1}{r}.$$

**423**. Ако је $E$ пресечна тачка симетрале $\sphericalangle BAC$ и $BC$, тада је $BA : CA = BE : CE$. Одавде је $BC = CE\dfrac{AB + AC}{AC}$, одакле је $CE = \dfrac{1}{2}AC = CN$. Слично је и $BE = \dfrac{1}{2}AB = CM$. Према томе, троуглови $CNE$ и $BME$ су једнакокраки, па су симетрале $\sphericalangle MBE$ и $\sphericalangle NCE$ уједно и симетрале дужи $ME$ и $NE$. Зато је њихов пресек, тачка $S$, центар описаног круга троугла $MNE$, па припада и симетрали дужи $MN$. Међутим, $S$ је уједно и центар уписаног круга троугла $ABC$, па се налази на симетрали $\sphericalangle CAB$, тј. $\sphericalangle MAN$. Како се симетрала унутрашњег угла и симетрала наспрамне странице у троуглу секу у тачки која припада описаном кругу троугла, то се $S$ налази на кругу $\ell$.

**424**. Доказаћемо да такав број не постоји. Претпоставимо супротно и нека је $\overline{a_1 \ldots a_{30}}$ његов децимални запис. Тада за $1 \leqslant i \leqslant 25$ имамо

$$\begin{aligned} 4a_i - a_{i+5} &\equiv 10^5 a_i - a_{i+5} = 10\overline{a_i \ldots a_{i+4}} - \overline{a_{i+1} \ldots a_{i+5}} \\ &\equiv 0 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Дакле, сваки од чланова низа $a_1, a_6, a_{11}, a_{16}, a_{21}, a_{26}$ даје исти остатак као четвороструки претходни члан при дељењу са 13. Они представљају 6 узастопних чланова једног од низова $1, 4, 3, 12, 9, 10, 1, 4, 3, \ldots$; $2, 8, 6, 11, 5, 7, 2, 8, 6, \ldots$; $0, 0, 0, \ldots$. Било којих 6 узастопних чланова прва два низа садржи неки од бројева 10, 11 или 12. Како то нису цифре, $a_1, a_6, a_{11}, a_{16}, a_{21}, a_{26}$ морају бити узастопни чланови трећег низа. Међутим, то је очигледна контрадикција због $a_1 \neq 0$.

**425**. Посматрајмо комплексан број $(1+i\sqrt{3})^{2011}$. Из биномне формуле и једнакости

$$i^n \equiv \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 4, \\ i, & n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & n \equiv 2 \pmod 4, \\ -i, & n \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

имамо

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^{2011} =& \sum_{i=0}^{2011} \binom{2011}{i} (i\sqrt{3})^{2011-i} \\ =&(i\sqrt{3})^{2011} + \binom{2011}{1}(i\sqrt{3})^{2010} + \binom{2011}{2}(i\sqrt{3})^{2009} \\ &+ \cdots + \binom{2011}{2009}(i\sqrt{3})^2 + \binom{2011}{2010} i\sqrt{3} + 1 \\ =& -\left(\binom{2011}{1}3^{1005} - \binom{2011}{3}3^{1004} + \cdots + \binom{2011}{2009}3^1 - \binom{2011}{2011}\right) \\ &- \sqrt{3}i\left(3^{1005} - \binom{2011}{2}3^{1004} + \cdots + \binom{2011}{2008}3^1 - \binom{2011}{2010}\right).\end{aligned}$$

Следи

$$\binom{2011}{1}3^{1005} - \binom{2011}{3}3^{1004} + \cdots + \binom{2011}{2009}3^1 - \binom{2011}{2011} = -\operatorname{Re}(1+i\sqrt{3})^{2011}.$$

Користећи идентитет $\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -1$, добијамо коначан резултат $-2^{2010}$.

**426**. Како је $x_1 = x_2^2 + x_2$ и $x_2^2 + bx_2 + c = 0$, из Виетових формула добијамо систем

$$\begin{aligned} x_1 + (b-1)x_2 =& -c, \\ x_1 + x_2 =& -b, \\ x_1x_2 =& c, \end{aligned}$$

одакле лако следи $c^2 + 4(1-b)c + b^3 - b^2 = 0, b \neq 2$. Ово је квадратна једначина по целобројној променљивој $c$, па њена дискриминанта

$$D = 16(1-b)^2 - 4(b^3 - b^2) = 4(1-b)(b-2)^2$$

мора бити потпун квадрат. То ће бити задовољено ако је $b = 2$ или ако је $1 - b = k^2$, за неки цео број $k$. Из класе решења $(b, c) = (1-k^2, k(k-1)^2)$ издвајамо она када су $b$ и $c$ узајамно прости. Према томе, $k - 1 = \pm 1$, тј. $k = 0$ или $k = 2$. Једина решења су $(b, c) \in \{(-3, 2), (1, 0)\}$.

**427**. Нека је $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA} = \lambda$. Тада је

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GM} &= \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{GA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{GB},\\ \overrightarrow{GN} &= \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{GB} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{GC},\\ \overrightarrow{GP} &= \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{GC} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{GA}.\end{aligned}$$

Сада је

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GA})\\ &= \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0},\end{aligned}$$

одакле следи да је $G$ уједно и тежиште троугла $G_1G_2G_3$. Због тога важи $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DG_1}+\overrightarrow{DG_2}+\overrightarrow{DG_3}$. Сада се прва неједнакост добија примењујући неједнакост троугла на векторе $\overrightarrow{DG_1}, \overrightarrow{DG_2}, \overrightarrow{DG_3}$ (важи строга неједнакост јер вектори нису колинеарни). Слично, сабирањем неједнакости

$$\begin{aligned}DG_1 = |\overrightarrow{DG_1}| &= \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3(\lambda+1)}\overrightarrow{DC}\right|\\ &< \frac{2}{3}DA + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}DB + \frac{1}{3(\lambda+1)}DC,\\ DG_2 &< \frac{2}{3}DB + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}DC + \frac{1}{3(\lambda+1)}DA,\\ DG_3 &< \frac{2}{3}DC + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}DA + \frac{1}{3(\lambda+1)}DB,\end{aligned}$$

добијамо другу неједнакост тврђења.

**428**. Нека је $a = \ell^2$, за неки природан број $\ell$. За $c = 2\ell + b \in \mathbb{N}$, добијамо $a + bc = (b+\ell)^2$, што јесте потпун квадрат.

Обрнуто, нека $a$ није потпун квадрат. Тада постоји прост број $p$ такав да је $a$ дељив са $p^{2k-1}$, а није дељив са $p^{2k}$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Ако одаберемо $b = p^{2k}$, постоји неки природан број $c$ такав да је $a + bc = m^2$ потпун квадрат. Очигледно $p^{2k-1}|m^2$, па мора и $p^k \mid m$, односно $p^{2k} \mid m^2$. Како $p^{2k} \mid bc$, закључујемо да $p^{2k} \mid a$, што је контрадикција.

**429**. Приметимо да ако је неко $\alpha$ решење дате једначине, тада је $\pi - \alpha$ такође решење. Значи, једине могућности да би $\alpha_0 \in [0, \pi)$ било јединствено решење су $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Коришћењем идентитета за трансформисање производа у збир добијамо $(\cos 2x - \cos 6x) - (\cos 2x - \cos 4x) = 2a$, односно $\cos 4x - \cos 6x = 2a$. Ако означимо $t = \cos 2x$ и применимо формуле за тригонометријске функције двоструког

и троструког аргумента, једначина постаје $(2t^2-1)-(4t^3-3t)=2a$ и након сређивања $4t^3-2t^2-3t+2a+1=0$.

Заменом $x=0$ добијамо $a=0$. Међутим, за $a=0$ једначина $(t-1)(4t^2+2t+1)=0$ има, поред решења $t=1=\cos 0$, још два реална решења из интервала $(-1,1)$, па $x=0$ није јединствено решење.

Заменом $x=\dfrac{\pi}{2}$ добијамо $a=1$ и једначину $(t+1)(4t^2-6t+3)=0$, која има јединствено реално решење $t=-1=\cos\pi$.

Дакле, $a=1$ је једино решење задатка.

**430**. Одговор је: $n\equiv 0 \pmod 3$ или $n\equiv 2 \pmod 3$. Докажимо прво индукцијом да је за овакве $n$ могуће обрнути све новчиће. Под троуглом подразумевамо три међусобно суседна новчића. За $n=2$ је очигледно, док за $n=3$ само обрнемо сва 4 троугла. За $n\equiv 0 \pmod 3$ и $n\equiv 2 \pmod 3$, $n>3$, опет обрнемо све могуће троуглове. Тиме су новчићи у ћошковима обрнути једном, а новчићи са руба, не рачунајући ћошкове, су сви обрнути 3 пута. Према томе, сви новчићи са руба су сада окренути на страну где је глава. Унутрашњи новчићи су окренути 6 пута, тако да су и даље на страни где је писмо. Они чине једнакостраничан троугао странице $n-3$, па се према индуктивној претпоставци сви могу окренути на страну где је глава.

Нека је сада $n\equiv 1 \pmod 3$. Обојимо стране новчића на којима је писмо у 3 боје: црвену, белу и плаву, тако да су суседни новчићи обојени различитим бојама и свака три суседна ночића у истом реду су такође разнобојна. Тада су новчићи у ћошковима обојени истом бојом, рецимо црвеном. Једноставним пребројавањем видимо да црвених новчића има за један више него плавих или белих. Према томе, бројеви црвених и белих новчића су различите парности. При сваком потезу може се десити или да се оба броја повећају за 1, или да се оба смање за 1, или да се један од њих повећа, а други смањи за 1. У сваком од три случаја парност бројева црвених и белих новчића остаје различита. Међутим, када би сви новчићи били окренути на страну где је глава, ови бројеви би били 0, односно исте парности. Контрадикција!

**431**. *Анализа.* Претпоставимо да тетивни четвороугао $ABCD$ задовољава услове задатка, тј. претпоставимо да важи $AB=a, BC=b, CD=c$ и $DA=d$, где су $a,b,c$ и $d$ дате дужи. Нека је $C_1$ тачка полуправе $BC$ таква да важи $BC_1=a$ и нека је $D_1$ пресечна тачка праве $BD$ и праве која садржи тачку $C_1$ и паралелна је правој $CD$. Из $\sphericalangle BCD=\sphericalangle BCD_1$ и $\sphericalangle DBC=\sphericalangle BC_1D_1$, следи да су троуглови $BCD$ и $BC_1D_1$ слични, па важи $BC:BC_1=CD:C_1D_1$, односно $b:a=c:C_1D_1$, тј. $C_1D_1=c\dfrac{a}{b}$. Нека је $D_2$ тачка таква да важи распоред $D-A-D_2$ и $AD_2=C_1D_1=c\dfrac{a}{b}$. Четвороугао $ABCD$ је тетиван, па је $\sphericalangle BAD+\sphericalangle BCD=180^\circ$, одакле следи $\sphericalangle D_2AB=180^\circ-\sphericalangle BAD=\sphericalangle BCD=\sphericalangle BC_1D_1$. Из $\sphericalangle D_2AB=\sphericalangle BC_1D_1$, $AD_2=C_1D_1$ и $BA=BC_1$ следи да су троуглови $BAD_2$ и $BC_1D_1$ подударни и $BD_2=BD_1$. Важи $\dfrac{BD_2}{BD}=\dfrac{BD_1}{BD}=\dfrac{BC_1}{BC}=\dfrac{a}{b}$. Дакле, тачка $B$ припада скупу тачака за које је однос растојања од тачака $D_2$ и $D$ једнак односу дужина $a$ и $b$ (тај скуп је права ако је $a=b$ и Аполонијев круг у случају $a\neq b$). Тачка $B$ је, дакле, пресечна тачка тог скупа тачака и круга са

средиштем $A$ и полупречником $a$. Тачка $C$ је пресечна тачка круга са средиштем $D$ и полупречником $c$ и круга са средиштем $B$ и полупречником $b$.

*Конструкција.* Конструишимо дуж подударну датој дужи $d$ и означимо њена темена са $A$ и $D$. Конструишимо тачку $D_2$ такву да важи $D - A - D_2$ и $AD_2 = c\dfrac{a}{b}$. Конструишимо (помоћна конструкција коју сматрамо познатом) скуп тачака за које је однос растојања од тачака $D_2$ и $D$ једнак односу дужина $a$ и $b$ (права ако је $a = b$ и Аполонијев круг у случају $a \neq b$). Означимо са $B$ пресечну тачку тог скупа и круга са средиштем $A$ и полупречником $a$. Означимо са $C$ пресечну тачку круга са средиштем $D$ и полупречником $c$ и круга са средиштем $B$ и полупречником $b$. Четвороугао $ABCD$ је тражени.

*Доказ.* На основу конструкције важи $AB = a, BC = b, CD = c$ и $DA = d$. Потребно је још доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван. Нека је $D_1$ тачка полуправе $BD$ таква да је $BD_1 = BD_2$ и нека је $C_1$ тачка полуправе $BC$ таква да је $BC_1 = a$. Из $\dfrac{BD_2}{BD} = \dfrac{BD_1}{BD} = \dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{BC_1}{BC} = \dfrac{a}{b}$ следи $\dfrac{BD_1}{BD} = \dfrac{BC_1}{BC}$, па су троуглови $BC_1D_1$ и $BCD$ слични и важи $\sphericalangle BC_1D_1 = \sphericalangle BCD$ и $BC : BC_1 = CD : C_1D_1$, односно $b : a = c : C_1D_1$, тј. $C_1D_1 = c\dfrac{a}{b}$. На основу конструкције је $AD_2 = c\dfrac{a}{b}$, па важи $C_1D_1 = AD_2$. Из $C_1D_1 = AD_2$, $BC_1 = a = BA$, $BD_1 = BD_2$ следи да су троуглови $BC_1D_1$ и $BAD_2$ подударни, одакле следи $\sphericalangle BC_1D_1 = \sphericalangle BAD_2$. Сада имамо $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD_2$. Због распореда важи $\sphericalangle BAD_2 + \sphericalangle BAD = 180^\circ$, па, како је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD_2$, важи и $\sphericalangle BCD + \sphericalangle BAD = 180^\circ$, што значи да је четвороугао $ABCD$ заиста тетиван.

*Дискусија.* Решење задатка постоји ако је дужина $BD$ (где су $B$ и $D$ тачке одређене као у конструкцији) мања од збира дужина $b$ и $c$ и ако се конструисани Аполонијев круг и круг са средиштем $A$ и полупречником $a$ секу. Тада за обе пресечне тачке постоје по два решења одређена двема пресечним тачкама круга са средиштем $D$ и полупречником $c$ и круга са средиштем $B$ и полупречником $b$ (једно од решења је самопресецајући четвороугао). Иначе, решење не постоји.

**432**. Приметимо да за произвољне целе бројеве $a$ и $b$ важи:

$$a^2 + b^2 \equiv \begin{cases} 1, 2, 5 \pmod 8, & a \equiv \pm 1 \pmod 4, \\ 0, 1, 4 \pmod 8, & a \equiv 0 \pmod 4, \\ 0, 4, 5 \pmod 8, & a \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

За $n = 3$ дати систем има решење $(x, y_1, y_2, y_3) = (-2, 0, 1, 0)$. Нека је сада $n = 4$ и претпоставимо да систем има целобројно решење $(x, y_1, y_2, y_3, y_4)$. Како бројеви $x+1, x+2, x+3, x+4$ чине потпун систем остатака по модулу 4, на основу претходног морало би да важи да је природан број $m = (x+1)^2 + y^2$ конгруентан у исто време са неким бројем из пресека скупова $\{1, 2, 5\}$, $\{0, 1, 4\}$, $\{0, 4, 5\}$ по модулу 8, што је контрадикција, јер је то празан скуп. Овим је доказано да поменути систем не може имати целобројна решења за $n \geqslant 4$, па је решење $n = 3$.

**433**. Функција $g_1 : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to (0, +\infty)$, задата са $g_1(x) = \operatorname{tg} x$ представља бијекцију. Слично, линеарне функције $g_2 : (0, +\infty) \to (2010, +\infty)$, $g_2(x) = x + 2010$ и

$g_3 : (0,1) \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right), g_3(x) = \frac{\pi}{2}x$, су бијективна пресликавања између одговарајућих отворених интервала. Дакле, функција $g$ дата са $g = g_2 \circ g_1 \circ g_3$ је бијекција (као композиција бијекција) интервала $(0,1)$ на интервал $(2010, +\infty)$. Остаје још да бијективно пресликамо сегмент $[0,1]$ на интервал $(0,1)$. Уочимо низ $(x_n)$: $x_0 = 0$, $x_n = \frac{1}{n}$ за $n \geqslant 1$. Функција $f : [0,1] \to (0,1)$, дата са

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+2}, & x = x_n, \\ x, & x \neq x_n, \end{cases}$$

која чланове низа $(x_n)$ „шифтује" за 2 места, а остале тачке оставља фиксним, представља бијекцију јер су 0 и 1 баш прва два члана низа $(x_n)$. Тражена бијекција $h : [0,1] \to (2010, +\infty)$ је $h = f \circ g$.

На сличан начин се успоставља бијекција између произвољна два интервала реалне осе (отворена, затворена, ограничена, неограничена).

**434**. Свакој од $\binom{n}{3}$ тројки становника одговара по један од преосталих $n-3$ суграђана против кога планирају заверу. Тада постоји $m$ тројки које планирају заверу против истог становника и важи $m \geqslant \frac{(n-1)(n-2)}{6}$. Претпоставимо да се укупно $k$ становника појављује у ових $m$ тројки. Тада очигледно важи $\binom{k}{3} \geqslant m$, одакле је $k^3 > k(k-1)(k-2) \geqslant 6m \geqslant (n-1)(n-2)$, тј. $k^3 > (n-1)(n-2)$. Дакле, постоји становник против кога је бар $\sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$ суграђана умешано у планирање завере.

**435**. Тражени бројеви су 1 и сви природни бројеви облика $2 + 2^k$, $k \geqslant 0$. Ако је $n = \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$, лако добијамо $n - 2 = (2b+1)\frac{a-b}{b(b+1)}$. Како су $b$ и $b+1$ узајамно прости са $2b+1$, десна страна претходне једнакости (а самим тим и $n-2$) представља цео број дељив непарним бројем $2b+1 > 3$.

Обрнуто, ако је $d > 1$ непарни делилац броја $n-2$, имамо $n \neq 1$, тј. $n \geqslant 2$, па је $n = dm + 2$, за неко $m \geqslant 0$. Дефинишимо $b = \frac{1}{2}(d-1)$ и $a = b(mb + m + 1)$. Очигледно су $a$ и $b$ природни бројеви који задовољавају $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} = n$.

**436**. Нека је $O$ центар кружнице $k$, а $B'$ тачка симетрична тачки $B$ у односу на пречник $MN$. Онда $B' \in k$ и важи $\sphericalangle B'AN = \sphericalangle BAN$, па је $\sphericalangle AB'B = 90^\circ - \sphericalangle BAN$. Како су тачке $C, A, B'$ колинеарне, то је $\sphericalangle COB = 2\sphericalangle AB'B = 180^\circ - 2\sphericalangle BAN$ (као централни угао над одговарајућим периферијским). Због $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAM$ је $\sphericalangle BAC = 180^\circ - 2\sphericalangle BAN$, из чега закључујемо да је $\sphericalangle COB = \sphericalangle BAC$, тј. да су тачке $B, C, O, A$ коцикличне.

Претпоставимо, без умањења општости, да важи распоред тачака $M - O - A - N$. Нека права $BC$ сече праву $MN$ у тачки $G$ (ове праве нису паралелне јер тачка $A$ није центар круга). Како је $AC > AB$ због $\sphericalangle ABC > \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB > \sphericalangle ACB$,

то је растојање тачке $C$ веће од растојања тачке $B$ од праве $MN$, па важи распоред $O-A-N-G$. Из потенције тачке $G$ у односу на кружницу која садржи тачке $B, C, O, A$ добијамо да је $GB \cdot GC = GA \cdot GO$, док из потенције тачке $G$ у односу на кружницу $k$ добијамо $GB \cdot GC = GM \cdot GN$, из чега следи $GA \cdot GO = GM \cdot GN$. Сада имамо $GO \cdot (GO - OA) = (GO - r)(GO + r) = GO^2 - r^2$, односно, $GO \cdot OA = r^2$, где је $r$ полупречник кружнице $k$. Одавде следи да је дуж $GO$ константне дужине. Према томе, тачка $G$ се не мења када тачка $B$ шета по кружници, чиме је доказ завршен.

**437**. Како је $-1 \leqslant a_i \leqslant 1$, то постоји јединствено $\varphi_i \in [0, \pi]$ тако да је $\cos\varphi_i = a_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Такође, због услова $-1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant 1$ важи $\pi \geqslant \varphi_1 \geqslant \varphi_2 \geqslant \cdots \geqslant \varphi_n \geqslant 0$. Тада је

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-a_i^2)(1-a_{i+1}^2)} &= \sqrt{(1-\cos^2\varphi_i)(1-\cos^2\varphi_{i+1})} = \sqrt{\sin^2\varphi_i \sin^2\varphi_{i+1}} \\ &= |\sin\varphi_i \sin\varphi_{i+1}| = \sin\varphi_i \sin\varphi_{i+1},\end{aligned}$$

јер је $\sin\varphi_i \geqslant 0$ за $\varphi_i \in [0, \pi]$. Израз који се појављује у суми постаје

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - a_i a_{i+1} - \sqrt{(1-a_i^2)(1-a_{i+1}^2)}} &= \sqrt{1 - \cos\varphi_i \cos\varphi_{i+1} - \sin\varphi_i \sin\varphi_{i+1}} \\ &= \sqrt{1 - \cos(\varphi_i - \varphi_{i+1})} \\ &= \sqrt{2\sin^2\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{2}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \left|\sin\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{2}\right| \\ &= \sqrt{2} \cdot \sin\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{2},\end{aligned}$$

јер је $0 \leqslant \dfrac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, па је $\sin\dfrac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{2} \geqslant 0$. Према томе, остаје да покажемо да је

$$\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \sin\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} + \cdots + \sin\frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{2} < \frac{\pi}{2} \tag{2.89}$$

за произвољне $0 \leqslant \varphi_n \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi$. Приметимо да за $x \geqslant 0$ важи $\sin x \leqslant x$. Ако су сви $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ међусобно једнаки, неједнакост тривијално важи. Иначе, важи строга неједнакост

$$\begin{aligned}&\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \sin\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} + \cdots + \sin\frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{2} \\ <&\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} + \cdots + \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{2} < \frac{\varphi_1 - \varphi_n}{2} \leqslant \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

чиме је неједнакост (2.89) доказана и доказ завршен.

**438**. Уведимо променљиве $x_0, x_1, \ldots, x_{199}$ и придружимо им вредност $+1$ или $-1$ у зависности од тога да ли је $(i+1)$-ви исечак већег круга (нпр. у смеру супротном од казаљке

на сату) обојен у црвено или у бело. Аналогно уводимо променљиве $y_1, y_2, \ldots, y_{199}$ за мањи круг. Оно што би заправо требало доказати је да је

$$S_j = \sum_{i=1}^{200} x_i y_{i+j} \geqslant 0$$

за неко $j = 0, \ldots, 199$ (индекс $i + j$ посматра се по модулу 200). Приметимо да је $y_0 + \cdots + y_{199} = 0$, па је

$$S_0 + \cdots + S_{199} = \sum_{i=0}^{199} x_i (y_0 + \cdots + y_{199}) = 0.$$

Дакле, $S_j \geqslant 0$ за неко $j = 0, \ldots, 199$, што је и требало доказати.

**439**. Докажимо да је за сваки природан број $n$ могуће наћи такав полином степена $n$ са $n$ реалних корена. Специјално, за $n = 2010$ добијамо тврђење задатка.

Ако је $\alpha$ нека реална нула полинома $p(x)$, тј. $p(\alpha) = 0$, онда је и $p(4\alpha - \alpha^2) = 0$. Покушајмо да одредимо реалне бројеве $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такве да је

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= 4\alpha_1 - \alpha_1^2, \\
\alpha_3 &= 4\alpha_2 - \alpha_2^2, \\
&\vdots \\
\alpha_n &= 4\alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}^2, \\
\alpha_1 &= 4\alpha_n - \alpha_n^2,
\end{aligned}$$

односно, уз смену $\beta_i = \dfrac{2 - \alpha_i}{2}, i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \beta_1^2 - 1, \\
\beta_3 &= \beta_2^2 - 1, \\
&\vdots \\
\beta_n &= \beta_{n-1}^2 - 1, \\
\beta_1 &= \beta_n^2 - 1.
\end{aligned}$$

Вођени формулом $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$, обележимо $\beta_1 = \cos\varphi$. Тада је $\beta_i = \cos 2^{i-1}\varphi$, $i = 1, \ldots, n+1$. Да би важило $\beta_{n+1} = \beta_1$, довољно је узети нпр. $\varphi = \dfrac{2\pi}{2^n - 1}$. Сада је

$$\alpha_i = 2 - 2\cos 2^{i-1}\varphi = 4\sin^2 2^{i-2}\varphi = 4\sin^2 \frac{2^{i-1}\pi}{2^n - 1}.$$

Лако се проверава да полином $p(x) = \prod_{i=1}^{n} \left( x - 4\sin^2 \dfrac{2^{i-1}\pi}{2^n - 1} \right)$ задовољава услове задатка.

**440**. Нека је $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{b}{c}$, $z = \dfrac{c}{a}$. По услову задатка је $xyz = 1$, $x + y + z = 4$ и $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = xy + yz + zx = 5$. Тада је

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3xyz \\ &= (x+y+z)((x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)) + 3xyz \\ &= 4(16 - 3\cdot 5) + 3 = 7. \end{aligned}$$

**441**. Како 17 дели $19^a - 2^a = p^b$, мора бити $p = 17$. Тада је

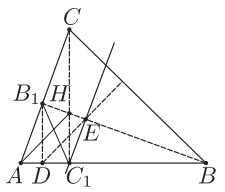
$$17^b = (19-2)(19^{a-1} + 2\cdot 19^{a-2} + 2^2\cdot 19^{a-3} + \cdots + 2^{a-1}),$$

односно

$$17^{b-1} = 19^{a-1} + 2\cdot 19^{a-2} + 2^2\cdot 19^{a-3} + \cdots + 2^{a-1}. \tag{2.90}$$

Посматрајући почетну једначину по модулу 9, добијамо да је $a \equiv 1 \pmod 6$. Очигледно је $a = 1$ ако и само ако је $b = 1$. Зато нека је надаље $a \geqslant 7$. Посматрајући једначину (2.90) по модулу 4, добијамо $1 = 3^{a-1} + 2\cdot 3^{a-2} \pmod 4$. Ово је немогуће због $a \equiv 1 \pmod 6$ (лева страна даје остатак 1, а десна 3 при дељењу са 4). Једино решење је тројка $(1, 1, 17)$.

**442**. Означимо са $H$ ортоцентар троугла $ABC$ (слика 2.80). Четвороугао $AB_1HC_1$ је тетиван јер има два наспрамна права угла, па имамо $\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle AHB_1 = 90^\circ - \sphericalangle HAC = \sphericalangle ACB$. Даље је $\sphericalangle DEB_1 = 90^\circ - \sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle ACB$, па добијамо $\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle ACB$ и тетивност четвороугла $B_1DC_1E$. Због тога важи $\sphericalangle C_1EB_1 = 180^\circ - \sphericalangle B_1DC_1 = 90^\circ$, па сада лако закључујемо да су праве $EC_1$ и $AC$ паралелне.




Слика 2.80.

**443**. Нека су $a_1, a_2, a_3$ цифре које је изабрао $A$, а $b_1, b_2, b_3$ цифре које је изабрао $B$. Добијени број је $x = \overline{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}$.

Нека је $M = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ и $N = \{1, 3, 7, 9\}$. Ако је $b_3 \in M$, број $x$ је дељив са 2 или 5. Стога играч $B$ не сме своју последњу цифру одабрати из скупа $M$. Зато играч $A$ бира своје прве две цифре из $N$, присиљавајући тиме играча $B$ да своје прве две цифре бира из $M$ (у супротном би $A$ могао потрошити последњу цифру из $N$ пре последњег потеза играча $B$, па би било $b_3 \in M$ и $A$ побеђује).

Играч $A$ мора постићи да број $x$ буде дељив са 3. Нека је $a_1 = 3, a_2 = 9$. Тада је $b_3 \equiv 1 \pmod 3$, јер из скупа $N$ преостају цифре 1 и 7. Број $x$ биће дељив са 3 ако је $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$ дељиво са 3. У зависности од одабира $b_1$ и $b_2$, имамо 3 могућности.

$(i)$ $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod 3$. Тада је $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 + 1 \pmod 3$. Играч $A$ може одабрати за $a_3$ једну од цифара 2, 5 или 8 (барем једна од њих је још неискоришћена).

$(ii)$ $b_1 + b_2 \equiv 1 \pmod 3$. Тада је $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 + 2 \pmod 3$. Сада играч $A$ може одабрати $a_3 = 1$.

$(iii)$ $b_1 + b_2 \equiv 2 \pmod 3$. Тада је $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 \pmod 3$. У овом случају играч $A$ бира $a_3 = 0$ или $a_3 = 6$. Барем једна од ових цифара је на располагању, јер да је играч $B$ одабрао обе, било би $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod 3$.

У сваком случају сума цифара биће дељива са 3, па ће и $x$ бити дељив са 3, а играч $A$ победник.

**444**. Уведимо смене $u = x - x^2 - a, v = 6a - 2x - x^2$. Приметимо да важи $10a - 2x - 4x^2 = 2(u + v)$, па неједначина постаје $\sqrt{u} + \sqrt{v} \leqslant \sqrt{2(u+v)}$. Квадрирањем добијамо еквивалентну неједначину $2\sqrt{u}\sqrt{v} \leqslant u + v$, која увек важи на области дефинисаности $u \geqslant 0, v \geqslant 0$. Према томе, почетна неједначина има јединствено решење ако и само ако систем неједначина

$$x^2 - x + a \leqslant 0,$$
$$x^2 + 2x - 6a \leqslant 0$$

има јединствено решење. Разликујемо следеће случајеве.

1° Једна од неједначина система има јединствено решење, које је уједно и решење друге неједначине.
Добијамо или $D_1 = 1 - 4a = 0$ и $a = \dfrac{1}{4}$, што јесте решење, или $D_2 = 1 + 6a = 0$ и $a = -\dfrac{1}{6}$, што није решење.

2° Једначине $x^2 - x + a = 0$ и $x^2 + 2x - 6a = 0$ имају оба реална корена, од којих је један заједнички.
Множењем прве са $-6$ и додавањем другој добијамо $7x^2 - 4x = 0$, одакле је $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{4}{7}$. За $x_1 = 0$ добијамо $a = 0$, док за $x_2 = \dfrac{4}{7}$ добијамо $a = \dfrac{12}{49}$. Директном провером закључујемо да је само прва вредност решење.

Дакле, једина решења су $a = 0$ и $a = \dfrac{1}{4}$.

**445**. Да би $\operatorname{tg}(x + y)$ и $\operatorname{tg}(x - y)$ били дефинисани, не сме бити $x \pm y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ни за једно $k \in \mathbb{Z}$. Слично, да би $\operatorname{ctg}(x+y)$ и $\operatorname{ctg}(x-y)$ били дефинисани, не сме бити $x \pm y = k\pi$

ни за једно $k \in \mathbb{Z}$. Одавде је $x \pm y \neq \dfrac{k\pi}{2}$ за све $k \in \mathbb{Z}$, односно $x \neq \pm y + \dfrac{k\pi}{2}$ за све $k \in \mathbb{Z}$.

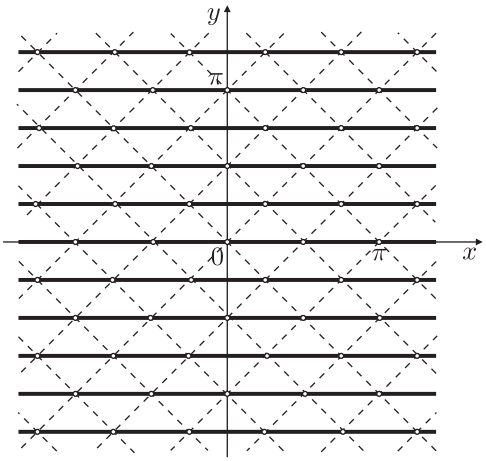
Користећи $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}(x+y)}$ и $\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}(x-y)}$, дату једначину трансформишемо у

$$\operatorname{tg}(x+y)(\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y)+1) = \operatorname{tg}(x-y)(\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y)+1).$$

Одавде следи $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}(x-y)$ или $\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y) = -1$. Из прве једначине следи $x+y = x-y+m\pi$, за $m \in \mathbb{Z}$, односно $y = \dfrac{m\pi}{2}$, за $m \in \mathbb{Z}$. Због почетних услова мора бити $x \neq \dfrac{\ell\pi}{2}$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Друга једначина је еквивалентна са

$$\operatorname{tg}(x+y) = -\operatorname{ctg}(x-y) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - (y-x)\right),$$

због чега је $x+y = \dfrac{\pi}{2} - y + x + m\pi$, за неко $m \in \mathbb{Z}$ и коначно $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{m\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$. Из почетних услова следи $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ell\pi}{2}$, за све $\ell \in \mathbb{Z}$. Решења дате једначине представљају унију добијених решења: $\left\{\left(x, \dfrac{\pi}{2}\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\ell\pi}{2} \,\middle|\, \ell \in \mathbb{Z}\right\}\right\} \cup \left\{\left(x, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ell\pi}{2} \,\middle|\, \ell \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$. Скуп решења дате једначине приказан је на слици 2.81.




Слика 2.81.

**446**. Означимо поље $i$-те врсте и $j$-те колоне са $(i,j)$. Тада сваки потез има облик $(i,k) \to (k,j)$. Доказаћемо тврђење за произвољну таблу $n \times n$, и то индукцијом по $n$. База је тривијална. Нека тврђење важи за све табле $n \times n$. Претпоставимо сада да се фигура налази на произвољном пољу табле $(n+1) \times (n+1)$ које, без умањења општости, припада горњој левој подтабли $n \times n$. Према индуктивној претпоставци, фигура може

у $n^2$ потеза обићи ту подтаблу. Модификујмо те потезе на следећи начин: за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ заменимо потез $(i, i) \to (i, a_i)$ са 3 потеза

$$(i, i) \to (i, n+1) \to (n+1, i) \to (i, a_i),$$

а потез $(n, n) \to (n, a_n)$ заменимо са 4 потеза

$$(n, n) \to (n, n+1) \to (n+1, n+1) \to (n+1, n) \to (n, a_n).$$

Остале потезе не мењамо. Нових потеза има $2(n-1)+3 = (n+1)^2 - n^2$ и њима је фигура обишла свако поље $(n+1)$-ве врсте и $(n+1)$-ве колоне, чиме је доказ завршен.

**447**. Одаберимо тачке $E$ и $F$ на ивицама $DA$ и $DC$ такве да је $DE = DF = 1$. Ако је $G$ подножје нормала из $E$ и $F$ на $BD$, тада је $\sphericalangle EGF = \varphi$. Означимо $GE = GF = x$ и $EF = y$, па добијамо $\sin\alpha = x, \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{y}{2}, \sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{y}{2x}$, одакле је

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Услов $\varphi = 2\alpha$ повлачи, користећи формуле за функције двоструког угла, једначину $4\sin^3\dfrac{\alpha}{2} - 4\sin\dfrac{\alpha}{2} + 1 = 0$, односно, након смене $t = \sin\dfrac{\alpha}{2}$,

$$4t^3 - 4t + 1 = 0. \tag{2.91}$$

Како је $0 < \varphi < \pi$, имамо $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ и $0 < t < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Према томе, довољно је показати да једначина (2.91) има тачно једно решење на интервалу $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Функција реалне променљиве $f(t) = 4t^3 - 4t + 1$ је полином трећег степена, па је непрекидна. Из $f(0) = 1 > 0$ и $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \sqrt{2} < 0$ добијамо да функција $f$ има бар једну нулу на интервалу $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. На основу $f(-2) = -23 < 0$ и $f(1) = 1 > 0$ закључујемо да функција $f$ има још по једну нулу на интервалима $(-2, 0)$ и $\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Како полином трећег степена може имати највише три реалне нуле, једначина (2.91) заиста има јединствено решење на $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, чиме је доказ завршен.

**448**. Придружимо сваком скупу $A_i$ бинарни низ дужине $n$ који на месту $\ell$ има 1 ако $\ell \in A_i$, односно 0 иначе. Формирајмо матрицу $k \times n$ чије су врсте ови бинарни низови придружени скуповима $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Због услова $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = S$ у свакој колони те матрице се налази бар једна јединица. Обрнуто, свака бинарна матрица $k \times n$ у чијој се свакој колони налази бар једна јединица одређује једну $k$-торку подскупова која задовољава услове задатка. Таквих матрица има $(2^k - 1)^n$, будући да сваку колону можемо независно одабрати на $2^k - 1$ начина (све осим $\underbrace{00\ldots0}_{k}$).

**449**. Приметимо прво да је $1+b-c=a+b+c+b-c=a+2b\geqslant 0$. Примењујући неједнакост између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{1+1+(1+b-c)}{3}\geqslant\sqrt[3]{1+b-c},$$

одакле је

$$a\sqrt[3]{1+b-c}\leqslant a\frac{1+1+(1+b-c)}{3}=a+\frac{ab-ac}{3}.$$

Слично добијамо

$$b\sqrt[3]{1+c-a}\leqslant b+\frac{bc-ba}{3}\quad\text{и}\quad c\sqrt[3]{1+a-b}\leqslant c+\frac{ca-cb}{3}.$$

Сабирањем ове три неједнакости добијамо

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leqslant a+b+c=1,$$

чиме је доказ завршен.

**450**. Одговор: из племена које говори истину.

Чланове првог племена зваћемо *истинољубићи*, а чланове другог племена *лажетићи*. На основу изјава првог дана може се закључити да су оба суседа сваког *истинољубића лажетићи*, док оба суседа сваког *лажетића* не могу истовремено бити *лажетићи*. То значи да се не могу наћи три суседа за столом који су *лажетићи* или, другим речима, међу свака три суседа за столом постоји бар један *истинољубић*. Посматрајући свих 2011 могућих тројки, добијамо да је број појављивања *истинољубића* бар 2011. Како је сваки од њих убројан три пута (јер се појављује у три тројке), број *истинољубића* је бар трећина укупног броја чланова Већа, односно бар 671.

На основу изјава другог дана може се опет закључити да су оба суседа сваког *истинољубића лажетићи*, док оба суседа сваког *лажетића* не могу истовремено бити *истинољубићи*. Сада међу свака три суседа за столом може бити највише један *истинољубић*. Истим резоновањем као малопре добијамо да је сада број *истинољубића* не већи од трећине тада присутних чланова Већа, односно највише 670. Дакле, особа која изостаје је *истинољубић*. Таква ситуација је заиста могућа – нека је првог дана било 671 *истинољубића* и 1340 *лажетића* који су седели за округлим столом по правилу ИЛЛИЛЛ...ИЛЛИЛ**И**Л, а другог дана 670 *истинољубића* и 1340 *лажетића* који су седели за округлим столом по правилу ИЛЛИЛЛ...ИЛЛ.

**451**. Означимо збир првих $n$ чланова низа $(a_n)$ са $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Докажимо индукцијом да је $s_n>n$, за свако $n$. База индукције је задовољена због $s_1=a_1=2>1$. Из претпоставке $s_n>n$ добијамо

$$\begin{aligned}s_{n+1}-(n+1)&=s_n+a_n-(n+1)=s_n-(n+1)+\frac{n}{s_n}\\&=\frac{(s_n-n)(s_n-1)}{s_n}>0,\end{aligned}$$

чиме је завршен индуктивни корак.

Користећи управо доказано добијамо да је $a_{n+1} = \dfrac{n}{s_n} < 1$, односно $a_n < 1$ за свако $n > 1$. Сада имамо $s_n = 2 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n < n + 1$, и коначно

$$a_n = \frac{n}{s_n} > \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Специјално, важи и $0{,}999 < 1 - \dfrac{1}{2012} < a_{2011} < 1$.

**452**. Дискове ћемо одабрати користећи тзв. *greedy algorithm* (тј. „похлепни алгоритам"). Нека је $D_1$ диск највећег полупречника из $\mathcal{F}$. Ако претпоставимо да су дискови $D_1, \ldots, D_j$ већ одабрани, диск $D_{j+1}$ бирамо тако да је дисјунктан са сваким од $D_1, \ldots, D_j$ и највећег могућег полупречника. Како је скуп $\mathcal{F}$ коначан, алгоритам ће у неком тренутку стати на последњем диску $D_n$. Посматрајмо тачку $x \in E$ која се не налази у унији дискова $D_1, \ldots, D_n$ (све преостале свакако припадају унији $3D_1, \ldots, 3D_n$). Тада се $x$ налази у неком диску $D$ из скупа $\mathcal{F}$, полупречника $r$. Како $D$ није међу одабраним дисковима, следи да сече неки од дискова $D_j$ полупречника $r_j \geqslant r$. Према неједнакости троугла центри ова два диска удаљени су бар $r + r_j$. Тада је очигледно $D$ садржан у $3D_j$, па самим тим и тачка $x$. Дакле, цео скуп $E$ је покривен унијом дискова $3D_1, \ldots, 3D_n$.

**453**. Показаћемо да на овај начин можемо добити сваки број облика $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$, где су $m$, $n$ природни, и то индукцијом по $k = m + n$. Како је $\dfrac{r}{s} = \sqrt{\dfrac{r^2}{s^2}}$, тиме ћемо добити и све позитивне рационалне бројеве $\dfrac{r}{s}$, што је и тврђење задатка.

За $k = 2$, притиском на дирку $\cos$ добијамо 1. Претпоставимо да је тврђење тачно за све бројеве мање од $k$. Користећи чињеницу да $\theta = \operatorname{tg}^{-1} x$ повлачи

$$\cos^{-1}(\sin\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} - \theta\Big) = \frac{1}{x},$$

закључујемо да од броја $x$ на екрану, притиском редом на дирке $\operatorname{tg}^{-1}$, $\sin$, $\cos^{-1}$ и $\operatorname{tg}$, можемо добити број $\dfrac{1}{x}$. Зато претпоставимо, без умањења општости, да је $m < n$. Према индуктивној претпоставци, због $n < k = m + n$ број $\sqrt{\dfrac{n-m}{m}}$ можемо добити на екрану. Сада, због идентитета

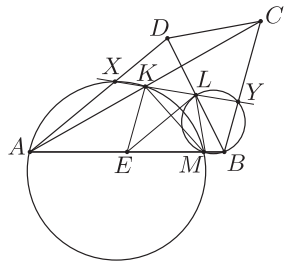
$$\cos\phi = \sqrt{\frac{m}{n}} \quad \text{за} \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{n-m}{m}},$$

узастопним притиском дирки $\operatorname{tg}^{-1}$ и $\cos$ добијамо број $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$.

**454**. Претпоставимо супротно тј. да постоји делилац $d$ броја $ab$ из интервала $(n^2, n^2 + n)$. Онда $d \mid |(d-a)(d-b)|$, а како $d$, $a$ и $b$ припадају интервалу $(n^2, n^2 + n)$, то је

$|(d-a)(d-b)| < n^2$. Како $d \mid |(d-a)(d-b)|$, то је $d \leqslant |(d-a)(d-b)|$, па је $d < n^2$. Ово је контрадикција јер је $d > n^2$ (пошто припада интервалу $(n^2, n^2+n)$). Дакле почетна претпоставка је нетачна, па не постоји делилац $d$ броја $ab$ који припада интервалу $(n^2, n^2+n)$.

**455**. Нека је $M$ пресечна тачка кружнице описане око троугла $AKX$ и странице $AB$, а $E$ средиште странице $AB$ (слика 2.82).




Слика 2.82.

Претпоставимо да је распоред тачака $A-E-M-B$. Тада је $EL$ средња линија троугла $ABD$, па је $\sphericalangle BEL = \sphericalangle BAD = \sphericalangle MAX = \sphericalangle MKY$ (због тетивног четвороугла $AXKM$). Због тога је четвороугао $KLME$ тетиван, одакле добијамо $\sphericalangle XLM = \sphericalangle KEA$. Дуж $KE$ је средња линија троугла $ABC$, па је $\sphericalangle KEA = \sphericalangle ABC = \sphericalangle YBM$. Значи $\sphericalangle XLM = \sphericalangle YBM$, па је четвороугао $LMBY$ тетиван, односно тачка $M$ лежи и на кружници описаној око троугла $BLY$.

**456**. Нумеришимо тимове бројевима $1, 2, \ldots, 2n+1$ и претпоставимо да у мечу између тимова $i$ и $j$, $i > j$ победи тим $i$. Тада очигледно нема *триплета* на том турниру, па је тражени минимум 0.

Придружимо овом турниру један усмерен граф (јасно је шта су темена и како конструишемо гране). Број троуглова у том графу је $\binom{2n+1}{3} = T + S$, где је $T$ број триплета, а $S$ број преосталих троуглова у којима постоји (тачно један) тим који је победио оба преостала. Према томе, број елемената скупа $S$ је $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \binom{d_i}{2}$, при чему смо са $d_i$ означили степен чвора $i$, односно број победа тима $i$. Знамо да је

$$\sum_{i=1}^{2n+1} d_i = \binom{2n+1}{2} = n(2n+1),$$

па је број

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} d_i(d_i-1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} d_i^2 - \sum_{i=1}^{2n+1} d_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} d_i^2 - n(2n+1)\right)$$

минималан ако је $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} d_i^2$ минимално. На основу неједнакости аритметичке и геометријске средине важи

$$\sum_{i=1}^{2n+1} d_i^2 \geqslant \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} d_i\right)^2 = n^2(2n+1),$$

па коначно добијамо

$$T = \binom{2n+1}{3} - S \leqslant \binom{2n+1}{3} - \frac{(n-1)n(2n+1)}{2} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

Тражени максимум је $\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}$ и постиже се када сваки тим има по $n$ победа и пораза.

**457**. (а) Очигледно је да број $N = 10001000\ldots10001$ са 2011 јединица и по 3 нуле између сваке две од њих задовољава услове задатка.

(б) Одговор: не! Претпоставимо да такав број постоји и означимо са $S(n)$ суму цифара произвољног природног броја $n$. Познато је да постоји број облика

$$M = \underbrace{99\ldots9}_{m}\underbrace{00\ldots0}_{k}$$

који је дељив са $N$ (на пример, посматрајући низ бројева $9, 99, 999, \ldots$ и њихове остатке при дељењу са $N$). Тада је $S(M) = 9m$. Број

$$P = \underbrace{99\ldots9}_{m+1}M = \underbrace{99\ldots9}_{m-1}89\underbrace{00\ldots0}_{m-1}1\underbrace{00\ldots0}_{k}$$

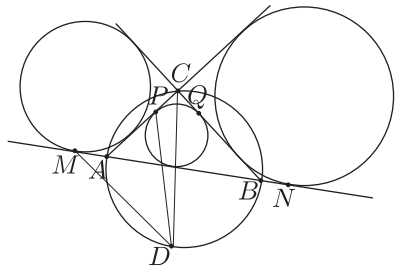
је такође дељив са $N$ и важи $S(P) = 9(m+1)$. Како је $S(P) - S(M) = 9$, $S(M)$ и $S(P)$ не могу бити истовремено дељиви са 2011.

**458**. Посматрајмо помоћну функцију $g(x) = f(x) - x$. Како је кодомен $[0,1]$, важи $f(0) = g(0) \geqslant 0$ и $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. Из непрекидности функције $g$ следи да постоји бар једно $c$ тако да је $g(c) = 0$, а тиме и $f(c) = c$. Претпоставимо да постоје бар два решења $x_1$ и $x_2$ ове једначине, односно $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Према Роловој теореми, постоји $\widetilde{x} \in (x_1, x_2)$ тако да је $g'(\widetilde{x}) = 0$. Међутим, то значи да је $f'(\widetilde{x}) = g'(\widetilde{x}) + 1 = 1$, што је у контрадикцији са условом задатка!

**459**. Симетрале дужи $AB$ и угла $\sphericalangle ACB$ секу се у средишту лука $\widehat{AB}$ (који не садржи $C$) круга описаног око троугла $ABC$ (слика 2.83).

Нека је $D$ средиште лука $AB$ и $p$ полуобим троугла $ABC$. Како је $AM = BN = CP = CQ = p - c$, тврђење задатка је еквивалентно са $DM = DP$. Одузимајући једнакости

$$DP^2 = DC^2 + CP^2 - 2 \cdot DC \cdot DP \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$




Слика 2.83.

и

$$DM^2 = DA^2 + AM^2 + 2 \cdot DA \cdot AM \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

добијамо

$$DC - DA = 2(p-c)\cos\frac{\gamma}{2},$$

што заједно са $DA = \dfrac{c}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$ даје

$$DC = \frac{a+b}{2\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

С друге стране, применом Птоломејеве теореме, добијамо да је $DC = \dfrac{(a+b)DA}{c}$. Из добијених израза за $DC$ следи једначина

$$2(p-c)\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{p-c}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

одакле је $\cos^2\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{2}$ и $\gamma = 90^\circ$.

**460**. Из поставке једначине закључујемо да $x^2 \in \mathbb{Z}$, као и да је $x$ позитивно, па је $x = \sqrt{n}$, где је $n \in \mathbb{N}$. Сваки природан број $n$ се може представити у облику $n = a^2 + b$, где су $a$ и $b$ ненегативни цели бројеви и важи $b < 2a + 1$. То значи да је $[\sqrt{n}\,] = a$. Једначина постаје $a^2 + b - 13a + 11 = 0$. Одавде следи $a < 13$ (и $b < 27$) и $4a^2 - 52a + 169 = 125 - 4b$, односно $(2a-13)^2 = 125 - 4b$. Пошто је $125 - 4b$ потпун квадрат, онда $b \in \{1, 11, 19, 25\}$. Сада испитивањем случајева и коришћењем услова $b < 2a + 1$, добијамо решења $(a, b) \in \{(1,1), (12,1), (11,11), (10,19)\}$, па су сва решења једначине $x = [\sqrt{n}\,] \in \{\sqrt{2}, \sqrt{119}, \sqrt{132}, \sqrt{145}\}$.

**461**. Уведимо координате поља у табли тако да сви квадратићи $1 \times 1$ из прве врсте имају прву координату 1, из друге врсте 2, ..., из последње врсте 29; аналогно и за колоне, прва колона има другу координату 1, друга 2, ..., последња 29. Означимо квадрате који садрже поља $(3k+1, 3\ell+1), (3k+1, 3\ell+2), (3k+2, 3\ell+1), (3k+2, 3\ell+2)$, при чему $k$ и $\ell$ узимају вредности од 0 до 9. Означили смо 100 квадрата $2 \times 2$. Примећујемо да сваки квадрат $2 \times 2$ може имати заједничких квадратића $1 \times 1$, са највише једним од означених квадрата. Ако убацимо 99 квадрата $2 \times 2$, ми смо онемогућили покривање

највише 99 од 100 означених квадрата, тако да ће остати бар један означени квадрат који нема ниједно прекривено поље и њега ћемо моћи да убацимо у таблу, тако да се не преклапа ни са једним од већ убачених. Овим је тврђење доказано.

Из доказа видимо да је 99 максималан број квадрата $2 \times 2$ које ма како убацили на таблу $29 \times 29$, можемо убацити још један такав квадрат тако да се никоја два не преклапају. За 100 квадрата то не важи, а пример су управо означени квадрати из задатка.

**462**. Тражени бројеви су дељиви са 3, одакле следи да је број седмица у тим бројевима дељив са 3. Ако број не би садржао ниједну седмицу, то значи да је тај број 3333333, али он није дељив са 7, па не испуњава услове задатка. Такође, ако би садржао шест седмица и једну тројку, ни тада не би био дељив са 7, јер би био облика $7777777 - 4 \cdot 10^k$, што није дељиво са 7. Дакле, тражени бројеви имају три седмице и четири тројке у свом запису.

Запишимо број у облику $3333333 + 4 \cdot 10^a + 4 \cdot 10^b + 4 \cdot 10^c$, $a < b < c$. Треба да утврдимо када ће овај број бити дељив са 7. То је еквивалентно са $10^a + 10^b + 10^c \equiv 1 \pmod 7$, а како $10^n$ редом даје остатке $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1$ за $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ по модулу 7, испитивање случајева се своди на то да нађемо представљање броја 1, 8 и 15 као збир три различита броја из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (евентуално се 1 може поновити два пута, због тога што $10^0 \equiv 10^6 \equiv 1 \pmod 7$). То су следеће могућности: $8 = 1 + 1 + 6$, $8 = 1 + 2 + 5$, $8 = 1 + 3 + 4$, $15 = 4 + 5 + 6$ и то даје $(a, b, c) \in \{(0, 3, 6), (0, 2, 5), (2, 5, 6), (0, 1, 4), (1, 4, 6), (3, 4, 5)\}$, па су тражени бројеви $7337337, 3733737, 7733733, 3373377, 7373373, 3777333$.

**463**. Уочимо произвољно теме $2n$-тоугла и повежимо га са супротним теменом. Између њих се налази $n - 1$ теме (у смеру казаљке на сату на пример). Како год да одаберемо 3 темена међу тих $n - 1$, са почетним теменом, добићемо четвороугао који не садржи центар многоугла. У том случају уочено теме називамо *најдеснијим теменом* четвороугла. За сваки четвороугао који не садржи центар $2n$-тоугла, постоји јединствено *најдесније теме* тог четвороугла. Када уочимо свих $2n$ темена и за свако уочимо све овакве четвороуглове, успоставили смо бијективну кореспоненцију са свим четвороугловима који не садрже центар $2n$-тоугла. Према томе, број овакви четвороуглова је $v = 2n \cdot \binom{n-1}{3}$. Како укупно можемо одабрати $\binom{2n}{4}$ четвороуглова, $u = \binom{2n}{4} - v$, па је

$$u - v = \binom{2n}{4} - 4n \cdot \binom{n-1}{3} = \frac{n(n-1)(4n-7)}{2}.$$

**464**. Површину фигуре $F$ означаваћемо са $S(F)$. Нека је $S(ABCD) = T$. Како је $S(AMCD) = S(ANCD) = T/2$ и $S(AMCD) = S(ACD) + S(AMC) = S(ANCD) = S(ACD) + S(ANC)$, следи $S(AMC) = S(ANC)$, па су дужи $AC$ и $MN$ паралелне. Уочимо праву кроз $D$, паралелну са $AC$ (па и са $MN$), која сече продужетке страница $AB$ и $BC$ у $P$ и $Q$, редом. Онда важе следеће једнакости: $S(PAC) = S(DAC)$, $S(PMC) = S(PAC) + S(MAC) = S(DAC) + S(MAC) = S(DAMC) = T/2 = S(MBC)$, а одавде следи $PM = MB$. Аналогно, важи и $BN = NQ$, па је $MN$ средња линија $\triangle PBQ$, одакле закључујемо да $MN$ полови $BD$.

**465**. За полином $p$ са целобројним коефицијентима и свака два различита цела броја $x$ и $y$ разлика $x-y$ дели $p(x)-p(y)$. То значи да ако је $x \equiv y \pmod{m}$, онда важи и $p(x) \equiv p(y) \pmod{m}$. Из тога следи да је

$$p(i) \equiv p(2011+i) \equiv \cdots \equiv p(2010 \cdot 2011 + i) \pmod{2011},$$

за свако $i = 1, 2, \ldots, 2011$. Одатле имамо

$$p(i) + p(2011+i) + \cdots + p(2010 \cdot 2011 + i) \equiv 2011 p(i) \equiv 0 \pmod{2011},$$

тј. $2011 \mid \big(p(i) + p(2011+i) + p(2010 \cdot 2011 + i)\big)$, за свако $i = 1, 2, \ldots, 2011$. За $n = 2011^2$ групишемо сабирке на следећи начин:

$$\begin{aligned} & p(1) + p(2) + \cdots + p(2011) + p(2012) + \cdots + p(2011^2) \\ = & [p(1) + p(2012) + \cdots + p(2010 \cdot 2011 + 1)] \\ & + [p(2) + p(2013) + \cdots + p(2010 \cdot 2011 + 2)] \\ & + \cdots + [p(2011) + p(4022) + \cdots + p(2011^2)]. \end{aligned}$$

Како је сваки од тих 2011 сабирака дељив са 2011, следи да је сума

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(2011) + p(2012) + \cdots + p(2011^2)$$

дељива са 2011, па постоји природан број $n$ који испуњава услове задатка.

Приметимо да ако 2011 заменимо произвољним природним бројем $k$, тврђење остаје на снази.

**466**. Потребан и довољан услов да тражени систем једначина има решења у скупу целих бројева је $bc - ad = \pm 1$.

Докажимо да ако важи $bc - ad = \pm 1$, систем има целобројних решења. Ако је $a = 0$ или $c = 0$, тврђење очигледно важи. Претпоставимо да је $ac \neq 0$. Тада смемо да прву једначину помножимо са $c$, другу са $a$ и онда добијамо:

$$\begin{aligned} acx + bcy &= mc, \\ acx + ady &= na. \end{aligned}$$

Одузмимо другу једначину од прве:

$$(bc - ad)y = \pm y = mc - na,$$

одакле следи да је $y \in \mathbb{Z}$. Аналогно, $x = \pm(md - nb) \in \mathbb{Z}$, па систем има целобројна решења.

Остаје да докажемо да ако систем има целобројна решења, тада важи $bc - ad = \pm 1$. Као и у првом делу долазимо до $(bc - ad)y = mc - na$, па $bc - ad$ дели $mc - na$, за сваки пар целих бројева $m$ и $n$. Нека је $(a, c) = t$ и $a = t\alpha$ и $c = t\gamma$, $t, \alpha, \gamma \in \mathbb{N}$. Онда је $(\alpha, \gamma) = 1$ и услов постаје $(b\gamma - d\alpha) \mid (m\gamma - n\alpha)$, а како су $\alpha$ и $\gamma$ узајамно прости бројеви, постоје цели $m$ и $n$ тако да је $m\gamma - n\alpha = 1$, па онда мора бити $b\gamma - d\alpha = 1$. Одавде следи $(b, d) = 1$. Ако применимо исти резон, али сводимо једначину по $x$, добићемо $(ad - bc)x = md - nb$. Како су $b$ и $d$ узајамно прости, постоје цели $m$ и $n$, такви да $md - nb = 1$. Дакле, $ad - bc = \pm 1$.

**467**. Означимо са $P_1 \in k_1$ и $P_2 \in k_2$ тачке такве да су дужи $AP_1$ и $AP_2$ пречници кружница. Како су углови $ABC$ и $ADC$ прави, тројке тачака $P_1, B, C$ и $P_2, D, C$ морају бити колинеарне. Према томе, $\sphericalangle P_1CP_2$ је такође прав, па тачка $C$ лежи на кружници над пречником $P_1P_2$.

Очигледно је да за сваку тачку те кружнице постоји правоугаоник $ABCD$ који задовољава услове, па је тражено геометријско место тачака кружница над пречником $P_1P_2$.

**468**. Према неједнакости између аритметичке и квадратне средине важи:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}+\sqrt{\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta}}{2} &\le \sqrt{\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{\sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta)}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Аналогно,

$$\frac{\sqrt{\sin\beta\sin\alpha\cos\gamma}+\sqrt{\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha}}{2} \le \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$$

и

$$\frac{\sqrt{\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta}+\sqrt{\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha}}{2} \le \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}.$$

Следећа неједнакост за углове троугла се може доказати коришћењем Јенсенове неједнакости:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Из ових неједнакости имамо

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}+\sqrt{\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha}+\sqrt{\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta} &\le \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sqrt{2}}\\ &\le \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је троугао једнакостраничан.

**469**. (а) Постоји таквих 9 тачака. На пример, у координатној равни, то би биле тачке са координатама $(-2,1), (0,1), (2,1), (-1,0), (0,0), (1,0), (-2,-1), (0,-1)$ и $(2,-1)$.

(б) Не постоји таква конфигурација 9 тачака. Претпоставимо супротно, тј. да постоји таква конфигурација. Назовимо *степеном* тачке број правих које излазе из ње. Степен сваке тачке је мањи од 5, јер би иначе постојало $1+2\cdot 5 = 11$ тачака (за сваку праву по две). Дакле, степен сваке тачке може бити максимално 4. Како је укупна вредност степена свих тачака једнака $11\cdot 3 = 33$ (за сваку праву по три тачке), и $33 = 9\cdot 3+6$, бар 6 тачака има степен 4. Уочимо једну од њих. Из ње полазе 4 праве, и свака права

садржи по две од преосталих осам тачака. Како међу њима има бар пет тачака, које су степена 4, неке две од њих се налазе на истој правој са почетном уоченом тачком. Одавде закључујемо да постоји права која пролази кроз три тачке које имају степен 4. Нека су то тачке $A, B, C$ и нека је $B$ између $A$ и $C$. Из сваке од тих тачака полази једна њихова заједничка права и три различите праве. Дакле из ове три тачке полази укупно десет различитих правих. Уочимо ону праву која не пролази кроз ове тачке, нека она пролази кроз тачке $X, Y, Z$ и тако да је $Y$ у средини. Сада закључујемо да било коју тачку из скупа $\{A, B, C\}$ и $\{X, Y, Z\}$ спаја јединствена права. Из тачака $X, Y$ и $Z$ онда, такође, полазе по четири праве. Овим поступком смо одредили свих 11 правих, а више се никоје четири праве не секу у једној тачки (која је различита од $A, B, C, X, Y, Z$), па су преостале три тачке степена 3. То значи и да на правој $AY$ постоји тачка која је степена 3. Међутим, то онда значи да се $CX$ и $BZ$ или $CZ$ и $BX$ секу на $AY$, а то је немогуће, па не постоји тражена конфигурација.

**470**. Приметимо да, ако би постојали реални бројеви $a, b$ и $c$ за које би важило $x = \dfrac{a+b}{c}$, $y = \dfrac{b+c}{a}$ и $z = \dfrac{c+a}{b}$, био би испуњен услов $xyz = x + y + z + 2$. Покушајмо да одредимо те бројеве.

Уочимо три праве $k, \ell$ и $m$ кроз тачку $P$, тако да важи $k \parallel AB$, $\ell \parallel BC$ и $m \parallel AC$. Нека $k$ сече $AC$ и $BC$ у $D$ и $E$, редом, а $\ell$ и $m$ секу $AB$ у $G$ и $F$, редом. Означимо дужине $AF = a, FG = b$ и $GB = c$.

Пошто су $AFPD$ и $GBEP$ паралелограми, следи $AF = PD = a$ и $BG = PE = c$. Из сличности троуглова $APG$ и $PA'E$ следи

$$\frac{AP}{AP'} = \frac{AG}{PE} = \frac{AF + FG}{GB} = \frac{a+b}{c}.$$

Такође, из сличности троуглова $BPF$ и $PB'D$ следи

$$\frac{BP}{BP'} = \frac{FB}{DP} = \frac{FG + GB}{AF} = \frac{b+c}{a}.$$

Аналогно, из сличности троуглова $CDE$ и $PFG$ следи

$$\frac{CP}{CP'} = \frac{DE}{FG} = \frac{DP + PE}{FG} = \frac{a+c}{b}.$$

Овим су бројеви $a, b$ и $c$ одређени, чиме је задатак решен.

**471**. Број из задатка се може представити на следећи начин

$$\frac{1}{3}\left(10^{3n+3} + 2 \cdot 10^{2n+2} + 2 \cdot 10^{n+1} + 1\right).$$

Тај број је конгруентан са 3 по модулу 4, па има прост фактор тог облика на непаран степен, те се не може представити као збир два квадрата природних бројева.

Видимо да овај број „личи” на бројеве облика $\left(\frac{k\cdot 10^{n+1}+l}{3}\right)^3$, па ћемо покушати да га представимо у облику

$$\left(\frac{a\cdot 10^{n+1}+b}{3}\right)^3+\left(\frac{c\cdot 10^{n+1}+d}{3}\right)^3=\frac{1}{3}\left(10^{3n+3}+2\cdot 10^{2n+2}+2\cdot 10^{n+1}+1\right).$$

Решавањем овог система једначина добијамо да бројеви $a, b, c$ и $d$ постоје и то $a=d=2$ и $b=c=1$, односно

$$\left(\frac{2\cdot 10^{n+1}+1}{3}\right)^3+\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^3=\frac{1}{3}\left(10^{3n+3}+2\cdot 10^{2n+2}+2\cdot 10^{n+1}+1\right),$$

па се тражени број може представити као збир два куба природних бројева $\left(\frac{2\cdot 10^{n+1}+1}{3}\right.$ и $\left.\frac{10^{n+1}+2}{3}\right.$ јесу природни бројеви$\left.\right)$.

**472**. За дефинисаност логаритма, потребно је $\dfrac{a+1}{a-1}>0$ и $\dfrac{a+1}{a-1}\neq 1$, што даје $a>1$ или $a<-1$.

Ако је $a>1$, онда је $\dfrac{a+1}{a-1}>1$, па неједнакост постаје еквивалентна са

$$x^2-x+1<\frac{a+1}{a-1}\quad \text{за свако } x\in\mathbb{R},$$

што је немогуће.

Ако је $a<-1$, онда је $0<\dfrac{a+1}{a-1}<1$, па неједнакост постаје еквивалентна са

$$x^2-x+1>\frac{a+1}{a-1}\quad \text{за све реалне } x.$$

То је еквивалентно са

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-\frac{a+1}{a-1}>0,$$

па да би ово важило за свако $x$, мора бити $\dfrac{3}{4}-\dfrac{a+1}{a-1}>0$, односно $\dfrac{3}{4}>\dfrac{a+1}{a-1}$, што даје $\dfrac{a+7}{1-a}>0$, а ово је испуњено за $-7<a<-1$, што и чини скуп свих вредности параметра $a$.

**473**. За $x=0$, $y=1$ из дате неједнакости добијамо $|f(0)|=2011$. За $y=-x\neq 0$ добијамо да за свако $x\neq 0$ важи

$$|f(x)|\leqslant 2011\leqslant\left|\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right|.$$

Из неједнакости троугла имамо

$$4022\leqslant|f(x)+f(-x)|\leqslant|f(x)|+|f(-x)|\leqslant 2011+2011=4022.$$

Дакле,

$$f(x) = f(-x) = 2011, \quad \text{за све } x \neq 0. \tag{2.92}$$

Претпоставимо да постоје реални бројеви $x$ и $y$ различити од нуле такви да је $f(x) = 2011$ и $f(y) = -2011$. Због (2.92) можемо претпоставити да су бројеви $x$ и $y$ различитог знака. Из услова задатка имамо

$$2011 \leqslant \left|\frac{2011(x+y)}{x-y}\right|, \quad \text{тј. } |x+y| \geqslant |x-y|,$$

што је контрадикција.

Провером се закључује да су једина решења функције:

- $f(x) = 2011$ за све $x \in \mathbb{R}$;
- $f(x) = -2011$ за све $x \in \mathbb{R}$;
- $f(x) = \begin{cases} 2011, & \text{ако је } x \neq 0, \\ -2011, & \text{ако је } x = 0; \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -2011, & \text{ако је } x \neq 0, \\ 2011, & \text{ако је } x = 0. \end{cases}$

**474**. Означимо висину ваљка са $h$, полупречник са $r$, кружнице у базама са $k_1$ и $k_2$. Његова запремина је $r^2h\pi = 1$ и нека је $V$ запремина уписаног тетраедра $ABCD$. Тврдимо да нема губљења општости ако претпоставимо да темена $A, B, C, D$ леже на $k_1 \cup k_2$. Заиста, ако су темена $A, B, C$ фиксирана, а теме $D$ се шета по дужи $EF$ паралелној оси ваљка ($E \in k_1, F \in k_2$), максимално растојање тачке $D$ од равни $ABC$ (и самим тим максимална вредност за $V$) постиже се или у $E$ или у $F$. Зато разматрамо само следећа два случаја.

1. $A, B \in k_1$ и $C, D \in k_2$. Нека су $P$ и $Q$ пројекције тачака $A$ и $B$ на раван од $k_2$, а $R$ и $S$ пројекције тачака $C$ и $D$ на раван од $k_1$, редом. Тада је $V$ једнако трећини запремине призме $ARBSCPDQ$ са основама $ARBS$ и $CPDQ$. Површина четвороугла $ARBS$ уписаног у кружницу $k_1$ је највећа када је четвороугао квадрат, површине $2r^2$. Дакле, $3V = V' \leqslant 2r^2h = \dfrac{2}{\pi}$.
2. $A, B, C \in k_1$ и $D \in k_2$. Површина троугла $ABC$ је највећа када је у питању једнакостраничан троугао уписан у кружницу $k_1$, површине $\dfrac{3\sqrt{3}r^2}{4}$. Према томе, $V \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2h = \dfrac{\sqrt{3}}{4\pi} < \dfrac{2}{3\pi}$.

**475**. Изаберимо следећих $2^{n-1} + n$ бројева: све непарне (има их $2^{n-1}$) и све степене двојке (има их $n$). Докажимо да међу њима не постоје два различита $x$ и $y$ таква да $(x+y) \mid xy$.

Ако су $x$ и $y$ непарни, онда је $x + y$ парно, а $xy$ непарно, па $x + y$ не може делити $xy$.

Ако је $x$ непаран, а $y$ степен двојке, онда је $x + y$ непаран, па је узајамно прост са $y$ и дели само $x$, а како је $0 < x < x + y$, то је немогуће.

Ако су и $x$ и $y$ степени двојке, нека је $x = 2^a$ и $y = 2^b$, где је $0 < a < b$. Тада $2^{b-a} + 1$, што је непаран број већи од један, дели $2^{a+b}$, а то је немогуће.

Видимо да изабрани скуп задовољава услове задатка.

**476**. Нека су $S_1(x_1, y_1)$ и $S_2(x_2, y_2)$ центри симетрије графика $G$ функције $f$. Очигледно обе тачке $S_1$ и $S_2$ морају припадати графику $G$ (због тачака графика које имају исту апсцису) и важи $x_1 \neq x_2$. Права одређена центрима симетрије представља график линеарне функције $\ell(x)$. Композиција $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2$ централних симетрија $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ са центрима у центрима симетрије представља транслацију за вектор $2\overrightarrow{S_1S_2}$, па важи $f(x + 2(x_2 - x_1)) = f(x) + 2(y_2 - y_1)$ за све $x \in \mathbb{R}$, јер се при том пресликавању свака тачка графика слика опет у неку тачку са графика. Такође,

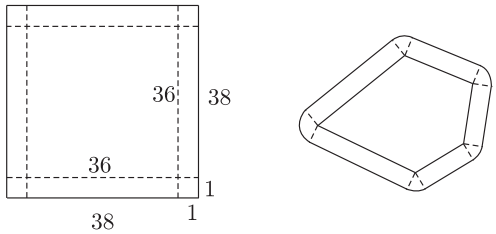
$$\ell(x + 2(x_2 - x_1)) = \ell(x) + 2(y_2 - y_1), \quad \text{за све } x \in \mathbb{R},$$

пошто се права одређена центрима такође слика у саму себе. Означимо $p(x) = f(x) - \ell(x)$. Тада важи $p(x + 2(x_2 - x_1)) = f(x) - \ell(x) = p(x)$, што значи да је функција $p$ периодична. Дакле, $f(x) = \ell(x) + p(x)$ је тражена репрезентација.

**477**. Центар траженог круга мора бити удаљен барем 1 од ивица квадрата. Одредићемо тај центар у квадрату чије су странице паралелне страницама почетног квадрата и удаљене од њих за 1. Дужина странице тог мањег квадрата је 36. Скуп свих тачака које леже на удаљености мањој од 1 од конвексног многоугла $P$ је фигура $Q$ ограничена дужима паралелним страницама полигона $P$ и кружним луковима који спајају крајеве тих дужи (слика 2.84). За површину и обим фигура $P$ и $Q$ важи

$$S(Q) = S(P) + O(P) + \pi,$$

јер кружнни исечци фигуре $Q$ чине заједно пун круг полупречника 1.




Слика 2.84.

Због услова задатка је $S(P) < \pi$ и $O(P) < 2\pi$, па је $S(Q) < 4\pi$. Фигуре $Q$ се могу преклапати, но површина њихове уније, тј. скупа свих тачака које су удаљене за највише 1 од неког од 100 датих многоуглова износи највише $400\pi$. Како је $400\pi \leqslant 400 \cdot 3{,}2 = 40 \cdot 32 = 36^2 - 4^2 < 36^2$, постоји тачка унутар квадрата странице 36 која није прекривена ниједним ликом $Q$, па ту тачку можемо узети за средиште траженог круга полупречника 1. Тај круг не сече ниједан од датих многоуглова.

**478**. Тврђење ћемо доказати применом Менелајеве теореме. Доказаћемо да важи

$$\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=1.$$

Нека су растојања $MA=x$, $MB=y$ и $MC=z$. Помоћу синусних теорема изразићемо три тражена односа и доказаћемо да је њихов производ један:

$$\begin{aligned}\frac{BC_1}{AC_1}=\frac{\frac{BC_1}{MC_1}}{\frac{AC_1}{MC_1}}&=\frac{\frac{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)}{\sin\sphericalangle MBA}}{\frac{\sin(90^\circ-\sphericalangle AMC)}{\sin\sphericalangle MAB}}\\&=\frac{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)}{\sin(90^\circ-\sphericalangle AMC)}\cdot\frac{\sin\sphericalangle MAB}{\sin\sphericalangle MBA}\\&=\frac{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)}{\sin(90^\circ-\sphericalangle AMC)}\cdot\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

Аналогно,

$$\frac{CA_1}{BA_1}=\frac{\sin(90^\circ-\sphericalangle AMC)}{\sin(\sphericalangle AMC+\sphericalangle BMC-90^\circ)}\cdot\frac{z}{y}.$$

За трећи однос рачунамо слично, али морамо водити рачуна да је тачка $B_1$ у нашем случају изван дужи $AC$:

$$\begin{aligned}\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{\frac{AB_1}{MB_1}}{\frac{CB_1}{MB_1}}&=\frac{\frac{\sin(\sphericalangle AMB-90^\circ)}{\sin(180^\circ-\sphericalangle CAM)}}{\frac{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)}{\sin\sphericalangle ACM}}\\&=\frac{\sin(\sphericalangle AMB-90^\circ)}{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)}\cdot\frac{\sin\sphericalangle ACM}{\sin\sphericalangle CAM}\\&=\frac{\sin(\sphericalangle AMB-90^\circ)}{\sin(\sphericalangle AMB+\sphericalangle AMC-90^\circ)}\cdot\frac{x}{z}.\end{aligned}$$

Како је $\sphericalangle AMC+\sphericalangle BMC-90^\circ+\sphericalangle AMB-90^\circ=360^\circ-180^\circ=180^\circ$, следи

$$\sin(\sphericalangle AMC+\sphericalangle BMC-90^\circ)=\sin(\sphericalangle AMB-90^\circ),$$

и након множења ова три односа очигледно добијамо тврђење задатка.

**479**. Посматрајмо идентичну пермутацију $a_i=i$. Нека се у неком тренутку $k$ појавио потпун квадрат:

$$b_k=\sum_{i=1}^{k}a_i=\frac{k(k+1)}{2}=m^2.$$

Тада је $k<2m$. Онда $b_{k+1}$ можемо сместити између два узастопна квадрата:

$$m^2<b_{k+1}=b_k+a_{k+1}=m^2+k+1<m^2+2m+1=(m+1)^2.$$

Сада заменимо $a_k$ и $a_{k+1}$, па онда $b_k$ није квадрат, а $b_{k+1}$ остаје исти, па ни он није потпун квадрат.

Овај поступак можемо применити све док је $k < n$. Дакле, за свако $k < n$ ми можемо наместити да ниједан од бројева $b_1, b_2, \ldots, b_k$ не буде потпун квадрат. Зато број $b_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ мора бити потпун квадрат. Знамо да је $b_n = \sum\limits_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$, па треба одредити све $n$ за које важи

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2.$$

Сређивањем добијамо

$$(2n+1)^2 - 2 \cdot (2m)^2 = 1,$$

а ово је Пелова једначина $x^2 - 2y^2 = 1$ (јер је $x$ увек непаран, а $y$ паран, за свако решење). Њено минимално решење је $(x, y) = (3, 2)$, па су сва решења

$$x + y\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^s,$$

одакле добијамо све могућности за $n$:

$$n = \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^s + \left(3-2\sqrt{2}\right)^s - 2}{4}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

**480**. Означимо са $p, q$ и $r$ следеће исказе.

$p$ : Биће облачно. $q$ : Падаће снег. $r$ : Дуваће ветар.

Тада тврђењима 1), 2) и 3) из поставке задатка одговарају респективно следеће исказне формуле:

$$F_1 \equiv p \vee q \vee r, \quad F_2 \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r, \quad F_3 \equiv \neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q).$$

Треба проверити да ли је исказна формула $F \equiv q \Rightarrow r$ логичка последица формула $F_1, F_2$ и $F_3$, односно да ли је формула $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \Rightarrow F$ таутологија. Доказаћемо да је формула

$$(p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

таутологија методом свођења на апсурд (могуће је и цртањем таблице).

Претпоставимо да претходна формула није таутологија, односно да постоје вредности исказних слова $p, q, r$ за које је $\tau((p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \bot$. Тада је

$$\tau((p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q))) = \top, \qquad \tau((q \Rightarrow r)) = \bot.$$

Из прве формуле добијамо, специјално, да је $\tau(\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q)) = \top$, док из друге одмах следи да је $\tau(q) = \top$ и $\tau(r) = \bot$. Даље је $\tau(p \wedge \neg q) = \top$, па је и $\tau(\neg q) = \top$. Контрадикција!

**481**. Свака релација на овом скупу јединствено је задата квадратном таблицом формата $2011 \times 2011$, у чијим се пољима налази $\top$ или $\bot$, у зависности од тога да ли су одговарајући елементи у релацији или не.

(а) Симетричне релације се, због своје дефиниције, представљају таблицама које су симетричне у односу на главну дијагоналу. Према томе, елементи испод главне дијагонале јединствено су одређени елементима изнад главне дијагонале, па је довољно попунити на произвољан начин елементе на и изнад главне дијагонале. Таквих поља има $1 + 2 + \cdots + 2011 = \frac{2011 \cdot 2012}{2} = 1006 \cdot 2011$, а симетричних релација $2^{1006 \cdot 2011}$.

(б) Потребан и довољан услов да би релација била антисиметрична је да не постоје поља симетрична у односу на главну дијагоналу таква да је у оба уписан знак $\top$. Према томе, за парове поља која су симетрична у односу на главну дијагоналу (укупно $1+2+\cdots+2010 = \frac{2010 \cdot 2011}{2} = 1005 \cdot 2011$ поља) имамо три могућности: $(\top, \bot), (\bot, \top), (\bot, \bot)$, док се главна дијагонала попуњава на произвољан начин. Број антисиметричних релација је $2^{2011} \cdot 3^{1005 \cdot 2011}$.

(в) Из (а) и (б) закључујемо да су релације које су и симетричне и антисиметричне представљене таблицама које су ван главне дијагонале попуњене само знацима $\top$, док је главна дијагонала произвољно попуњена. Број таквих релација је $2^{2011}$.

(г) Означимо са $S$ скуп свих релација на овом скупу, са $A$ скуп симетричних и са $B$ скуп антисиметричних релација. На основу свега реченог важи $|S| = 2^{2011^2}$, $|A| = 2^{1006 \cdot 2011}$, $|B| = 2^{2011} \cdot 3^{1005 \cdot 2011}$, $|A \cap B| = 2^{2011}$. Одатле је број релација које су симетричне или антисиметричне једнак $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^{1006 \cdot 2011} + 2^{2011} \cdot 3^{1005 \cdot 2011} - 2^{2011}$, а број релација које нису ни симетричне ни антисиметричне је

$$|(A \cup B)^c| = |S| - |A \cup B| = 2^{2011^2} - 2^{1006 \cdot 2011} - 2^{2011} \cdot 3^{1005 \cdot 2011} + 2^{2011}.$$

**482**.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2011} |z - z_k|^2 &= \sum_{k=1}^{2011} (z - z_k)\overline{(z - z_k)} = \sum_{k=1}^{2011} (z - z_k)(\overline{z} - \overline{z_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{2011} (z\overline{z} + z_k\overline{z_k} - z\overline{z_k} - \overline{z}z_k) = \sum_{k=1}^{2011} (|z|^2 + |z_k|^2 - z\overline{z_k} - \overline{z}z_k) \\
&= \sum_{k=1}^{2011} (|z|^2 + 1) - z\sum_{k=1}^{2011} \overline{z_k} - \overline{z}\sum_{k=1}^{2011} z_k \\
&= 2011(|z|^2 + 1) - z\overline{\sum_{k=1}^{2011} z_k} - \overline{z}\sum_{k=1}^{2011} z_k \\
&= 2011(|z|^2 + 1).
\end{aligned}$$

**483**. Нека су $A, B, C$, редом, скупови ученика који су решили први, други, трећи задатак. Означимо са $x = |(A \cup B) \setminus C|, y = |(B \cup C) \setminus A|, z = |(A \cup C) \setminus B|$ бројеве ученика

који су решили тачно два задатка, са $t = |A \cap B \cap C|$ број ученика који су решили сва три задатка и са $u$ број ученика који су решили тачно један задатак. Из услова задатка имамо $x+t=6, y+t=7, z+t=11$ и $x+y+z+t+u=21$. Одузимањем четврте једначине од збира прве три добијамо $2t = u+3$. Одавде је очигледно $t \geqslant 2$ и $u \geqslant 1$.

**484**. Означимо са $S$ тражени збир. Тада је

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\log_x 2 \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \log_x 8} + \ldots + \frac{1}{\log_x 2^{2010} \log_x 2^{2011}} \\ &= \frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2010\cdot 2011}\right) \\ &= \frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)\right) \\ &= \frac{2010}{2011(\log_x 2)^2}. \end{aligned}$$

**485**. Нека је $ABCDA'B'C'D'$ паралелепипед чија је основа $ABCD$ квадрат странице $a$ и чија бочна ивица $AA'$ дужине $b$ гради угао $\alpha$ са ивицом $AB$, односно $\beta$ са ивицом $AD$. Означимо са $E$ подножје висине из темена $A'$, а са $M$ и $N$ подножја нормала из $E$ на ивице $AB$ и $AD$ редом. На основу теореме о три нормале, важи $A'M \perp AB$ и $A'N \perp AD$. Из правоуглих троуглова $AA'M$, $AA'N$ и $A'ME$ лако добијамо да је $x = AM = b\cos\alpha, A'M = b\sin\alpha, y = AN = b\cos\beta$ и коначно

$$H = A'E = \sqrt{A'M^2 - y^2} = b\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta} = b\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha},$$

одакле је

$$b = \frac{H}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}.$$

Означимо са $F$ подножје нормале из темена $C'$. Најдужа просторна дијагонала $AC' = d$ је хипотенуза правоуглог троугла $AFC'$ чије су катете $AF = \sqrt{(a+x)^2 + (a+y)^2}$ и $H$, јер су одстојања тачке $F$ од правих $CD$ и $BC$ такође $x$ и $y$, редом. Дакле,

$$d = \sqrt{H^2 + \left(a + \frac{H\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}\right)^2 + \left(a + \frac{H\cos\beta}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}\right)^2}.$$

**486**. Означимо са $H$ и $h$ висине доњег и горњег дела купе. Изједначавајући запремине добијамо

$$\frac{\pi H}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2) = \frac{\pi h}{3}(\rho^2 + \rho r + r^2),$$

одакле је

$$\frac{H}{h} = \frac{\rho^2 + \rho r + r^2}{R^2 + R\rho + \rho^2}. \tag{2.93}$$

Из сличности имамо $\dfrac{h}{H+h} = \dfrac{\rho - r}{R - r}$, односно, након сређивања

$$\frac{H}{h} = \frac{R-\rho}{\rho - r}. \tag{2.94}$$

Изједначавањем десних страна (2.93) и (2.94) добијамо $R^3 - \rho^3 = \rho^3 - r^3$, па је $2\rho^3 = R^3 + r^3$ и

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}.$$

**487**. Поставимо квадрат у координатни систем, тако да је координатни почетак у средишту квадрата $O$ и да је дужина страница квадрата једнака 2. Координате преосталих тачака су: $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$, $E(0,-1)$, $F(1,b)$, $G(a,1)$. Задатак се своди на то да покажемо да је $|OH| = 1$, где је $OH$ нормала на $FG$. Како су троуглови $ADG$ и $FBE$ слични, то је $|AD| : |DG| = |FB| : |BE|$, тј. $2 : (1+a) = (1+b) : 1$, па је $b = \dfrac{1-a}{1+a}$.

Једначина праве кроз тачке $F\left(1, \dfrac{1-a}{1+a}\right)$ и $G(a,1)$ гласи

$$y = \frac{2a}{a^2-1}x - \frac{a^2+1}{a^2-1}.$$

Једначина праве нормалне на $FG$, која пролази кроз координатни почетак, гласи $y = \dfrac{1-a^2}{2a}x$. Решавањем система ове две једначине добијамо координате тачке $H\left(\dfrac{2a}{a^2+1}, \dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$. Како је $OH \perp FG$ и

$$|OH| = \sqrt{\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2} = 1,$$

то $FG$ додирује кружницу уписану у квадрат.

**488**. Функција је непрекидна на интервалима $(-\infty, 0), (0,2), (2,+\infty)$, као композиција непрекидних функција. Потребно је још испитати непрекидност у тачкама 0 и 2. Изједначавајући леве и десне лимесе функције $f$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} \frac{\sin ax}{4x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{a}{4} = \frac{a}{4},\\
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} (b^2x^2 + b(x+2)) = 2b,\\
\lim_{x\to 2-} f(x) &= \lim_{x\to 2-} (b^2x^2 + b(x+2)) = 4b^2 + 4b,\\
\lim_{x\to 2+} f(x) &= e^{\frac{1}{2-x}} - 1 = 0 - 1 = -1,
\end{aligned}$$

у тим тачкама, добијамо систем $\dfrac{a}{4} = 2b$, $4b^2 + 4b = -1$, који представља потребан и довољан услов за непрекидност у тачкама 0 и 2. Његова решења су $a = -4$, $b = -\dfrac{1}{2}$.

**489**. Одаберемо произвољну шибицу и поделимо је да два једнака дела. Тиме добијамо један пар наспрамних страница правоугаоника. Преостале шибице поређамо у низ и на половини укупне дужине низа поделимо шибицу која се ту налази (ако је то између две узастопне шибице у низу, не радимо ништа). Тиме добијамо два подскупа (делова) шибица исте дужине, који представљају преостале две наспрамне странице правоугаоника.

**490**. Нека је $N$ пресечна тачка симетрале $\sphericalangle BAC$ и круга описаног око троугла $ABC$, различита од $A$. Тада је $\sphericalangle ANC = \sphericalangle ABC = \beta$, као периферијски углови над тетивом $AC$. Троуглови $ADB$ и $ADB_1$ су очигледно подударни, па је $\sphericalangle AB_1D = \sphericalangle ADB = \beta$. Одатле је $\sphericalangle DNC = \sphericalangle DB_1C = \beta$, па тачка $N$ припада и описаном кругу око троугла $B_1CD$, тј. $N \equiv E$. Означимо са $t$ тангенту круга описаног око троугла $B_1CD$ у тачки $E$. Тада је $\sphericalangle tEA = \sphericalangle DCE = \sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE = \dfrac{\alpha}{2}$, као периферијски углови над тетивом $BE$. Одатле заиста следи $t \parallel AC$.

**491**. Нека су $e_1, e_2, e_3$ јединични вектори ивица триедра, а углови међу њима $\alpha, \beta, \gamma$. Како збир три некомпланарна вектора никада није нула-вектор, имамо $\|e_1+e_2+e_3\|^2 > 0$,

$$\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|e_3\|^2 + 2e_1 \cdot e_2 + 2e_1 \cdot e_3 + 2e_2 \cdot e_3 > 0.$$

Из формуле за скаларни производ вектора и чињенице да су сви вектори јединични, следи $3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) > 0$, па је

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}.$$

**492**. Очигледно је да су бројеви $x$ и $y$ исте парности. Ако су оба парна, $x = 2x_1$ и $y = 2y_1$, једначина се своди на $32x_1^7 + 23 = y_1^2$, што је немогуће по модулу 4. Према томе, $x$ и $y$ су непарни. Због $x^7 = y^2 - 92 \geqslant -92$, важи $x \geqslant -1$. Лако се проверава да у случајевима $x = -1$ и $x = 0$ једначина нема целобројних решења. Надаље можемо претпоставити да су $x$ и $y$ природни бројеви. Дата једначина је еквивалентна једначини $x^7 + 128 = y^2 + 36$, чију десну страну можемо факторисати

$$(x+2)M = y^2 + 6^2,$$

где је $M = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64$. Очигледно је $M \equiv x^6 - 2x^5 \equiv 3 \pmod 4$, па број $M$ мора имати прост фактор $p \equiv 3 \pmod 4$. Прост број $p$ облика $4k+3$ дели збир квадрата $y^2 + 6^2$ једино ако дели оба квадрата, тј. $p \mid y$ и $p \mid 6$, па мора бити $p = 3$. Међутим, лако се проверава да је $M \equiv 1 \pmod 3$. Контрадикција! Једначина нема решења у скупу целих бројева.

**493**. Како је $P(0) = 0$, постоји полином $Q$ тако да важи $P(x) = xQ(x)$ и одатле

$$Q(k) = \frac{1}{k+1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Дефинишимо $H(x) = (x+1)Q(x) - 1$. Јасно је да је $H$ полином степена $n$ и $H(k) = 0$ за $k = 1, \ldots, n$, па га можемо представити у облику

$$H(x) = (x+1)Q(x) - 1 = a_0(x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

Замењујући $x = m > n$ у претходну једнакост, добијамо

$$Q(m) = \frac{a_0(m-1)(m-2)\cdots(m-n)+1}{m+1}.$$

С друге стране, замењујући $x = -1$ у исту релацију, добијамо

$$a_0 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Дакле,

$$Q(m) = \frac{(-1)^{n+1}(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{(n+1)!(m+1)} + \frac{1}{m+1},$$

и одатле

$$P(m) = \frac{(-1)^{n+1}m(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{(n+1)!(m+1)} + \frac{m}{m+1}.$$

**494**. Претпоставимо, без умањења општости, да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. Применићемо неједнакост Чебишева

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \cdot \frac{y_1+\cdots+y_n}{n} \geqslant \frac{x_1y_1+\cdots+x_ny_n}{n}$$

за $x_i = \dfrac{1}{a_i}$ и $y_i = \dfrac{1}{1+a_i}, i = 1, \ldots, n$. Како је $x_iy_i = x_i - y_i$, то је

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}{n} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}}{n} \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\right).$$

Множећи обе стране неједнакости са $n$ и делећи са $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}$, добијамо тражену неједнакост.

Једнакост важи ако и само ако је $a_1 = \cdots = a_n$.

**495**. Посматрајмо инверзију у односу на кружницу са центром $N$ и полупречником $NS$. Том инверзијом се кружница $\mathcal{C}$ пресликава у праву $t$ и обрнуто, права $t$ у кружницу $\mathcal{C}$. Самим тим се тачке $A$ и $B$ пресликавају редом у тачке $A'$ и $B'$. Кружница $k$, нормална на кружницу $\mathcal{C}$, пресликава се у кружницу $k'$, нормалну на праву $t$. То значи да је центар кружнице $k'$ на правој $t$ и да је дуж $A'B'$ пречник кружнице $k'$. Права $NO$ пресликава се у саму себе, па како је она нормална на кружницу $k$, нормална је и на њену слику $k'$. Другим речима, центар кружнице $k'$ лежи на правој $ON$. Како центар кружнице $k'$ припада и правој $t$ и правој $ON$, он се налази у пресеку те две праве, тј. поклапа се са тачком $O'$. Пошто је $O'$ центар кружнице $k'$, а $A'B'$ њен полупречник, следи да је тачка $O'$ средиште дужи $A'B'$.

**496**. Нека је $A_k$ број новчића у темену $A_k$. Посматрајмо шта се дешава са изразом

$$S = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$$

приликом извршавања трансформације из задатка. Уколико не долази до преласка новчића из темена $A_1$ у $A_n$ или обрнуто, онда постоје $i > 1$ и $j < n$ такви да новчић из темена $A_i$ прелази у теме $A_{i-1}$, док новчић из темена $A_j$ прелази у теме $A_{j+1}$. Након извршене трансформација вредност израза $S$ се промени за

$$\begin{aligned}\Delta S = &-(i-1)a_{i-1} - ia_i - ja_j - (j+1)a_{j+1}\\ &+(i-1)(a_{i-1}+1) + i(a_i-1) + j(a_j-1) + (j+1)(a_{j+1}+1) = 0.\end{aligned}$$

Ако новчић из темена $A_n$ прелази у теме $A_1$, док други новчић прелази из неког врха $A_i$ $(i > 1)$ у врх $A_{i-1}$, онда се вредност израза $S$ промени за

$$\begin{aligned}\Delta S = &-na_n - a_1 - (i-1)a_{i-1} - ia_i\\ &+n(a_n-1) + (a_1+1) + (i-1)(a_i+1) + i(a_i-1) = -n.\end{aligned}$$

Обратно, ако новчић из темена $A_1$ прелази у теме $A_n$, док други новчић прелази из неког темена $A_i$ $(i < 1)$ у врх $A_{i+1}$, онда се вредност израза $S$ промени за

$$\begin{aligned}\Delta S = &-na_n - a_1 - (i-1)a_{i-1} - ia_i\\ &+n(a_n+1) + (a_1-1) + i(a_i-1) + (i+1)(a_i+1) = n.\end{aligned}$$

Коначо, уколико новчић из темена $A_1$ пређе у врх $A_n$ и истовремено новчић из темена $A_n$ пређе у теме $A_1$, тада очигледно вредност израза $S$ остаје непромењена. Закључујемо да се израз $S$ у сваком случају промени за умножак броја $n$, па је остатак при дељењу броја $S$ бројем $n$ инваријанта.

Означимо са $S_P$ почетну вредност израза $S$, а са $S_K$ вредност коју има израз $S$ уколико дође до коначног распореда описаног у задатку. Тада је

$$\begin{aligned}S_P &= 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + \cdots + n\cdot n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\ S_K &= 1\cdot n + 2\cdot(n-1) + \cdots + n\cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.\end{aligned}$$

Да би се тражени коначни распоред могао постићи, неопходно је да разлика $S_K - S_P$ буде дељива с $n$. Међутим, та разлика је једнака

$$S_K - S_P = \frac{-(n-1)n(n+1)}{6},$$

а тај број не може бити дељив са $n$ уколико $n$ није узајамно прост са 6. Закључујемо да је неопходан услов да би се тражени коначни распоред могао постићи да је $n$ узајамно прост са 6, тј. да је $n$ облика $6k+1$ или $6k+5$, па је одговор у делу (а) одричан.

Испоставља се да је тај услов и довољан, па је одговор у делу (б) потврдан. У темену $A_1$ се на почетку налази 1 новчић, а на крају у том темену желимо 2011 новчића,

што значи да нам недостаје 2010 новчића. С друге стране, у темену $A_{2011}$ има 2010 новчића вишка. Слично, у темену $A_2$ нам недостаје 2008 новчића, а у темену $A_{2010}$ има управо толико новчића вишка. На тај начин можемо темена распоредити у 1005 парова тако да првом темену сваког пара недостаје управо онолико новчића колико друго теме тога пара има вишка (у темену $A_{1006}$ се на почетку налази 1006 новчића, што је управо број новчића који желимо у том темену и на крају). Погледајмо колико бисмо потеза морали да направимо у једном смеру да бисмо у сваком пару пребацили одговарајући број новчића: за пар $(A_1, A_{2011})$ имамо 2010 новчића који би требало да пређу удаљеност 1, за пар $(A_2, A_{2010})$ имамо 2008 новчића који би требало да пређу удаљеност 3, итд. Укупан број потеза у једном смеру потребних да би у сваком пољу био одговарајући број новчића је

$$1 \cdot 2010 + 3 \cdot 2008 + \cdot + 2009 \cdot 2 = \frac{2010 \cdot 2011 \cdot 2012}{6} = 335 \cdot 2011 \cdot 2012.$$

Дакле, одабиром ових потеза у једном смеру можемо постићи да се у сваком темену налази жељени број новчића. Преостаје да докажемо да је могуће направити исто толико потеза у супротном смеру који неће променити распоред новчића. Тражене потезе у супротном смеру направимо тако што одаберемо произвољни новчић и њега завртимо $335 \cdot 2012$ пуних кругова. Лако видимо да редослед оваких потеза у једном и другом смеру можемо да сложимо тако да радимо истовремено по један потез у сваком смеру.

**497**. Приметимо да је $a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 9, a_5 = 25$, па важи $a_0 = F_0^2, a_1 = F_1^2, a_2 = F_2^2, a_3 = F_3^2, a_4 = F_4^2, a_5 = F_5^2$, где је $(F_n)_{n \geqslant 0}$ Фибоначијев низ.

Индукцијом ћемо показати да је $a_n = F_n^2$ за све $n \geqslant 0$. Базу смо већ показали, па претпоставимо да је $a_k = F_k^2$ за све $k \leqslant n$. Специјално

$$a_n = F_n^2, \quad a_{n-1} = F_{n-1}^2, \quad a_{n-2} = F_{n-2}^2. \tag{2.95}$$

Из дате рекурентне везе имамо

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1} &= 2(-1)^n, \\ a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} &= 2(-1)^{n-1}, \quad n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Сабирањем претходних једнакости добијамо

$$a_{n+1} - 2a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \quad n \geqslant 2. \tag{2.96}$$

Из (2.95), (2.96) и добро познатих идентитета за чланове Фибоначијевог низа, коначно следи

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 = (F_n + F_{n-1})^2 + (F_n - F_{n-1})^2 - F_{n-2}^2 \\ &= F_{n+1}^2 + F_{n-2}^2 - F_{n-2}^2 = F_{n+1}^2, \end{aligned}$$

чиме је доказ завршен.

**498**. Ојлерова функција је мултипликативна, тј. важи $\varphi(kl) = \varphi(k)\varphi(l)$ за свака два узајамно проста природна броја $k, l$. Такође, за прост број $p$ и природан број $l$ важи $\varphi(p^l) = p^l - p^{l-1}$.

Нека је $n = 2 \cdot 3^m$, где је $m$ произвољан природан број. Тада је

$$\varphi(n) = \varphi(2 \cdot 3^m) = \varphi(2)\varphi(3^m) = 3^m - 3^{m-1} = 2 \cdot 3^{m-1} = \frac{n}{3}$$

за бесконачно много природних бројева $n$, што је и требало доказати.

**499**. Нека је то трапез $ABCD$ са основицама $AB = 5$ и $CD = 1$. Његова висина износи $\sqrt{3}$. Уочимо правилан шестоугао $CDA_1A_2A_3A_4$ странице 1 и једнакостраничне троуглове $A_1A_2A_5$ и $A_3A_4A_6$. Тачке $A_2, A_3, A_5, A_6$ очигледно се налазе на дужи $AB$ (четвороугао $A_5A_6CD$ је једнакокраки трапез са оштрим углом од $60°$) и важи $AA_5 = BA_6 = 1$. Означимо са $O$ центар шестоугла. Тачке $A_1, O, A_4$ налазе се унутар трапеза $ABCD$.

Посматрајмо 11 тачака $O, A, B, C, D, A_1, \ldots, A_6$. Како су прекривене са 10 кругова полупречника $r$, постоје две међу њима које су прекривене истим кругом. Најмање растојање међу овим тачкама је 1, па пречник $2r$ мора бити бар 1, односно $r \geqslant \frac{1}{2}$.

**500**. Како је функција $f$ непрекидна и ограничена, то постоје коначни $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Посматрајмо помоћну функцију $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дату са $g(x) = f(x) - ax$. У зависности од тога да ли је $a > 0$ или $a < 0$, важи: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; или $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. У сваком случају постоје тачке у којима је вредност функције позитивна и тачке у којима је вредност функције негативна. Пошто је функција $g$ непрекидна, у оба случаја мора постојати неко $x_0 \in \mathbb{R}$ за које је $g(x_0) = 0$. Самим тим је $f(x_0) = ax_0$.

**501**. Четвороугао $HBKC$ је паралелограм, због услова задатка. Лако се показује да је $\sphericalangle BHC = 180° - \sphericalangle BAC = \sphericalangle BKC$, па важи $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BKC = 180°$, односно тачка $K$ лежи на описаној кружници троугла $ABC$. Како је $BH \perp AC$ и $BH \parallel KC$, то је $KC \perp AC$, односно $\sphericalangle ACK = \sphericalangle ABK = 90°$. Овим је доказ завршен.

НАПОМЕНА. Приметимо да је тежишна дуж $AA_1$ троугла $ABC$ уједно и тежишна дуж троугла $AHK$, па је и тежиште $T$ троугла $ABC$ уједно и тежиште троугла $AHK$. Ако је $O$ центар описане кружнице троугла $ABC$, тежишна дуж $HO$ троугла $AHK$ садржи тежиште $T$ и важи $HT : TO = 2 : 1$. Као што је познато, права одређена тачкама $H, T$ и $O$ назива се *Ојлерова права троугла*.

**502**. Троуглови $BCD$ и $DAL$ су подударни (став УСУ), јер је $BC = AD$, $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ALD = 90°$ и $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DAL$ (као углови са нормалним крацима). Из ове подударности добијамо $BD = DL$, односно троугао $BDL$ је једнакокрак. Како је $\sphericalangle BDL = 180° - \sphericalangle ADL = 180° - \sphericalangle CBD$, то је

$$\sphericalangle DBL = \frac{180° - \sphericalangle BDL}{2} = \frac{\sphericalangle CBD}{2} = \frac{\sphericalangle ABC}{2},$$

осносно $BL$ је симетрала унутрашњег угла $\sphericalangle ABC$.

**503**. Према Виетовим формулама је $x_1 + x_2 = -2011$, $x_1x_2 = 1$, $x_1' + x_2' = -2012$ и $x_1'x_2' = 1$. Множењем првог и трећег, односно другог и четвртог фактора у производу добијамо

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_1')(x_2 - x_2')(x_1 - x_2')(x_2 - x_1') \\
&= [x_1^2 - x_1(x_1' + x_2') + x_1'x_2'][x_2^2 - x_2(x_1' + x_2') + x_1'x_2'] \\
&= (x_1^2 + 2012x_1 + 1)(x_2^2 + 2012x_2 + 1) \\
&= (x_1^2 + 2012x_1 + x_1x_2)(x_2^2 + 2012x_2 + x_1x_2) \\
&= x_1x_2(x_1 + x_2 + 2012)^2 = 1.
\end{aligned}$$

**504**. (а) Имајући у виду да је $x^2 + x + 1 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, неједначина прелази у систем две неједначине

$$\begin{aligned}
4x^2 + (a+4)x + 4 > 0, \\
2x^2 + (2-a)x + 2 > 0.
\end{aligned}$$

Да би свака од ових неједначина била задовољена за све $x \in \mathbb{R}$, потребно је и довољно да њихове дискриминанте буду негативне. Из прве добијамо услов $a \in (-12, 4)$, а из друге $a \in (-2, 6)$. Према томе, обе неједначине ће бити задовољене за свако $x \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $a \in (-2, 4)$.

(б) Напишимо једнакост $y = |f(x)|$ у развијеном облику

$$y = \begin{cases} x^2 + (a+1)x + 1, & x^2 + (a+1)x + 1 \geqslant 0, \\ -(x^2 + (a+1)x + 1), & x^2 + (a+1)x + 1 < 0. \end{cases}$$

Очигледно је

$$\begin{aligned}
&x^2 + (a+1)x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & -3 \leqslant a \leqslant 1, \\ x \leqslant x_1 \vee x \geqslant x_2, & a < -3 \vee a > 1, \end{cases} \\
&x^2 + (a+1)x + 1 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2,\ a < -3 \vee a > 1,
\end{aligned}$$

при чему су

$$x_1 = \frac{-a - 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 3}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-a - 1 + \sqrt{a^2 + 2a - 3}}{2}.$$

Очигледно све криве садрже тачку $M(0, 1)$.

(в) За $-3 \leqslant a \leqslant 1$ график функције $y = |f(x)|$ представља параболу $y = x^2 + (a+1)x + 1$, са теменом у тачки $T\left(-\frac{a+1}{4}, \frac{4-(a+1)^2}{4}\right)$. Лако се показује да је геометријско место темена ових парабола крива $y = 1 - x^2$, $x \in [-1, 1]$. Наиме, очигледно је да теме произвољне параболе припада параболи $y = 1 - x^2$, $x \in [-1, 1]$, због њиховог облика. Обрнуто, произвољна тачка $(x_0, y_0)$ са параболе (тј. $y_0 = 1 - x_0^2$, $x_0 \in [-1, 1]$) је теме параболе којој одговара вредност параметра $a = 1 - 4x_0$.

**505**. (а) Нека је $A'$ подножје висине из темена $A$ тетраедра $ABCD$. Уочимо раван $\pi$ одређену неколинеарним тачкама $A, B, A'$. Како је $AA'$ висина, то је $AA'$ нормална на свим правама равни основе $BCD$. Специјално, $AA' \perp CD$. Како је и $AB \perp CD$, то је $CD \perp \pi$, јер је нормална на две праве равни $\pi$ које се секу. Самим тим је $CD$ нормална на свим правама равни $\pi$, па и на $BA'$, тј. $BA'$ је висина троугла $BCD$. Аналогно се показује да је $DA'$ висина троугла $BCD$, па је $A'$ ортоцентар троугла $BCD$. Праве $CA'$ и $AA'$ су нормалне на $BD$, па је $BD$ нормална на равни одређеном тачкама $A, C$ и $A'$ и специјално на $AC$.

(б) Нека су $M, N, P, Q, R$ и $S$ средишта страница $AB, CD, AD, BC, AC, BD$, редом. Лако се показује да су четвороуглови $MQNP, MRNS$ и $PRQS$ паралелограми, чије су странице паралелне одговарајућим страницама тетраедра као средње линије. Дијагонале $MN, PQ$ и $RS$ секу се у једној тачки $T$ која их полови и назива се тежиштем тетраедра. За тетредар који задовољава услове задатка (тзв. *ортогонални тетраедар*) важи да су ови паралелограми додатно и правоугаоници. Самим тим су њихове дијагонале подударне и важи $TM = TN = TP = TQ = TR = TS$, па средишта ивица припадају сфери са центром у тежишту $T$ тетраедра $ABCD$.

**506**. Означимо $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $\alpha = \sphericalangle BAC$ и са $D$ пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена $B$ и странице $AC$. Из троугла $ABD$ имамо

$$\overrightarrow{AS} = \frac{|BS|}{|BD|}\overrightarrow{AD} + \frac{|SD|}{|BD|}\overrightarrow{AB}. \tag{2.97}$$

На основу теореме о симетрали угла је $\dfrac{|AD|}{|DC|} = \dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{c}{a}$, па је $\overrightarrow{AD} = \dfrac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}$. Како је $CS$ симетрала у троуглу $BCD$, важи $\dfrac{|BS|}{|SD|} = \dfrac{|BC|}{|CD|} = \dfrac{a}{\frac{ab}{a+c}} = \dfrac{a+c}{b}$, одакле је $\dfrac{|BS|}{|BD|} = \dfrac{a+c}{a+b+c}$ и $\dfrac{|SD|}{|BD|} = \dfrac{b}{a+b+c}$. Замењујући ове једнакости у (2.97) добијамо

$$\overrightarrow{AS} = \frac{a+c}{a+b+c}\overrightarrow{AD} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} = \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}. \tag{2.98}$$

Користећи особине скаларног производа, добијамо

$$\begin{aligned}
|AS|^2 &= \overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AS} \\
&= \left(\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} \\
&\quad + \frac{2bc}{(a+b+c)^2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\frac{bc}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b+c}\right)^2 \cdot 2\cos\alpha \\
&= 2\left(\frac{bc}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b+c}\right)^2 \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{bc} \\
&= \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(a+b+c)^2},
\end{aligned}
$$

и коначно $|AS| = \sqrt{\dfrac{bc(b+c-a)}{a+b+c}}$.

НАПОМЕНА. Задатак се може решити и применом Питагорине теореме на $\triangle ASP$, где је $P$ додирна тачка уписаног круга и странице $AB$, уз коришћење образаца за дужине тангентних дужи на уписани круг и његовог полупречника преко дужина страница троугла.

**507**. Решавајући одговарајући систем једначина лако добијамо да су пресечне тачке датог круга и дате параболе $M\left(\frac{p}{2}, p\right)$ и $N\left(\frac{p}{2}, -p\right)$. Због симетрије довољно је да одредимо угао између круга и параболе у тачки $M$. Претпоставимо да је $p > 0$. Једначина горње полукружнице је $y = \sqrt{p^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$, а одговарајући извод $\dfrac{\frac{p}{2} - x}{\sqrt{p^2 - (x - \frac{p}{2})^2}}$ и коефицијент правца тангенте у $M$ $k_1 = 0$ (наравно, ово смо могли добити и ако приметимо да је $M$ тачка кружнице која је најудаљенија од $x-$осе). Једначина горњег дела параболе је $y = \sqrt{2px}$, а одговарајући извод $\sqrt{\dfrac{p}{2x}}$ и коефицијент правца тангенте у $M$ $k_2 = 1$. Ако је $\varphi$ оштар угао између тангенти у тачки $M$, из обрасца $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$ добијамо $\varphi = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Приметимо да се ово решење добија и за позитивне и за негативне вредности параметра $p$, док је за $p = 0$ друга крива заправо $x-$ оса и одговарајући угао је тривијално $\dfrac{\pi}{2}$.

**508**. Дата неједнакост еквивалентна је неједнакости $\ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1} > 0$. Означимо $f(x) = \ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1}$. Тада је

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}.$$

Како је $f'(x) > 0$ за $x > 1$, то је функција $f$ растућа на интервалу $(1, +\infty)$. Сада из чињенице $f(1) = 0$ следи $f(x) > 0$ за $x > 1$, што је и требало доказати.

**509**. Из друге једначине имамо $c^2 = 8 - (a^2 + b^2)$, па користећи познату неједнакост $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ добијамо

$$c^2 \leqslant 8 - \frac{1}{2}(a+b)^2 = 8 - \frac{1}{2}(4-c)^2.$$

Последња неједнакост еквивалентна је неједнакости $3c^2 - 8c \leqslant 0$, одакле добијамо $0 \leqslant c \leqslant \frac{8}{3}$. За све ове вредности могуће је наћи $a$ и $b$ тако да систем буде задовољен. Заиста, из једначина непосредно следи $a+b = 4-c$ и $ab = (c-2)^2$, па су $a$ и $b$ решења квадратне једначине

$$t^2 + (c-4)t + (c-2)^2 = 0.$$

Њена дискриминанта је $c(8-3c) \geqslant 0$, па су решења реална.

**510**. Уочимо да се потезом $n = (n-1)+1 \mapsto (n-1)\cdot 1 = n-1$ изречени број смањује тачно за 1, па га низом таквих потеза можемо произвољно смањити. Слично, потезом $n = (n-2)+2 \mapsto (n-2)\cdot 2 = 2n-4$ се изречени број $n$ повећава уколико је $2n-4 > n$, тј. ако је $n > 4$. Кренувши од било ког броја $n > 4$, понављањем тог потеза може се доћи до неког броја који је већи од 2011 и затим смањивањем како је горе описано можемо добити број 2011. Лако се проверава да бројеве $1, 2, 3, 4$ допуштеним потезима не можемо увећати, па почевши од њих не можемо доћи до броја 2011. Дакле, игра је могла почети било којим бројем $n$ који задовољава $n \geqslant 5$.

**511**. Одговор: $n = 12$.

Да бисмо доказали да је $n \geqslant 12$, морамо доказати да постоји 12 тачака $(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 12$, са целобројним координатама, при чему тежиште никоје четири међу њима нема обе координате целобројне. Ово ће очигледно бити испуњено ако одаберемо координате тачака тако да буде задовољено $x_i \equiv 0 \pmod 4$ за $i = 1, \ldots, 6$; $x_i \equiv 1 \pmod 4$ за $i = 7, \ldots, 12$; $y_i \equiv 0 \pmod 4$ за $i = 1, 2, 3, 10, 11, 12$; $y_i \equiv 1 \pmod 4$ за $i = 4, \ldots, 9$.

Нека су сада $P_i$, $i = 1, 2, \ldots, 13$, произвољне целобројне тачке. Докажимо да међу њима постоје четири чије је тежиште такође целобројна тачка. Приметимо да, према Дирихлеовом принципу, међу произвољних пет од ових тачака постоје две чије су и $x$ и $y$ координате исте парности. Самим тим, међу произвољних пет целобројних тачака постоје две чије је средиште целобројна тачка. Примењујући ову чињеницу неколико пута узастопно можемо наћи пет дисјунктних парова тачака чија су средишта целобројне тачке. Међу тим целобројним средиштима опет можемо наћи два, рецимо $M$ и $M'$, чије је средиште $C$ целобројна тачка. Коначно, ако су $M$ и $M'$ средишта дужи $P_iP_j$ и $P_kP_l$, редом, $\{i, j, k, l\} \subset \{1, 2, \ldots, 13\}$, целобројна тачка $C$ је тежиште четворке тачака $P_i, P_j, P_k, P_l$.

**512**. Одговор је сви бројеви облика $2^r3^s$ за ненегативне целе бројеве $s$ и $r$ који задовољавају $s \leqslant r \leqslant 2s$.

Нека је $m = (p_1+1)(p_2+1)\cdots(p_k+1)$ и претпоставимо да је $p_k$ највећи прост фактор. Ако је $p_k > 3$, тада $p_k$ не може делити $m$. Заиста, уколико $p_k$ дели $m$, мора делити и $p_i + 1$ за неко $i$. Међутим, ако је $p_i = 2$, тада је $p_i + 1 < p_k$, а иначе је $p_i + 1$ паран број чији су фактори 2 и $\frac{p_i+1}{2}$, оба строго мања од $p_k$. Дакле, једини прости фактори броја $n$ су 2 и 3, па можемо писати $n = 2^r3^s$. Тада је $m = 3^r4^s = 2^{2s}3^r$ и дељив је са $n$ ако и само ако је $s \leqslant r \leqslant 2s$.

**513**. За $m = 0$ једначина постаје $x^4 - x^3 - x^2 + x = 0$ и има корене $x_1 = 0, x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = 1$.

Ако је $m \neq 0$, решићемо једначину по $m$. Квадратна једначина

$$2xm^2 + (x^2 - 2x^3 + 1)m + x^4 - x^3 - x^2 + x = 0$$

има дискриминанту

$$\Delta = (x^2 - 2x^3 + 1)^2 - 8x^2(x^3 - x^2 - x + 1) = (2x^3 - 3x^2 + 1)^2.$$

Њена решења су $m_1 = x^2 - x$ и $m_2 = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. Почетна једначина се може трансформисати у једначину

$$[m - (x^2 - x)]\left[m - \frac{x^2 - 1}{2x}\right] = 0,$$

односно једначине $x^2 - x - m = 0$ и $x^2 - 2mx - 1 = 0$. Решења су

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4m}}{2}, \quad x_{3,4} = m \pm \sqrt{1 + m^2}.$$

**514**. Нека права кроз $L$ паралелна са $BD$ сече праве $AC$ и $AG$ у тачкама $N$ и $R$, редом. Како је $DO = OB$, на основу Талесове теореме следи да је $NR = NL$, па је тачка $N$ средиште дужи $LR$. Нека је $K$ средиште дужи $GL$. Дакле, $NK$ је средња линија троугла $GLR$, па је $NK \parallel GR$. Одавде је $\sphericalangle AGL = \sphericalangle NKL$, а како је $\sphericalangle AGL = \sphericalangle ACL$ као периферијски углови над тетивом $AL$, то је $\sphericalangle NKL = \sphericalangle ACL = \sphericalangle NCL$. Одавде следи да је четвороугао $NKCL$ тетиван, па даље закључујемо да је $\sphericalangle KCN = \sphericalangle KLN$, као периферијски углови над тетивом $KN$. Углови $\sphericalangle KLN = \sphericalangle KZO$ су једнаки као углови са паралелним крацима, па је $\sphericalangle KCO = \sphericalangle KCN = \sphericalangle KZO$. Зато је $KCZO$ тетиван четвороугао и $\sphericalangle ZCA = \sphericalangle ZCO = \sphericalangle ZKO = \sphericalangle LKO = 90^\circ$, јер је $OK \perp GL$ ($OG = OL$ и $K$ је средиште $GL$).

**515**. Претпоставимо супротно, тј. да је број $A = \sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$ рационалан. Означимо са $\alpha = \sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}}$ и приметимо да је $\sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - 1}} = \dfrac{1}{\alpha}$. Према томе, број $A = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ је рационалан.

Индукцијом ћемо показати да је број $\alpha^k + \dfrac{1}{\alpha^k}$ рационалан за све $k > 1$. Заиста, бројеви

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2,$$

$$\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 - 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

су рационални, док из идентитета

$$\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} = \left(\alpha^{k-1} + \frac{1}{\alpha^{k-1}}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - \left(\alpha^{k-2} + \frac{1}{\alpha^{k-2}}\right)$$

следи тврђење.

Специјално, број $\alpha^n + \dfrac{1}{\alpha^n}$ је рационалан, односно $a + \sqrt{a^2-1} + a - \sqrt{a^2-1} = 2a$ је рационалан број. Контрадикција!

**516**. Уочимо правилан 2011-угао $A_1A_2\ldots A_{2011}$, уписан у кружницу пречника $A_1M$. Нека је $\sphericalangle MA_1A_{1005} = \sphericalangle MA_1A_{1006} = \alpha$. Тада је очигледно $\sphericalangle A_{2011}A_1A_2 = 4018\alpha$, па је $\alpha = \dfrac{\pi}{4022}$. Означимо са $d_1, d_2, \ldots, d_{1004}$ и $a$ дужине дијагонала и странице многоугла, редом. Из троуглова $A_iA_1A_{2013-i}$, $i = 1, 2, \ldots, 1005$, добијамо низ једнакости

$$\begin{aligned}
d_1 &= 2a\sin 2009\alpha = 2a\sin\frac{2009\pi}{4022},\\
d_2 &= 2d_1\sin 2007\alpha = 2d_1\sin\frac{2007\pi}{4022},\\
&\vdots\\
d_{1004} &= 2d_{1003}\sin 3\alpha = 2d_{1003}\sin\frac{3\pi}{4022},\\
a &= 2d_{1004}\sin\alpha = 2d_{1004}\sin\frac{\pi}{4022}.
\end{aligned}$$

Након множења ових 1005 једнакости и сређивања добијамо

$$\sin\frac{\pi}{4022}\sin\frac{3\pi}{4022}\sin\frac{5\pi}{4022}\cdots\sin\frac{2009\pi}{4022} = \frac{1}{2^{1005}}.$$

**517**. За поља прве врсте нема наметнутих услова, односно могу бити обојена произвољно. Произвољно поље друге врсте може бити обојено у црно ако је поље изнад њега, у првој врсти, обојено у црно или ако су сва поља пре њега, у другој врсти, обојена у црно. Претпоставимо да је првих $k$ поља друге врсте обојено у црно и да је $(k+1)$-во поље обојено у бело или да је $k = n$. Уколико је $k < n$, за свако од $k+1$ поља прве врсте имамо две могућности, док за сваку од преосталих $n-k-1$ колона имамо три могућности. У случају $k = n$ имамо $2^n$ могућности за бојење прве врсте. Према томе, укупан број табли $2 \times n$ без *заробљених* поља дат је формулом

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}3^{n-k-1} + 2^n$$

и једнак је $2 \cdot 3^n - 2^n$.

**518**. Посматрајмо један трапез $ABCD$ који задовољава услове задатка и означимо са $O$ пресечну тачку дијагонала. Нека је $F$ пресечна тачка праве кроз теме $C$ паралелне краку $AD$ и основице $AB$. Тада је $BC + CF = BC + AD = \text{const}$. Према томе, тачка $C$ описује елипсу чије су жиже тачке $B$ и $F$. Из сличности троглова $AOB$ и $DOC$ имамо $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AB}{DC}$. Такође,

$$AC = AO + OC = OC\left(1 + \frac{AB}{CD}\right) = OC \cdot \frac{AB + CD}{CD},$$

одакле следи

$$\frac{AO}{AC} = \frac{AB}{DC + AB} = k = \text{const}.$$

Како је однос $\dfrac{AO}{AC}$ константан и тачка $A$ је фиксирана, тачка $O$ описује елипсу добијену хомотетијом са коефицијентом $k$ од елипсе коју описује тачка $C$.

**519**. Размотримо прво импликацију ($\Rightarrow$). На основу неједнакости између аритметичке и квадратне средине имамо

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Како је $\left|\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right| \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} = 0$, користећи теорему о два полицајца за реалне низове, добијамо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 0$.

Обрнута импликација ($\Leftarrow$) није тачна. Узмимо на пример низ $x_n = (-1)^n$ и приметимо да је

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{ако је } n \text{ паран}, \\ -\dfrac{1}{n}, & \text{ако је } n \text{ непаран}. \end{cases}$$

Према томе, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} = 1$, што је контрадикција.

**520**. Приметимо да важи

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \geqslant \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = p(p-a)$$

и слично $m_b^2 \geqslant p(p-b)$ и $m_c^2 \geqslant p(p-c)$. Одавде следи

$$\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-a}\right) = \frac{ab + bc + ca - p^2}{S^2},$$

где је $p$ полуобим, а $S$ површина датог троугла. С друге стране, на основу познатих образаца за дужине полупречника споља приписаних кругова, добијамо

$$\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{1}{S^2}[(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2] = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - p^2}{S^2}.$$

Сада тражена неједнакост лако следи користећи познату неједнакост $ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$, односно ако и само ако је троугао једнакостраничан.

**521**. Како је $P(-1) = 0$ (где је $P(x) = x^{2011} + 1$), то је дати полином дељив полиномом $x + 1$ и можемо га написати у облику $P(x) = (x + 1)Q_1(x)$, где је $Q_1(x)$ такође полином са целобројним коефицијентима. Ако извршимо дељење полинома $P(x)$ полиномом $x + 1$, лако добијамо да је $Q_1(x) = x^{2010} - x^{2009} + x^{2008} - \cdots - x + 1$. Даље нас интересују количник и остатак полинома $Q_1(x)$ при дељењу са $x + 1$. Како је $Q_1(-1) = 2011$, то је $Q_1(x) = (x + 1)Q_2(x) + 2011$, односно (ако се вратимо на полином $P(x)$) важи да је

$$P(x) = (x + 1)[(x + 1)Q_2(x) + 2011] = (x + 1)^2 Q_2(x) + 2011(x + 1).$$

Из последње једнакости закључујемо да је тражени остатак $2011x + 2011$.

**522**. У општем случају важи да је $x - 1 < [x] \leqslant x$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Међутим, ако $x$ није цео, јасно је да важи и прецизније: $x - 1 < [x] < x$. Како бројеви $2011 \cdot \log_{10} 2$ и $2011 \cdot \log_{10} 5$ очигледно нису цели, примењујући претходне неједнакости можемо видети да је $2009 < [2011 \cdot \log_{10} 2] + [2011 \cdot \log_{10} 5] < 2011$ (искористили смо да је $2011 \cdot \log_{10} 2 + 2011 \cdot \log_{10} 5 = 2011$). Сада је јасно да је тражени резултат број 2010, као једини цео број строго између 2009 и 2011.

**523**. Задатак ћемо решити индукцијом по броју екипа $n$. За $n = 2$ нумеришемо победничку екипу бројем 1, а ону која је изгубила у међусобном дуелу бројем 2. Претпоставимо да тврђење важи за произвољних $n \geqslant 2$ екипа и докажимо да одатле следи да важи и за $n + 1$ екипа. Одаберимо произвољних $n$ екипа и нумеришимо их, према индуктивној хипотези, бројевима $1, \ldots, n$ тако да важе услови задатка. Ако је преостала екипа изгубила све мечеве, једноставно је нумеришемо бројем $n + 1$, јер је изгубила и од тима $n$. Претпоставимо зато да је преостала екипа победила у бар једном мечу и нека је $j$ број којим је означен тим са најмањим индексом међу онима који су изгубили од преосталог (ненумерисаног) тима. Нумеришемо преостали тим бројем $j$, а нумерацију свих тимова означених претходно бројевима $j, j + 1, \ldots, n$ повећамо за 1. Очигледно је да су услови задатка испуњени, па је доказ завршен.

**524**. Посматрајмо граф чији чворови представљају особе, а гране познанства. Претпоставимо да је сваки чвор $A$ спојен са сваким другим чвором или директно или преко трећег чвора. Чвор $A$ је спојен ивицама са 4 чвора, од којих је сваки спојен са још 3 додатна чвора. То је укупно 17 различитих чворова, па нема додатних. Преосталих $\frac{17 \cdot 4}{2} - 16 = 18$ грана може спајати једино 12 чворова који нису директни суседи чвора $A$. Свака од тих 18 грана одређује један цикл дужине 5 који пролази кроз $A$. Како је чвор $A$ произвољан, тих 18 циклова пролази кроз сваки од преосталих 16 чворова. Због тога имамо $\frac{18 \cdot 17}{5}$ циклова, што је очигледна контрадикција.

**525**. Збир и разлика два квадратна тринома не мора бити опет квадратни трином. Назовимо ипак дискриминантом функције $f(x) = ax^2 + bx + c$ (где је дозвољено и $a = 0$) број $D = b^2 - 4ac$. Ако функција нема реалне корене, тада је $D \leqslant 0$. Заиста, ако је $a \neq 0$, тада је функција $f$ квадратна функција која нема реалне корене, па је $D < 0$. Ако је $a = 0$, мора бити и $b = 0$ (иначе би ово била неконстантна линеарна функција и имала би реалан корен) и тада је $D = 0$.

Означимо са $f_1, \ldots, f_n$ дате триноме, са $D_i$ њихове дискриминанте, са $D_{ij}$ дискриминанту разлике $f_i - f_j$ (индекси $i, j$ узимају вредности од 1 до $n$), са $D$ дискриминанту збира свих тринома. Из услова задатка добијамо да је $D_i > 0$ за свако $i$ и $D_{ij} \leqslant 0$ за све $i \neq j$, па је довољно доказати да одавде следује да је $D > 0$. Нека је $f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$. Тада је

$$\begin{aligned}
D_i &= b_i^2 - 4a_i c_i, \\
D_{ij} &= (b_i - b_j)^2 - 4(a_i - a_j)(c_i - c_j) = D_i + D_j - 2b_i b_j + 4a_i c_j + 4a_j c_i, \\
D &= (b_1 + \cdots + b_n)^2 - 4(a_1 + \cdots + a_n)(c_1 + \cdots + c_n) \\
&= \sum_i D_i + \sum_{i<j} (2b_i b_j - 4a_i c_j - 4a_j c_i),
\end{aligned}$$

одакле следује једнакост

$$D = n \sum_i D_i - \sum_{i<j} D_{ij}. \tag{2.99}$$

Из (2.99) и услова $D_i > 0$ и $D_{ij} \leqslant 0$ одмах следује $D > 0$.

**526**. Замењујући $cd = \dfrac{1}{ab}$ и $da = \dfrac{1}{bc}$ и користећи добро познату неједнакост $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{4}{x+y}$ која важи за позитивне реалне бројеве, добијамо низ (не)једнакости

$$\begin{aligned}
&\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \\
&= (1+ab)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{ab+abc}\right) + (1+bc)\left(\frac{1}{1+b} + \frac{1}{bc+bcd}\right) \\
&\geqslant (1+ab)\frac{4}{1+a+ab+abc} + (1+bc)\frac{4}{1+b+bc+bcd} \\
&= 4\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc} + \frac{1+bc}{1+b+bc+bcd}\right) \\
&= 4\left(\frac{1+ab}{1+a+ab+abc} + \frac{a+abc}{a+ab+abc+abcd}\right) = 4.
\end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c = d = 1$.

**527**. Нека уписана кружница додирује странице $AB$, $BC$, $CA$ троугла $ABC$ у тачкама $C_1$, $A_1$, $B_1$ редом и нека је $|AC_1| = |AB_1| = x$, $|BC_1| = |BA_1| = y$, $|CA_1| = |CB_1| = z$. Тада је $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$, па из једнакости површина $s \cdot r = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (где је $s$ полуобим, а $r$ полупречник уписане кружнице троугла $ABC$) лако добијамо да важи једнакост

$$x + y + z = xyz. \tag{2.100}$$

Како су $a, b, c$ цели бројеви, то су $x, y, z$ или цели бројеви или половине целих бројева. Ако нису цели, онда су бројеви $2x, 2y, 2z$ непарни. Множењем (2.100) са 8 добијамо

$4(a+b+c) = 2x \cdot 2y \cdot 2z$, што је немогуће јер је лева страна паран број, а десна непаран. Дакле, једначину (2.100) морамо решити у скупу целих бројева. Нека је $x \leqslant y \leqslant z$. Тада је $xyz \leqslant 3z$, одакле је $xy \leqslant 3$. Разликујемо следеће случајеве:

- $x = y = 1$, тада је $2 + z = z$, што је немогуће;
- $x = 1, y = 2$, тада је $z = 3$;
- $x = 1, y = 3$, тада је $z = 2$, што се противи услову $x \leqslant y \leqslant z$.

Дакле, $x = 1, y = 2, z = 3$, док су $a = y + z = 5, b = x + z = 4, c = x + y = 3$ странице троугла. Провером се закључује да овај троугао заиста задовољава услове задатка.

**528**. Дата једначина је еквивалентна једначини

(2.101) $a(\cos^2 c + \cos^2 y + \cos^2 z) + (1 - a)(\cos x + \cos y + \cos z) + 3 - 6a = 0.$

Посматрајмо квадратну функцију $f(t) = at^2 + (1 - a)t + 1 - 2a, t \in [-1, 1]$. Реална решења једначине $f(t) = 0$ су $t_1 = 1, t_2 = \dfrac{2a - 1}{a}, a \neq 0$. Разликујемо 3 случаја.

- $a < 0$. Тада је $\dfrac{2a - 1}{a} > 1$, па на основу својства квадратне функције закључујемо да је $f(t) \geqslant 0$ за свако $t \in [-1, 1]$, при чему је $f(t) = 0$ ако и само ако је $t = -1$.
- $a = 0$. Имамо $f(t) = t + 1 \geqslant 0$ за свако $t \in [-1, 1]$ при чему је $f(t) = 0$ ако и само ако је $t = -1$.
- $a > 0$. Како је $a$ цео број, имамо $a \geqslant 1$. Такође је $\dfrac{2a - 1}{a} \geqslant 1$, при чему једнакост важи ако и само ако је $a = 1$. Опет закључујемо да је $f(t) \geqslant 0$ за свако $t \in [-1, 1]$, при чему је $f(t) = 0$ за $t = -1$ и $a > 1$, као и $f(t) = 0$ за $t = \pm 1$ и $a = 1$.

Једначина (2.101) је еквивалентна једначини $f(\cos x) + f(\cos x) + f(\cos z) = 0$. Из претходних разматрања добијамо коначну дискусију:

- ако је $a$ цео број различит од 1, имамо $\cos x = \cos y = \cos z = -1$, тј. $x = (2k+1)\pi, y = (2l+1)\pi, z = (2m+1)\pi$, где су $k, l, m$ произвољни цели бројеви;
- ако је $a = 1$, поред претходних решења имамо и она која задовољавају $\cos x = \cos y = \cos z = 1$, тј. $x = 2r\pi, y = 2s\pi, z = 2n\pi$, где су $r, s, n$ произвољни цели бројеви.

**529**. Означимо са $x_1, x_2, y_1, y_2$ редом број потеза нагоре, надоле, удесно и улево. Из услова задатка добијамо

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = n, \quad x_1 - y_1 = b, \quad x_2 - y_2 = a,$$

односно,

$$y_1 = x_1 - b, \quad x_2 = \frac{n + a + b}{2} - x_1, \quad y_2 = \frac{n - a + b}{2} - x_1.$$

Како је
$$|a|+|b|=|x_2-y_2|+|x_1-y_1|\leqslant x_1+x_2+y_1+y_2=n,$$
добијамо да је неопходно да буду задовољени услови $a+b\leqslant n$ и $a+b\equiv n \pmod 2$. Фиксирајмо прво потезе нагоре и удесно. Ово можемо учинити на $\binom{n}{\frac{n+a+b}{2}}$ начина. После тога, фиксирајмо позиције нагоре међу ових $\dfrac{n+a+b}{2}$ већ фиксираних потеза, као и потезе улево међу преосталих $\dfrac{n-a-b}{2}$ потеза. Добијамо
$$\binom{n}{\frac{n+a+b}{2}}\sum_{i=0}^{\frac{n+a-b}{2}}\binom{\frac{n+a+b}{2}}{i}\binom{\frac{n-a-b}{2}}{\frac{n-a-b}{2}-i},$$
где је последња сума једнака коефицијенту уз $x^{\frac{n-a+b}{2}}$ у развоју
$$(1+x)^{\frac{n+a+b}{2}}(1+x)^{\frac{n-a-b}{2}}=(1+x)^n.$$
Према томе, сума износи $\binom{n}{\frac{n-a+b}{2}}$, а укупан број путања је
$$\binom{n}{\frac{n+a+b}{2}}\binom{n}{\frac{n-a+b}{2}}.$$
Дакле, ако је $|a|+|b|>n$ или су бројеви $a+b$ и $n$ различите парности, број путања је 0; иначе број путања износи $\binom{n}{\frac{n+a+b}{2}}\binom{n}{\frac{n-a+b}{2}}$.

**530**. Означимо подножје висине из темена $A$ тетраедра $ABCD$ са $H_1$. Раван $\pi_A$ садржи праву $AH_1$, а пошто по претпоставци садржи и тачке $A$ и $A'$, она је јединствено одређена тачкама $A, H_1$ и $A'$. Права која садржи тачку $A'$ и паралелна је са $AH_1$ очито лежи у равни $\pi_A$. Како она садржи центар $O$ сфере описане око тетраедра $ABCD$, јасно је да и тачка $O$ лежи у равни $\pi_A$. Аналогно се закључује $O\in\pi_B, O\in\pi_C$ и $O\in\pi_D$.

**531**. Доказаћемо индукцијом да се сваки број облика $3^{2^n}$ може представити као збир три потпуна квадрата, тј. да за сваки природан број $n$ постоје природни бројеви $x_n, y_n, z_n$ тако да важи
$$x_n^2+y_n^2+z_n^2=3^{2^n}.$$
За $n=1$ можемо узети $x_1=1$, $y_1=z_1=2$. Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број $n$ и докажимо да одатле следује да важи и за $n+1$. Бројеве $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ можемо изразити преко $x_n, y_n, z_n$ на следећи начин:
$$x_{n+1}=x_n^2+y_n^2-z_n^2,\quad y_{n+1}=2y_nz_n,\quad z_{n+1}=2x_ny_n.$$
Сада лако добијамо
$$\begin{aligned}x_{n+1}^2+y_{n+1}^2+z_{n+1}^2&=(x_n^2+y_n^2-z_n^2)^2+4y_n^2z_n^2+4x_n^2z_n^2\\&=(x_n^2+y_n^2+z_n^2)^2=(3^{2^n})^2=3^{2^{n+1}},\end{aligned}$$
чиме је доказ завршен.

**532**. Означимо темена коцке са $A, B, C, D, E, F, G, H$ и нека се пауци налазе у темену $A$, а мува у темену $G$. Стратегија за пауке је следећа: први паук креће се симетрично муви у односу на центар коцке све док она (евентуално) не стигне до средишта неке од страница $GC, GF, GH$ (означимо их редом са $M, N, P$). Уколико мува стигне у неку од тих тачака, рецимо у тачку $M$, први паук наставља кретање симетрично муви у односу на раван $BDHF$. Овај паук ће ухватити муву ако она стигне у неку од тачака $B, D, F, H$. Уколико мува остане на контури одређеној тачкама $B, D, C, G, H, F$, ухватиће је други паук. Он најпре креће према темену $G$. Ако је није ухватио тим путем, постоје две могућности.

- Мува још није прешла ни у једну од тачака $M, N, P$.
  Тада је мува на једној од ивица $GC, GF, GH$, рецимо на $GC$. Други паук креће из темена $G$ према њој. Када мува пређе тачку $M$ први паук јој ограничава кретање на поменуту контуру, па је други паук прати према једној од тачака $B$ или $D$.
- Мува је већ прешла неку од тачака $M, N, P$.
  Рецимо да је мува прешла тачку $M$. Тада је први паук ограничио њено кретање на поменуту контуру, па је други паук само прати.

Мува ће у оба случаја бити ухваћена.

**533**. (а) Означимо пресечну тачку правих $OX$ и $AB$ са $F$. Тада је $XFYP$ тетивни четвороугао, па из потенције тачке $O$ добијамо $|OF| \cdot |OX| = |OY| \cdot |OP|$. Из правоуглог троугла $AOX$ имамо $|OF| \cdot |OX| = |OA|^2$, па је $|OY| = \dfrac{|OA|^2}{|OP|}$ и самим тим положај тачке $Y$ не зависи од тачке $X$.

(б) Како је $AO \perp AX$, $OB \perp BX$ и $PO \perp PX$, петоугао $AOBPX$ је тетиван. Означимо са $E$ подножје нормале из тачке $P$ на праву $AB$. Према Симсоновој теореми тачке $C$, $D$ и $E$ су колинеарне. Због $EP \perp EB$ и $DP \perp DB$ је и четвороугао $PDBE$ тетиван. Сада имамо низ једнакости углова

$$\sphericalangle PEZ = \sphericalangle PED = \sphericalangle PBD = \sphericalangle PBX = \sphericalangle POX = \sphericalangle ZPE.$$

Троугао $PYE$ је правоугли, па из $\sphericalangle PEZ = \sphericalangle ZPE$ лако закључујемо да је тачка $Z$ средиште хипотенузе $PY$.

**534**. Домен посматране функције је $\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, а како је $\lim\limits_{x \to a_i \pm} f(x) = \pm\infty$, функција има вертикалну асимптоту у свакој тачки $a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Такође је и $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Како је извод дате функције $f'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{-1}{(x - a_i)^2} < 0$, то је $f$ монотона на сваком интервалу свог домена. Примењујући Болцано-Кошијеву теорему на интервале $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$, а узимајући у обзир да $f$ на $(-\infty, a_1)$ и $(a_n, +\infty)$ нема нула, закључујемо да функција $f$ има тачно $n - 1$ нула.

**535**. Троуглови $ABE$ и $ANC$ су слични јер имају подударне одговарајуће углове $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ANC = \beta$ (периферијски над луком $AC$) и $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAN = \frac{\alpha}{2}$. Из ове сличности добијамо $AE : AC = AB : AN$, односно

$$AE \cdot AN = AB \cdot AC. \tag{2.102}$$

Такође, због

$$\sphericalangle BAS = \sphericalangle CAS_a = \frac{\alpha}{2}$$

и

$$\sphericalangle ABS = \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) = 180^\circ - \sphericalangle CAS_a - \sphericalangle ACS_a = \sphericalangle AS_aC$$

имамо и да су $\triangle ABS$ и $\triangle AS_aC$ слични. Из ове сличности добијамо $AB : AS_a = AS : AC$, односно

$$AS \cdot AS_a = AB \cdot AC. \tag{2.103}$$

Из (2.102) и (2.103) следи тражена једнакост $AS \cdot AS_a = AE \cdot AN$.

**536**. Означимо дату суму са $S$. Уколико је $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, тј. $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, можемо суму записати у облику

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\left(\cos x\cos\frac{x}{2} - \cos 2x\cos\frac{x}{2} + \cdots - \cos 2010x\cos\frac{x}{2} + \cos 2011x\cos\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cdots \right. \\ &\qquad \left. - \cos\frac{4019x}{2} - \cos\frac{4021x}{2} + \cos\frac{4021x}{2} + \cos\frac{4023x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{4023x}{2}\right) = \frac{\cos\frac{2011}{2}x\cos 1006x}{\cos\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Уколико је $\cos\frac{x}{2} = 0$, односно $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, сума је једнака

$$S = -1 - 1 - \cdots - 1 - 1 = -2011.$$

**537**. Дата једначина еквивалентна је једначини $m\cos x = 4n\sin x\cos x$. Решења једначине $\cos x = 0$ су свакако подксуп решења дате једначине јер је она дефинисана за све $x \in \mathbb{R}$. Остаје још да решимо једначину $4n\cos x = m$, да бисмо пронашли и (евентуална) преостала решења. Разликујемо следеће случајеве:

- $n = m = 0$: скуп решења је $\mathbb{R}$;
- $n = 0, m \neq 0$: скуп решења је $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$;
- $n \neq 0, \frac{m}{4n} \notin [-1, 1]$: скуп решења је $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$;
- $n \neq 0, \frac{m}{4n} \in [-1, 1]$: скуп решења је

$$\left\{\arcsin\frac{m}{4n} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \arcsin\frac{m}{4n} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

**538**. Нека је $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{5^k}$. Тада је $5S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{5^{k-1}}$. Одузимајући ове две суме добијамо

$$4S = 1 - \frac{n}{5^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{5^k} = 1 - \frac{n}{5^n} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - \frac{1}{5^{n-1}}}{\frac{4}{5}}$$

и након сређивања, коначно,

$$S = \frac{5}{16} - \frac{4n+5}{16 \cdot 5^n}.$$

Како експоненцијална функција брже тежи од степене функције у бесконачности, то је $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{16 \cdot 5^n} = 0$, па је $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{16}$.

**539**. Нуле полинома $x^2 + x + 1 = 0$ су $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\overline{\omega} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Означимо $\varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Према последици Безуове теореме, потребан и довољан услов да би полином $P(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ био дељив полиномом $Q(x) = x^2 + x + 1$ је да су нуле $\omega$ и $\overline{\omega}$ полинома $Q(x)$ уједно и нуле полинома $P(x)$. Како полином $P(x)$ има реалне коефицијенте, довољно је да буде задовољено $P(\omega) = 0$. Како је $P(\omega) = (\omega+1)^2 - \omega^n - 1 = \varepsilon^n - \omega^n - 1$ и $\omega^3 = 1, \varepsilon^3 = -1$, разликоваћемо следеће случајеве ($k$ је произвољан цео број):

- $n = 6k$:
$$P(\omega) = \varepsilon^{6k} - \omega^{6k} - 1 = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0;$$
- $n = 6k+1$:
$$P(\omega) = \varepsilon^{6k+1} - \omega^{6k+1} - 1 = \varepsilon - \omega - 1 = 0;$$
- $n = 6k+2$:
$$P(\omega) = \varepsilon^{6k+2} - \omega^{6k+2} - 1 = \varepsilon^2 - \omega^2 - 1 = \omega - \omega^2 - 1 = 2\omega \neq 0;$$
- $n = 6k+3$:
$$P(\omega) = \varepsilon^{6k+3} - \omega^{6k+3} - 1 = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0;$$
- $n = 6k+4$:
$$P(\omega) = \varepsilon^{6k+4} - \omega^{6k+4} - 1 = \varepsilon^4 - \omega^4 - 1 = -\varepsilon - \omega - 1 = -2\varepsilon \neq 0;$$
- $n = 6k+5$:
$$P(\omega) = \varepsilon^{6k+5} - \omega^{6k+5} - 1 = \varepsilon^5 - \omega^5 - 1 = -\varepsilon^2 - \omega^2 - 1 = -\omega - \omega^2 - 1 = 0.$$

Дакле, решења су сви бројеви $n$ облика $6k \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

**540**. Нека су $x_1, x_2, x_3, x_4$ редом бројеви књига на полицама. Они задовољавају једначину $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, при чему су сви природни бројеви из сегмента $[3, 12]$. Број решења ове једначине при услову $x_i \geqslant 3$ једнак је (након смена $y_i = x_i - 3$) броју решења нове једначине $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$ у скупу $\mathbb{N}_0$ и износи $\binom{13+4-1}{4-1} = \binom{16}{3} = 560$. Од овога би требало одузети она решења код којих нека од променљивих прелази 12. Очигледно је да највише једна променљива може бити већа од 12. Ако је рецимо $x_1 \geqslant 13$, број решења једнак је (након смена $z_1 = x_1 - 13$, $z_i = x_i - 3$ за $i = 2, 3, 4$) броју решења једначине $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 3$ у скупу $\mathbb{N}_0$ и износи $\binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$. Према томе, број решења полазне једначине је $560 - 4 \cdot 20 = 480$. Остаје још да распоредимо књиге (када знамо колико иде на коју полицу), што можемо урадити на $25!$ начина, које год да је решење једначине у питању. Коначан одговор је $480 \cdot 25!$.

**541**. (а) Нека је $X$ случајна величина која представља број погодака у 4 гађања. На основу редоследа чинилаца и броја сабирака јасно је који је распоред погодака и промашаја у 4 бацања у сваком од наредних случајева:

$$
\begin{aligned}
P\{X = 0\} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36};\\
P\{X = 1\} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{17}{72};\\
P\{X = 2\} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9} + \frac{5}{16} = \frac{61}{144};\\
P\{X = 3\} &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};\\
P\{X = 4\} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

Расподела случајне величине $X$ је $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{36} & \frac{17}{72} & \frac{61}{144} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

(б) Три поготка се десе у 4 случаја, сваки са истом вероватноћом. Промашај се десио баш у трећем бацању у једном случају, па самим тим погодак у преосталим случајевима. Тражена вероватноћа је $\frac{3}{4}$.

**542**. Из $5x - 3y \equiv 7 \pmod{12}$ имамо $5x - 3y = 12s + 7$, $s \in \mathbb{Z}$ $(s = 1 - z)$. Једно решење ове једначине је очигледно $x = 3s + 2$, $z = s + 1$, па су сва њена решења дата са $x = 3s + 2 - 3t$, $y = s + 1 - 5t$, за $t \in \mathbb{Z}$. Сва решења полазне једначине су облика $x = 3s + 2 - 3t$, $y = s + 1 - 5t$, $z = 1 - s$, за произвољне $s, t \in \mathbb{Z}$.

**543**. Како је $O_1$ центар кружнице описане око троугла $ABD$, то је $\sphericalangle AO_1D = 2\sphericalangle ABD$. Међутим, $O_1O_2$ је симетрала дужи $AD$, па је $\sphericalangle AO_1D = 2\sphericalangle AO_1O_2$, одакле следи да је $\sphericalangle AO_1O_2 = \sphericalangle ABC$. Слично закључујемо да је $\sphericalangle AO_2O_1 = \sphericalangle ACB$, одакле следи да су троуглови $ABC$ и $AO_1O_2$ слични и тада је $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle BAC$. Нека су $M$ и $N$ средишта страница $AB$ и $AC$ редом, а $P$ и $O$ центри описаних кружница троуглова $ABC$ и $AO_1O_2$ редом. На основу претходних једнакости добијамо $\sphericalangle O_1AO_2 +$

$\sphericalangle O_1PO_2 = \sphericalangle MAN + \sphericalangle MPN = 180^\circ$, тј. четвороугао $AO_1PO_2$ је тетиван. Према томе, тачка $O$ лежи на симетрали дужи $AP$. Како су тачке $A$ и $P$ фиксиране, тражено геометријско место тачака које описује тачка $O$ садржано је у симетрали дужи $AP$. Очигледно је да, док тачка $D$ пролази страницом $BC$ ($D \neq B$, $D \neq C$), тачка $O$ описује дуж $XY$ без крајњих тачака, при чему су $X$ и $Y$ тачке симетрале дужи $AP$ за које важи $XB \perp BC$ и $YC \perp BC$. Тражено геометријско место тачака је отворена дуж $XY$.

**544**. Алгоритам одабира темена 100-тоугла $B$ је следећи: узимамо било које непрецртано теме 980200-тоугла, одаберемо га, прецртамо њега и сва темена која су од њега удаљена за неку дијагоналу 100-тоугла $A$. То понављамо док не одаберемо последње теме 100-тоугла $B$, након чега завршавамо алгоритам.

Докажимо исправност овог алгоритма. Приметимо да се, захваљујући прецртавању, неће ниједна дужина дијагонале 100-тоугла $B$ поклопити с неком дужином дијагонале 100-тоугла $A$, јер приликом одабира сваког темена 100-тоугла $B$ прецртавамо сва темена 980200-тоугла који би с њим одређивали ту дужину. Хоћемо ли у неком тренутку остати без непрецртаних темена? 100-тоугао има највише $\frac{100\cdot 99}{2} = 4950$ различитих дужина дијагонала, а у сваком кораку ћемо прецртати темена на тим удаљеностима с леве и с десне стране одабраног темена, дакле укупно, рачунајући и одабрано теме, прецртавамо $2 \cdot 4950 + 1 = 9901$ темена у једном кораку. Након 99 корака прецртали смо $99 \cdot 9901 = 980199$ темена, па остаје барем једно слободно теме за 100. теме 100-тоугла $B$.

**545**. Нека је $P_k = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$ и $Q_k = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i$. Услов задатка постаје

$$P_k(Q_{k+1} - Q_k) \geqslant Q_k(P_{k+1} - P_k),$$

односно,

$$\frac{Q_{k+1}}{P_{k+1}} \geqslant \frac{Q_k}{P_k}.$$

Сада је $1 = \dfrac{Q_n}{P_n} \geqslant \dfrac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} \geqslant \cdots \geqslant \dfrac{Q_1}{P_1}$, одакле следи да је $P_k \geqslant Q_k$.

**546**. Једноставном индукцијом (са кораком 2) може се показати да ови полиноми задовољавају рекурентну везу

$$P_k(x) = 2xP_{k-1}(x) - P_{k-2}(x), \quad k \geqslant 2,$$

при чему је $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. Одавде специјално следи и да је полином $P_n$ степена $n$ са водећим коефицијентом $2^{n-1}$, што значи да има $n$ нула и испоставиће се да су све реалне. Заиста, решавајући једначину $\cos(n \arccos x) = 0$ добијамо $n \arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, односно $\arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Коначно, мора бити $x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Овде постоји само $n$ различитих вредности, и то за $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, па је факторизација датог полинома

$$P_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left( x - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right).$$

НАПОМЕНА. Ови полиноми у литератури су познати као Чебишевљеви полиноми прве врсте. Дефинисани су на сегменту $[-1,1]$, користе се за интерполацију функција и имају бројне примене у теорији апроксимација. Из њихове факторизације специјално добијамо да су за свако $n$ бројеви $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, алгебарски.

**547**. Одаберимо произвољан подскуп $A$ скупа $M$ који има $(k+1)!+1$ елемената и дефинишимо функцију $f : A \to \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_{k+1} = B$ (користимо стандардне ознаке за скуп остатака $\mathbb{Z}_{k+1} = \{0,1,\ldots,k\}$) са

$$f((x_1,x_2,\ldots,x_k)) = (y_1,y_2,\ldots,y_k),$$

при чему је $y_i$ остатак при дељењу броја $x_i$ са $i+1$, $i \in \{1,\ldots,k\}$. Самим тим заиста $y_i \in \mathbb{Z}_{i+1}$. Како је $|A| = (k+1)!+1 > (k+1)! = |B|$, то функција $f$ није инјективна. Према томе, постоје две $n-$торке $(a_1,\ldots,a_k),(b_1,\ldots,b_k) \in A$ за које важи $f((a_1,\ldots,a_k)) = f((b_1,\ldots,b_k))$. Одатле имамо, на основу дефиниције функције $f$, да за свако $i \in \{1,\ldots,k\}$ важи $(i+1)|(a_i-b_i)$. Множењем датих релација добијамо $(k+1)! \mid (a_1-b_1)\cdots(a_k-b_k)$.

**548**. Неједначина има смисла за $2^x > 3a > 0$ и $a \neq \dfrac{1}{2}$. За такве $x$ и $a$ неједначина је еквивалентна неједначини

$$\frac{x+\log_2(2^x-3a)-2-2\log_2 a}{1+\log_2 a} > 0,$$

односно,

$$\frac{\log_2\dfrac{2^x-3a}{a^2}+x-2}{1+\log_2 a} > 0. \tag{2.104}$$

Нека је $1+\log_2 a > 0$, тј. $a > \dfrac{1}{2}$. Тада имамо

$$\log_2\frac{2^x-3a}{a^2} > 2-x \iff \frac{2^x-3a}{a^2} > 2^{2-x} \iff 2^x(2^x-3a) > 4a^2.$$

Означимо $y = 2^x$. Решења квадратне неједначине $y^2-3ay-4a^2 > 0$ су $y < -a$ или $y > 4a$. Закључујемо да су при услову $a > \dfrac{1}{2}$ решења дате неједначине они $x$ за које важи $2^x > 4a$, тј. $x > 2+\log_2 a$. Како је $2+\log_2 a > 1$, услови задатка су испуњени ако је $a > \dfrac{1}{2}$ и $2+\log_2 a < 2$, односно за $\dfrac{1}{2} < a < 1$.

За $0 < a < \dfrac{1}{2}$ решења неједначине (2.104) су $\log_2 3a < x < 2+\log_2 a$. Како је $2+\log_2 a < 1$, следи да тада $x = 2$ није решење неједначине.

Одговор: $\dfrac{1}{2} < a < 1$.

**549**. Лако се проверава да се растојање бубе од координатног почетка $O$, осим ако се буба налази на некој од правих $x = 0, y = 0, x = y, x = -y$, строго повећава након три од четири могућа корака и строго смањује након једног могућег корака. Међутим, како је однос координата тачке $P$, у којој се буба тренутно налази, на почетку ирационалан, он ће то и остати након сваког потеза и не може наступити ниједан од поменутих специјалних случајева. Претпоставимо да се буба након низа потеза $P_0P_1 \cdots P_n = P_0$ вратила у тачку $P_0(1, \sqrt{2})$. Приметимо да сваки могући потез има свој инверзни потез међу дозвољеним, тј. онај којим се буба враћа у претходну тачку. Ако је $P_i$ теме ове затворене изломљене линије које је најудаљеније од тачке $O$, тада важи $|OP_{i-1}| < |OP_i| > |OP_{i+1}|$. Према томе, једини могући начин да се буба након тачке $P_i$ приближи координатном почетку је да направи инверзан потез, што би је вратило у тачку $P_{i-1}$. Контрадикција! Дакле, буба не може никада да се врати у почетну тачку $P_0$.

**550**. Фиксирајмо произвољну тачку $A(\sin t_0, \ln(\mathrm{tg}(\frac{t_0}{2})) + \cos t_0)$, $t_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, криве $\gamma$. Вектор правца тангенте на криву $\gamma$ у тачки $A$ је

$$\gamma'(t_0) = \Big(\cos t_0, \frac{1}{\sin t_0} - \sin t_0\Big),$$

па је једначина тангенте

$$\frac{x - \sin t_0}{\cos t_0} = \frac{y - \ln(\mathrm{tg}(\frac{t_0}{2})) - \cos t_0}{\frac{1}{\sin t_0} - \sin t_0}.$$

Сада се лако одређују координате пресечне тачке ове тангенте и $y-$осе, то је тачка $B\left(0, \ln(\mathrm{tg}(\frac{t_0}{2})\right)$, као и дужина дужи $AB$: $|AB| = |\overrightarrow{BA}| = |(\sin t_0, \cos t_0)| = 1$, чиме је доказ завршен.

**551**. Доказаћемо да $n$ задовољава услове задатка ако и само ако је $n + 1$ прост број. Нека је прво $n + 1 = p, p-$прост. Тада је $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$, па, због $(k + 1, p) = 1$, одатле следи да $(k + 1) \mid \binom{n}{k}$. Обрнуто, претпоставимо да је $n + 1$ сложен и нека је $q$ његов најмањи прост делилац. Тада је

$$\frac{1}{q}\binom{n}{q-1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-q+2)}{q!}.$$

Пошто $q$ дели $n + 1$ и $n + 1 - q$ и ниједан од бројева између њих, то претходни израз није цео број. Контрадикција!

**552**. Из тетивности четвороуглова $SA'BB'$, $SB'CC'$, $SC'DD'$ и $SD'AA'$ и из услова $AC \perp BD$ лако се добија да је четвороугао $A'B'C'D'$ тетивно-тангентни. Нека су $R_1$ и $r$ редом полупречници описане и уписане кружнице четвороугла $A'B'C'D'$. Центар уписане кружнице овог четвороугла је очигледно тачка $S$. Означимо центар описане кружнице четвороугла $A'B'C'D'$ са $T$, а средишта страница $AB, BC, CD, DA$ редом са $A_1, B_1, C_1, D_1$. Познато је да свих 8 тачака $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ леже на

једној кружници чији су пречници дужи $A_1C_1, B_1D_1$. Центар $T$ је заједничко средиште дужи $A_1C_1$, $B_1D_1$ и $OS$. У паралелограму $SA_1OC_1$ важи $|A_1C_1|^2 + |OS|^2 = 2\left(\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|CD|}{2}\right)^2\right)$, односно $4R_1^2 + d^2 = 2R^2$. Отуда је $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$. Нека је $S'$ нормална пројекција тачке $S$ на праву $A'B'$ и нека је $\varphi = \sphericalangle ABS$ и $\theta = \sphericalangle CBS$. Из правоуглих троуглова $SS'B'$, $SBB'$ и претходних тетивности добијамо

$$r = |SS'| = |SB'| \cdot \sin\varphi = |SB| \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta.$$

Како је $\sin\varphi = \dfrac{|SA|}{|AB|}$ и $\sin\theta = \dfrac{|SC|}{|BC|}$, из претходне једнакости следи

$$r = \frac{|SB| \cdot |SA| \cdot |SC|}{|AB| \cdot |BC|}.$$

Производ $|SA| \cdot |SC|$ представља потенцију тачке $S$ у односу на кружницу $k$, па је $|SA| \cdot |SC| = R^2 - d^2$. Имајући у виду да је површина троугла $ABC$ једнака

$$\frac{1}{2} \cdot |SB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin(\varphi + \theta),$$

као и да важи $\dfrac{\sin(\varphi+\theta)}{|AC|} = \dfrac{1}{2R}$, из синусне теореме примењене на троугао $ABC$ коначно добијамо

$$r = \frac{R^2 - d^2}{2R}.$$

**553**. Претпоставимо прво да једначина $(x+y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$ има решења у $\mathbb{Z}_p$. Низом елементарних трансформација у пољу добијамо

$$\begin{aligned}(x+y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1} &\Leftrightarrow x(x+y)^{-1}y = x + y \Leftrightarrow xy = (x+y)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 0.\end{aligned}$$

Случај $x = y$ је немогућ јер добијамо $3x^2 = 0$, односно, јер је $x$ инверзибилан елемент, очигледну контрадикцију $3 = 0$ (због $p > 3$). Даље добијамо

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow (xy^{-1})^3 = 1.$$

Како је $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$ и како ред елемента дели ред групе, закључујемо $3 \mid (p-1)$.

Обрнуто, из чињенице $3 \mid (p-1)$ и Кошијеве теореме, постоји елемент $x \neq 1$ тако да важи $x^3 = 1$. Приметимо да је тада

$$\begin{aligned}x^3 - 1 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \cdot x \\ &\Leftrightarrow 1 + x^{-1} = (1+x)^{-1},\end{aligned}$$

чиме је задатак решен.

**554**. Како $17 \mid (1+2^4)$, то $17 \mid (2^n+2^{n+4})$ за сваки ненегативан цео број $n$. Зато је тактика играча $A$ следећа: у првом потезу он замењује прву звездицу слева (ону испред броја 1) знаком $+$; затим преосталих 1000 чланова групише у 125 осморке узастопних степена, а у оквиру сваке осморке формира четири пара облика $(2^{8k+1}, 2^{8k+5}), (2^{8k+2}, 2^{8k+6})$, $(2^{8k+3}, 2^{8k+7}), (2^{8k+4}, 2^{8k+8}), k = 0, 1, \ldots, 125$; када играч $B$ замени звездицу неким знаком, играч $A$ замењује истим знаком звездицу испред другог броја из истог пара. Добијени број при дељењу са 17 даје остатак 1.

**555**. У игри ЛОТО 7/39, укупан број комбинација је једнак $\binom{39}{7}$. Одредимо број комбинација у којима не постоји пар суседних бројева. Замислимо низ куглица које су нумерисане бројевима од 1 до 39, при чему су беле боје 32 неизабране кублице, док су 7 изабраних куглица црне боје. Пошто ниједан пар црних куглица не сме бити суседан, имамо 33 места за њих. Седам од ових 33 места можемо изабрати на $\binom{33}{7}$ начина. Дакле, постоји $\binom{39}{7} - \binom{33}{7}$ комбинација које садрже бар један пар суседних бројева. Тражени проценат једноставно одређујемо:

$$\frac{\binom{39}{7} - \binom{33}{7}}{\binom{39}{7}} = 1 - \frac{\binom{33}{7}}{\binom{39}{7}} \approx 72,23\%.$$

**556**. Сменом $y = x^2$ дата једначина постаје

$$my^2 - my + m + 1 = 0. \tag{2.105}$$

Ако се $x$ налази између $-1$ и 1, $y$ се налази између 0 и 1. Једноставно се доказује да једначина (2.105) не може имати само једно решење између 0 и 1. Заиста, у том случају би било $f(0) \cdot f(1) < 0$, при чему је $f(y) = my^2 - my + m + 1$, односно $(m+1)^2 < 0$.

Једначина (2.105) има два решења између 0 и 1 ако су испуњени следећи услови:

- $D \geqslant 0$, тј. $m^2 - 4m(m+1) \geqslant 0$, што је испуњено за $m \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$;
- $mf(0) > 0$, тј. $m(m+1) > 0$, што је испуњено за $m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$;
- $mf(1) > 0$, тј. $m(m+1) > 0$, што је испуњено за $m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$;
- $f'(0)f'(1) < 0$, тј. за $-m^2 < 0$ што је исуњено за свако $m \neq 0$.

Сви услови су испуњени за $m \in \left[-\frac{4}{3}, -1\right)$. За ове вредности $m$ је:

$$0 < y_1 < y_2 < 1 \Rightarrow -1 < -\sqrt{y_1} < -\sqrt{y_2} < 0 < \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2} < 1,$$

односно сва решења дате једначине се налазе у интервалу $(-1, 1)$.

**557**. Претпоставимо да бројеви $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{11}b_{11}$ имају различите остатке при дељењу са 11. Не умањујући општост, можемо претпоставити да је $a_1b_1 \equiv 0 \pmod{11}$. Нека је $x = (a_2b_2)(a_3b_3)\cdots(a_{11}b_{11})$. С једне стране тада је $x \equiv 10! \equiv 10 \pmod{11}$. С друге стране, како је $a_ib_i \not\equiv 0 \pmod{11}$, за $i = 2, 3, \ldots, 11$, то је $a_1 = b_1 = 11$, па је $x = (a_2a_3\cdots a_{11})(b_2b_3\cdots b_{11}) \equiv (10!)^2 \equiv 10^2 \equiv 1 \pmod{11}$. Контрадикција!

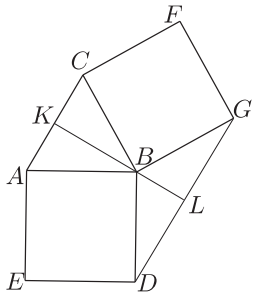
**558**. Нека $|S|$ означава број елемената скупа $S$. Нека су $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq A$ такви да важи $|B_i| = 3$ и $|B_i \cap B_j| \neq 2$, за $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Ако $a \in A$ припада скуповима $B_1, B_2 \ldots, B_k$, тада је $|B_i \cap B_j| = 1$, за $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Како је

$$8 = |A| \geqslant |B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k| = 1 + 2k,$$

добијамо да је $k \leqslant 3$. Дакле, сваки елемент скупа $A$ је елемент највише 3 скупа $B_1, \ldots, B_n$. Према томе, $3n \leqslant 8 \cdot 3$, одакле је $n \leqslant 8$. Да је 8 могући број подскупова показује следећи пример:

$$B_1 = \{1, 2, 3\}, \quad B_2 = \{1, 4, 5\}, \quad B_3 = \{1, 6, 7\}, \quad B_4 = \{8, 3, 4\},$$
$$B_5 = \{8, 2, 6\}, \quad B_6 = \{8, 5, 7\}, \quad B_7 = \{3, 5, 6\}, \quad B_8 = \{2, 4, 7\}.$$

**559**. Конструишимо нормалу из темена $B$ на $AC$ (то је уједно и нормала на $DG$). Нека та нормала сече $AC$ у тачки $K$, а $DG$ у тачки $L$ (слика 2.85). Како је $\sphericalangle ABK = 90^\circ - \sphericalangle DBL = \sphericalangle BDL$ и $AB = DB$, то су правоугли троуглови $ABK$ и $BDL$ подударни, па је $AK = BL$. Слично се показује да су и правоугли троуглови $CBK$ и $BGL$ подударни и да је $BL = CK$. Према томе, $AK = CK$, па је и $AB = BC$.




Слика 2.85.

**560**. За $0 \leqslant r \leqslant n$ полином

$$\binom{x}{r} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)}{r!}$$

је степена $r$. Посматрајмо полином

$$Q(x) = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \cdots + \binom{x}{n},$$

који је степена $n$. Према биномној теореми је $Q(k) = (1+1)^k = 2^k$ за све $k = 0, 1, \ldots, n$. Према томе, $P(x) = Q(x)$ за све $x$, па је

$$P(n+1) = Q(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+1}{n} = 2^{n+1} - 1.$$

**561**. Тражена неједнакост је еквивалентна неједнакости

$$a_1 + \cdots + a_{n-1} - \frac{n^2+n-2}{2}a_n + \frac{n(n-1)}{2}a_{n+1} \geqslant 0.$$

Лако се може показати (оставља се читаоцима да то покажу) да је

$$\begin{aligned} &a_1 + \cdots + a_{n-1} - \frac{n^2+n-2}{2}a_n + \frac{n(n-1)}{2}a_{n+1} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2}(a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}) \geqslant 0. \end{aligned}$$

**562**. Из $f(0+0) \leqslant f(0) + f(0)$ следи да је $0 \leqslant f(0)$. Како је $f(0) \leqslant 0$, то је $f(0)$. даље, за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

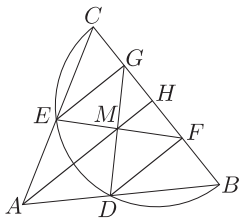
$$0 = f(x + (-x)) \leqslant f(x) + f(-x) \leqslant x + (-x) = 0,$$

па је $f(x) + f(-x) = 0$, тј. $-f(-x) = f(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$. Како је $f(-x) \leqslant -x$, то је $x \leqslant -f(-x) = f(x) \leqslant x$, одакле добијамо да је $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{R}$.

**563**. За $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ количник $f(n+1)/f(n)$ има редом вредности $3$, $8/3$, $22/8$, $65/22$, $209/65$ и $732/209$. Минимум тих количника је $8/3$. Показаћемо да за $n > 6$ важи $f(n+1)/f(n) > 3 > 8/3$. То следи из

$$\begin{aligned} f(n+1) &> 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 6^{n-4} + \cdots + (n-1)^3 + n^2 \\ &> 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 3\big(6^{n-5} + \cdots + (n-1)^2 + n\big) \\ &= 1^{n+1} + \cdots + 5^{n-3} + 3\big(f(n) - 1^n - 2^{n-1} - 3^{n-2} - 4^{n-3} - 5^{n-4}\big) \\ &= 3f(n) + 2(5^{n-4} - 1) + 2^{n-1}(2^{n-5} - 1) > 3f(n). \end{aligned}$$

**564**. Нека је $H$ подножје висине из $A$ на $BC$ (слика 2.86) и нека су $\alpha, \beta$ и $\gamma$ унутрашњи углови троугла $ABC$ код темена $A$, $B$ и $C$, респективно. Важи $\sphericalangle BDC = 90^\circ = \sphericalangle BEC$, $DF = BD \sin\beta = BC \cos\beta \sin\beta$ и, слично, $EG = BC \cos\gamma \sin\gamma$.




Слика 2.86.

Сада је

$$\frac{GM}{MD} = \frac{EG}{FD} = \frac{\cos\beta \sin\beta}{\cos\gamma \sin\gamma} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\frac{AB}{AC}.$$

Како је $BH = AB\cos\beta$ и $HG = AE\cos\gamma$, добијамо

$$\frac{BH}{HG} = \frac{AB\cos\beta}{AE\cos\gamma} = \frac{AC\cos\beta}{AD\cos\gamma},$$

па је

$$\frac{BH}{HG}\frac{GM}{MD}\frac{DA}{AB} = 1.$$

На основу обрнуте Менелајеве теореме следи да су тачке $A$, $M$ и $H$ колинеарне, тј. да је $AM \perp BC$.

**565**. Покажимо најпре да се сваки цео број може представити у датом облику бар на један начин. Ако се број $k$ може представити на дати начин, онда се и број $-k$ може представити на дати начин променом свих знакова, па је довољно да посматрамо само ненегативне бројеве. Кључни део доказа је идентитет

$$(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 = 4,$$

као и једнакости $0 = 4 - 4 = -1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2$, $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$ и $3 = -1^2 + 2^2$. Због уоченог идентитета, ако се број $k$ може представити у датом облику, онда се и број $k+4$ такође може представити у датом облику. На основу принципа математичке индукције закључујемо да се сваки ненегативан цео број (а тиме и сваки цео број) може представити у датом облику. Да бисмо показали да постоји бесконачно много презентација датог облика довољно је да приметимо да важи $0 = 4 - 4 = (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 - (m+5)^2 + (m+6)^2 + (m+7)^2 - (m+8)^2$. Дакле, када имамо једну репрезентацију броја $k$, додавањем 8 чланова добијамо нову репрезентацију.

**566**. Нека је $d(n)$ број цифара броја $A_n$: $d(1) = d(2) = 1$ и $d(n) = d(n-1) + d(n-2)$ по конструкцији. Процес дописивања цифара даје рекурентну релацију

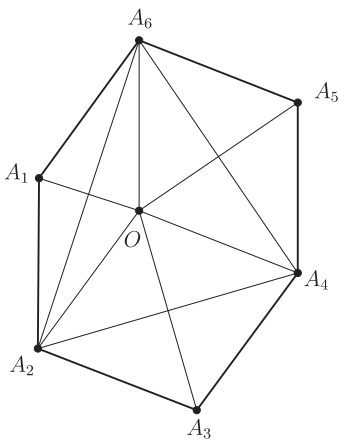
$$A_n = A_{n-1} \cdot 10^{d(n-2)} + A_{n-2},$$

одакле је $A_n \equiv A_{n-1} \cdot (-1)^{d(n-2)} + A_{n-2} \pmod{11}$. Ово сугерише да треба анализирати парност за $d(n)$. Индукцијом се лако може показати да је $d(n)$ парно само када је $n \equiv 0 \pmod 3$, па важи

$$\begin{aligned} A_{3k+1} &\equiv A_{3k} + A_{3k-1} \pmod{11}, \\ A_{3k} &\equiv -A_{3k-1} + A_{3k-2} \pmod{11}, \\ A_{3k-1} &\equiv -A_{3k-2} + A_{3k-3} \pmod{11}. \end{aligned}$$

Једноставно се израчунава да је $A_7 \equiv A_1 \pmod{11}$ и $A_8 \equiv A_2 \pmod{11}$, па коришћењем горње три формуле индукцијом добијамо да је $A_{n+6} \equiv A_n \pmod{11}$ за све $n$. Према томе, $A_n \equiv 0 \pmod{11}$ ако и само ако је $n \equiv 1 \pmod 6$.

**567**. Како је збир унутрашњих углова у конвексном шестоуглу $720^\circ$, следи да је $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 = 360^\circ$, па се темена $A_1, A_3, A_5$ осном симетријом редом у односу на праве $A_6A_2, A_2A_4, A_4A_6$ пресликавају у исту тачку $O$ (слика 2.87).




Слика 2.87.

(Пресликајмо $A_1$ у односу на $A_6A_2$ у тачку $O$. Нека је $Op$ полуправа која неконвексан угао $A_6OA_2$ дели на два угла величине $\alpha_3$ и $\alpha_5$: $\sphericalangle A_2Op = \alpha_3$ и $\sphericalangle A_6Op = \alpha_5$. На полуправој $Op$ уочимо тачку $A$ да је $OA$ једнако страници шестоугла. Из $\triangle A_2A_3A_4 \cong \triangle A_2OA$ и $\triangle A_4A_5A_6 \cong \triangle A_6OA$ следи да је $A_2A_4 = A_2A$ и $A_4A_6 = A_6A$, па се тачке $A_4$ и $A$ поклапају.)

Наспрамни углови ромба су једнаки, па је $\alpha_1 = \sphericalangle A_6OA_2$, $\alpha_3 = \sphericalangle A_2OA_4$, $\alpha_5 = \sphericalangle A_4OA_6$. Пошто су краци углова $A_6OA_2$ и $A_5A_4A_3$ паралелни и једнако усмерени следи да су једнаки па је $\alpha_1 = \alpha_4$, Слично се закључује да је $\alpha_2 = \alpha_5$ и $\alpha_3 = \alpha_6$.

**568**. Претпоставимо да се децимални запис броја $b$ састоји од $n$ цифара. Тада је:

$$\frac{b}{a} = a + \frac{b}{10^n}, \text{ односно, } 10^n(b - a^2) = ab.$$

Из последње једнакости следи да је $b > a^2 \geqslant a$. Пошто су бројеви $a$ и $b$ узајамно прости, бројеви $b - a^2$ и $ab$ такође морају бити узајамно прости. (Заиста, ако би $p$ био заједнички прост делилац бројева $b - a^2$ и $ab$, онда би из $p \mid ab$ следило да $p \mid a$ или $p \mid b$; из $p \mid a$ и $p \mid (b - a^2)$ следи да $p \mid b$, што је немогуће; из $p \mid b$ и $p \mid (b - a^2)$ следи да $p \mid a^2$, па и $p \mid a$, што је поново немогуће.) Одавде даље закључујемо да је $b - a^2 = 1$, односно да је $ab = 10^n$. Пошто су $a$ и $b$ узајамно прости могућа су два случаја:

- $b = 10^n, a = 1$;
- $b = 5^n, a = 2^n$.

Пошто у првом случају није могућа једнакост $b - a^2 = 1$, остаје да размотримо само други случај. Ако је $b = 5^n$ и $a = 2^n$, једнакост $b - a^2 = 1$ постаје

$$5^n - 4^n = 1, \text{ одакле добијамо да је } \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Низ $f(n) = \left(\frac{5}{4}\right)^n$ је растући, док је низ $g(n) = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ опадајући, што значи да једначина $f(n) = g(n)$ (по $n$) може имати највише једно решење. Пошто је $f(1) = g(1)$, закључујемо да је 1 и једино решење последње једначине. Дакле, $a = 2$, $b = 5$.

**569**. Претпоставимо да се $p$ може факторисати. Тада је $p(x) = (x-b)f(x)$ или $p(x) = (x^2 - cx + d)g(x)$. У првом случају је $b^5 - b + a = p(b) = 0$. Према малој Фермаовој теореми важи $b^5 \equiv b \pmod 5$, па $5 \mid (b^5 - b)$, тј. $5 \mid a$, што је контрадикција.

Размотримо сада другу могућност. Ако полином $x^5 - x + a$ поделимо полиномом $x^2 - cx + d$, остатак је $(c^4 - 3c^2d + d^2 - 1)x + a - c^3d + 2cd^2$. Тај остатак мора бити једнак нули, јер је по претпоставци $x^2 - cx + d$ фактор полинома $x^5 - x + a$, па је $c^4 - 3c^2d + d^2 - 1 = a - c^3d + 2cd^2 = 0$. Тада је и $b(c^4 - 3c^2d + d^2 - 1) - 3(a - c^3d + 2cd^2) = 0$, тј. $c^5 - c - 3a - 5cd^2 = 0$, што имплицира да је $3a = c^5 - c - 5cd^2$ дељиво са 5. Контрадикција!

**570**. Како је $z = -(x+y)$, имамо

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 &= \left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)^3 \geqslant \left(\frac{3}{2}(x+y)^2\right)^3 = \frac{27}{8}(x+y)^4(x+y)^2\\ &\geqslant \frac{27}{8}\left(2\sqrt{xy}\right)^4(x+y)^2 = 6\big(3xy(x+y)\big)^2\\ &= 6\big(x^3+y^3-(x+y)^3\big)^2 = 6\big(x^3+y^3+z^3\big)^2.\end{aligned}$$

Напоменимо да је прво коришћена неједнакост између аритметичке и квадратне средине, а затим неједнакост између аритметичке и геометријске средине.

**571**. Нека је $f(1) = t$. За $x = 1$ из треће особине функције $f$ добијамо $tf(t+1) = 1$, одакле закључујемо да је $t \neq 0$ и $f(t+1) = 1/t$. За $x = t+1$ из треће особине функције $f$ имамо

$$f(t+1)f\Big(f(t+1) + \frac{1}{t+1}\Big) = 1,$$

па је

$$f\Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\Big) = t = f(1).$$

Пошто је функција $f$ строго растућа, то је $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} = 1$, односно, $t^2 - t - 1 = 0$. Решења претходне једначине су $t_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Ако би било $t = (1+\sqrt{5})/2 > 0$, тада бисмо имали $1 < t = f(1) < f(1+t) = 1/t < 1$, што је немогуће. Према томе, $f(1) = t = (1-\sqrt{5})/2$. Напоменимо да је $f(x) = (1-\sqrt{5})/(2x)$ функција која задовољава наведене особине.

**572**. Нека су дужине страница $a, b, c, d$. Претпоставимо да не постоје две странице које имају исту дужину и да је $a < b < c < d$. Тада је $d < a+b+c < 3d$ и $d \mid (a+b+c)$, па је $a+b+c = 2d$. Сада сваки од бројева $a, b, c, d$ дели $a+b+c+d = 3d$. Нека је

$x = 3d/a$, $y = 3d/b$ и $z = 3d/c$. Како је $a < b < c < d$, то је $x > y > z > 3$, па је $z \geqslant 4$, $y \geqslant 5$ и $z \geqslant 6$. Међутим, тада је

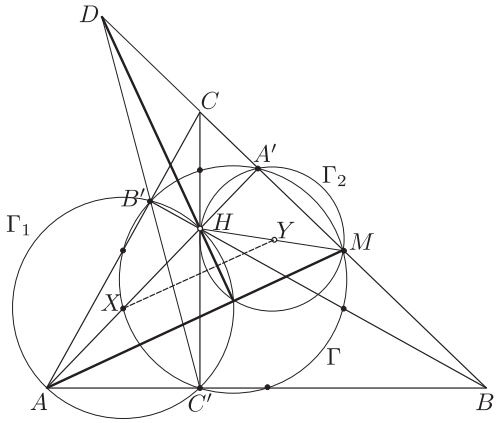
$$2d = a + b + c \leqslant \frac{3d}{6} + \frac{3d}{5} + \frac{3d}{4} < 2d.$$

Контрадикција! Дакле, две странице морају имати једнаку дужину.

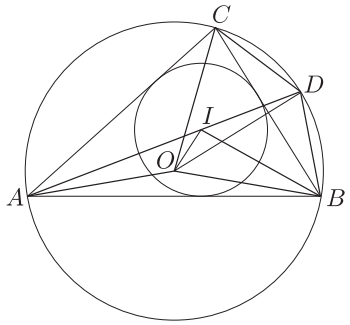
**573**. Нека је $A'$ подножје висине из $A$ на $BC$ (слика 2.88). Тачке $A', B', C'$ и $M$ леже на једној кружници $\Gamma$ (кружница која садржи девет тачака: подножја висина у троуглу, средишта страница и средишта дужи која спајају темена са ортоцентром троугла), то је (потенција тачке $D$ у односу на кружницу $\Gamma$)

$$DB' \cdot DC' = DA' \cdot DM. \tag{2.106}$$

Како је $\sphericalangle AC'H = \sphericalangle AB'H = 90^\circ$, то тачке $A, C', H$ и $B'$ леже на кружници $\Gamma_1$, чији је центар тачка $X$, средиште дужи $AH$. Такође, $\sphericalangle HA'M = 90^\circ$, па тачке $H, A'$ и $M$ леже на кружници $\Gamma_2$ са центром у тачки $Y$, која је средиште дужи $HM$. Једнакост (2.106) сада значи да је тачка $D$ има исту потенцију у односу на кружнице $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, па се она мора налазити на потенцијалној (радикалној) оси, која је ортогонална на дуж $XY$ која спаја центре кружница $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. Међутим, дуж $XY$ је средња линија троугла $AMH$, па је $XY \parallel AM$. Дакле, $DH \perp XY$ и $XY \parallel AM$, па је $DH \perp AM$.




Слика 2.88.




Слика 2.89.

**574**. Нека је $D$ пресечна тачака праве $AI$ и описаног круга око $\triangle ABC$ (слика 2.89). Како је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD$, то је $DC = DB$. Даље, из $\sphericalangle BID = \sphericalangle BAD + \sphericalangle ABI = \sphericalangle CAD + \sphericalangle CBI = \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBI = \sphericalangle DBI$ закључујемо да је $DB = DI$. Дакле, $DC = DB = DI$.

Четвороугао $ABDC$ је тетивни, па на основу Птоломејеве теореме (производ дијагонала тетивног четвороугла једнак је збиру производа његових наспрамних страница) важи

$$AD \cdot BC = AB \cdot CD + AC \cdot DB = (AB + AC) \cdot DI,$$

одакле добијамо да је $DI = \dfrac{AD \cdot BC}{AB + AC}$.

Како је $\triangle AOD$ једнакокрак ($AO = OD$), то је $\sphericalangle AIO \leqslant 90^\circ$ ако и само ако је $DI \leqslant AD/2$, што је еквивалентно са $2BC \leqslant AB + AC$.

**575**. Чланови датог низа су $2, 5, 11, 8, 65, -766, \ldots$. Примећујемо да је разлика свака два узастопна члана дељива са 3. Докажимо то, тј. докажимо да за све чланове низа важи $a_n \equiv 2 \pmod 3$. Јасно, $a_1, a_2 \equiv 2 \pmod 3$. Претпоставимо да за нека два узастопна члана низа $a_n$ и $a_{n+1}$ важи $a_n, a_{n+1} \equiv 2 \pmod 3$. Тада је $a_{n+2} \equiv (2-n^2)\cdot 2 + (2+n^2)\cdot 2 = 8 \equiv 2 \pmod 3$. На основу принципа математичке индукције закључујемо да је $a_n \equiv \pmod 3$ за све природне бројеве $n$. Према томе, за било која три природна броја $p, q, r$ је $a_p a_q \neq a_r$, јер је $a_p a_q \equiv 4 \not\equiv 2 \pmod 3$.

**576**. Претпоставимо да је $n$ најмањи природан број за који се $p^n$ може представити као збир два позитивна куба, нпр. $p^n = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Тада је $a + b = p^k$ и $a^2 - ab + b^2 = p^{n-k}$. Како је $a + b \geqslant 2$, то је $k > 0$. Такође, из $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ добијамо да је $a^2 - ab + b^2 \geqslant ab > 1$, па закључујемо да је $n > k$. Како је $3ab = (a+b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = p^{2k} - p^{n-k}$, $0 < k < n$, то $p \mid (3ab)$. Пошто је $p > 3$, то $p \mid a$ или $p \mid b$, а због $a + b = p^k$, закључујемо да $p \mid a$ и $p \mid b$. Нека је $a = pA$ и $b = pB$. Тада је $A^3 + B^3 = (a^3 + b^3)/p^3 = p^{n-3}$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $n$ најмањи природан број за који се $p^n$ може представити као збир два позитивна куба.

За $p = 2$ претпоставимо да је $a^3 + b^3 = 2^n$. Ако је $a + b > 2$, тада $2 \mid a$ и $2 \mid b$ и $(a/2)^3 + (b/2)^3 = 2^{n-3}$, па закључујемо да је $a = b = 2^k$ и $n = 3k + 1$.

За $p = 3$ претпоставимо да је $a^3 + b^3 = 3^n$. Ако је $a + b = 3^k$ и $a^2 - ab + b^2 = 3^{n-k} \geqslant 3^2$, тада $9 \mid (3ab)$, па $3 \mid a$ и $3 \mid b$ (због $a + b = 3^k$) и $(a/3)^3 + (b/3)^3 = 3^{n-3}$. Иначе, имамо $3 = a^2 - ab + b^2 \geqslant ab$, па је тада $a + b = 3$. У овом случају су $a$ и $b$ једнаки $2 \cdot 3^k$ и $3^k$, а $n = 3k + 2$.

**577**. Број 420 има наведену особину јер је $420 = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7$ и $7 < \sqrt[3]{420} < 8$. Нека је $n > 420$ број који има наведну особину. Тада бројеви $3, 4, 5, 7$ деле $n$, па је $n \geqslant 840 > 729 = 9^3$. Тада су бројеви $5, 7, 8, 9$ делиоци броја $n$, па је $n \geqslant 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 2520 > 2197 = 13^3$. Тада бројеви $5, 7, 8, 9, 11, 13$ деле $n$, па је $n \geqslant 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 13 > 6859 = 19^3$. Нека је $k$ природан број такав да је $19^k < \sqrt[3]{n} < 19^{k+1}$. Тада $5^k, 7^k, 9^k, 11^k, 13^k, 16^k, 17^k, 19^k$ деле $n$, што нас доводи до следеће контрадикције

$$\begin{aligned} n &\geqslant 5^k \cdot 7^k \cdot 9^k \cdot 11^k \cdot 13^k \cdot 16^k \cdot 17^k \cdot 19^k \\ &= 19^k (4\cdot 5)^k (3\cdot 7)^k (2\cdot 11)^k (2\cdot 13)^k (3\cdot 17)^k > 19^{3k+3} \geqslant n. \end{aligned}$$

Према томе, тражени највећи природан број са наведеном особином је 420.

**578**. Нека је $x_n$ број $n$-тоцифрених бројева који задовољавају наведени услов. Тада је $x_1 = 3$, $x_2 = 7$. Нека је $y_n$ број $n$-тоцифрених бројева који задовољавају наведени услов и почињу цифром 1. Мењајући 1 и 3 лако се види да је $y_n$ и број $n$-тоцифрених бројева који задовољавају наведени услов и почињу цифром 3. Разматрањем могућности да цифре $1, 2, 3$ буду на почетку $n$-тоцифреног броја добијамо да је $x_{n+1} = 3x_n - 2y_n$ и

$y_{n+1} = x_n - y_n$. Решавањем прве једначине по $y_n$ и заменом у другу једначину добијамо диференцну једначину $x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0$. Уведимо и $x_0 = x_2 - 2x_1 = 1$. Карактеристична једначина добијене диференцне једначине је $r^2 - 2r - 1 = 0$, па су њена решења $r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Према томе, опште решење добијене диференцне једначине је $x_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$. Константе $\alpha$ и $\beta$ налазимо из почетних услова $x_0 = 1$ и $x_1 = 3$: $\alpha = (1+\sqrt{2})/2$ и $\beta = (1-\sqrt{2})/2$. Коначно,

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}.$$

**579**. (а) Претпоставимо, супротно тврђењу задатка, да у групи постоји особа $A$ која није стидљива. Та особа има бар три стидљива пријатеља. Нека је $B$ један од њих. По услову задатка, $B$ такође има бар три стидљива пријатеља. Како је $A$ пријатељ особе $B$, $B$ има бар четири пријатеља, што је контрадикција ($B$ је стидљива особа). Према томе, све особе у групи су стидљиве.

(б) Према услову задатка, свака особа у групи има бар три пријатеља. С друге стране, сви људи у групи су стидљиви, тј. сваки има највише три пријатеља. Према томе, свака особа има тачно три пријатеља. Нека је $n$ укупан број особа у групи. Тада постоји тачно $3n$ парова пријатеља у групи (сваки пар је рачунат два пута). Зато је $n$ паран број већи од 2. Показаћемо да било који паран број $n \geqslant 4$ може бити број особа у посматраној групи. Претпоставимо да све особе седе за округлим столом и свака је пријатељ свог левог и десног суседа и особе која седи на дијаметрално супротном месту. Лако се види да та група особа задовољава услове задатка.

**580**. Једнакост $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ еквивалентна је једнакости $\frac{a-c}{c} = \frac{c}{b-c}$. Претпоставимо да је

$$\frac{a-c}{c} = \frac{c}{b-c} = \frac{p}{q},$$

где су $p$ и $q$ природни бројеви такви да је $\mathrm{nzd}(p,q) = 1$. Тада је

$$\frac{a}{p+q} = \frac{c}{q} \quad \text{и} \quad \frac{b}{p+q} = \frac{c}{p},$$

па је

$$\frac{a}{p(p+q)} = \frac{b}{q(p+q)} = \frac{c}{pq}.$$

Како је $\mathrm{nzd}(p,q) = 1$, то је и $\mathrm{nzd}(p(p+q), q(p+q), pq) = 1$. Како је $\mathrm{nzd}(a,b,c) = 1$, то је $a = p(p+q)$, $b = q(p+q)$ и $c = pq$. Према томе, $a + b = (p+q)^2$.

**581**. Ако полином $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ задовољава наведене услове, онда и $-P(x)$ такође задовољава наведене услове. Зато можемо претпоставити да је $a_0 = 1$. Нека су $r_1, \ldots, r_n$ његове нуле. Тада је

$$r_1^2 + \cdots + r_n^2 = a_1^2 - 2a_2 \quad \text{и} \quad r_1^2 \cdots r_n^2 = a_n^2.$$

Ако су сви корени реални, онда неједнакост аритметичке и геометријске средине даје $\dfrac{a_1^2-2a_2}{n} \geqslant a_n^{2/n}$. Како су $a_1, a_2 \in \{1,-1\}$, то мора бити $a_2=-1$ и $n \leqslant 3$. Сада једноставном провером добијамо тражене полиноме: $\pm(x-1), \pm(x+1), \pm(x^2+x-1)$, $\pm(x^2-x-1), \pm(x^3+x^2-x-1)$ и $\pm(x^3-x^2-x+1)$.

**582**. Нека је $x_k=\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}$. Тада је $a_k=(x_k+x_{k+1}+\cdots+x_n)^2$ и

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}(x_k+x_{k+1}+\cdots+x_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} kx_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ix_ix_j \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} kx_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sqrt{ij}\,x_ix_j = \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\,x_k\right)^2.\end{aligned}$$

**583**. Претпоставимо да се $AD$, $BE$ и $CF$ секу у тачки $X$ (слика 2.90). Из сличности троуглова $ABX$ и $EDX$ следи $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BX}{DX}$. Слично, $\dfrac{CD}{FA}=\dfrac{DX}{FX}$ и $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{FX}{BX}$. Множењем ових једнакости добијамо

$$\frac{AB\cdot CD\cdot EF}{DE\cdot FA\cdot BC}=1, \quad \text{тј.} \quad AB\cdot CD\cdot EF = BC\cdot DE\cdot FA.$$

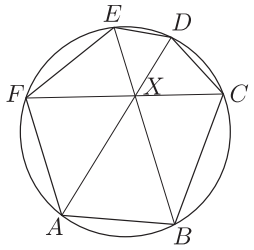
Претпоставимо сада да је

$$AB\cdot CD\cdot EF = BC\cdot DE\cdot FA \tag{2.107}$$

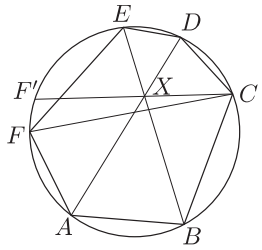
и да се дијагонале $AD$, $BE$ и $CF$ не секу у једној тачки. Нека је $X$ тачка пресека дијагонала $AD$ и $BE$ и нека права $CX$ сече круг у тачки $F'$. На основу доказаног дела следи

$$AB\cdot CD\cdot EF' = BC\cdot DE\cdot F'A.$$

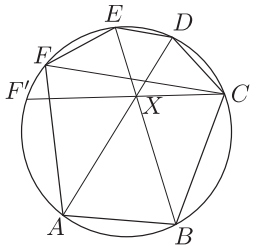
Дељењем последње једнакости са (2.107) добијамо $\dfrac{EF'}{EF}=\dfrac{F'A}{FA}$.




Слика 2.90.




Слика 2.91.




Слика 2.92.

Ако је тачка $F'$ на луку $EF$ (слика 2.91), тада је $FA<F'A$ и $EF'<EF$, па је $\dfrac{EF'}{EF}<1<\dfrac{F'A}{FA}$. Ако је тачка $F'$ на луку $AF$ (слика 2.92), тада је $F'A<FA$ и $EF<EF'$, па је $\dfrac{F'A}{FA}<1<\dfrac{EF'}{EF}$. Контрадикција! Дакле, $F=F'$.

**584**. За $n = 2m$ посматрајмо пермутацију $(m+1, 1, m+2, 2, \ldots, m+m, m)$, а за $n = 2m+1$ пермутацију $(m+1, 1, m+2, 2, \ldots, m+m, m, 2m+1)$ (овакве пермутације сугеришу случајеви $n = 2, 3, 4, 5$).

Ако је $k = 2j-1, 0 \leqslant j \leqslant m$, тада је

$$(m+1) + 1 + \cdots + (m+j) = mj + \frac{j(j+1)}{2} + \frac{(j-1)j}{2} = j(m+j).$$

Ако је $k = 2j, 0 \leqslant j \leqslant m$, тада је

$$(m+1) + 1 + \cdots + (m+j) + j = mj + 2 \cdot \frac{j(j+1)}{2} = j(m+j+1).$$

**585**. Посматрајмо низ $(v_n)_{n=0}^{+\infty}$ дат са $v_0 = 1, v_1 = 1$ и $v_n = (n-1)v_{n-2}$ за све $n \geqslant 2$. Очигледно су сви чланови низа $(v_n)$ цели бројеви.

Докажимо математичком индукцијом да важи $v_n v_{n+1} = n!$ за све $n \geqslant 0$. За $n = 0$ је $v_0 v_1 = 1 \cdot 1 = 1 = 0!$, па тврђење важи. Претпоставимо да је $v_{n-1} v_n = (n-1)!$. Како је $v_{n+1} = n v_{n-1}$, то је $v_n v_{n+1} = n v_{n-1} v_n = n \cdot (n-1)! = n!$. Тиме смо доказали да тврђење важи за све $n \geqslant 0$.

Докажимо сада индукцијом да је $u_n = v_n$ за све $n \geqslant 0$. За $n \in \{0, 1, 2\}$ је $u_n = 1 = v_n$. Претпоставимо сада да за $n \geqslant 3$ важи $u_{n-3} = v_{n-3}, u_{n-2} = v_{n-2}$ и $u_{n-1} = v_{n-1}$. Тада је $(n-3)! = u_n u_{n-3} - u_{n-1} u_{n-2}$, па је

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(n-3)! + u_{n-1} u_{n-2}}{u_{n-3}} = \frac{(n-3)! + v_{n-1} v_{n-2}}{v_{n-3}} \\ &= \frac{v_{n-3} v_{n-2} + (n-2) v_{n-3} v_{n-2}}{v_{n-3}} \\ &= v_{n-2} + (n-2) v_{n-2} = (n-1) v_{n-2} = v_n. \end{aligned}$$

Дакле, $u_n = v_n$, за све $n \geqslant 0$, па су сви чланови низа $(u_n)$ цели бројеви.

**586**. За $x = 1$ имамо $f\big(f(y)+1\big) = y + f(1)$. За било који реалан број $a$ нека је $y = a - f(1)$. Тада је $f\big(f(y)+1\big) = a$, па је функција $f$ сирјективна. Специјално, постоји $b$ такво да је $f(b) = -1$. Такође, ако је $f(c) = f(d)$, тада је

$$c + f(1) = f\big(f(c)+1\big) = f\big(f(d)+1\big) = d + f(1),$$

па је $c = d$, тј. функција $f$ је инјективна.

За $x = 1$ и $y = 0$ добијамо $f\big(f(0)+1\big) = f(1)$. Како је $f$ инјективна, закључујемо да је $f(0) = 0$.

За $x \neq 0$ нека је $y = -\dfrac{f(x)}{x}$. Тада је

$$f\big(xf(y) + x\big) = 0 = f(0),$$

па због инјективности закључујемо да је $xf(y) + x = 0$. Тада је

$$f\Big(-\frac{f(x)}{x}\Big) = f(y) = -1 = f(b).$$

Дакле, $-\dfrac{f(x)}{x} = b$ за све $x \neq 0$, тј. $f(x) = -bx$. Заменом у дату једначину добијамо да је $b^2 = 1$, тј. да је $f(x) = x$ или $f(x) = -x$.

**587**. По претпоставци је $s(n_1) < 0{,}8n_1$ за неко $n_1$ и $s(n_2) > 0{,}8n_2$ за неко $n_2 > n_1$. Одредимо најмање $n$ такво да је $n > n_1$ и $s(n) \geqslant 0{,}8n$. Тада је $n \neq n_1$ и $s(n-1) < 0{,}8(n-1)$. Ако је $n-$то слободно бацање промашено, тада је

$$s(n) = s(n-1)0{,}8(n-1) < 0{,}8n \leqslant s(n).$$

Контрадикција! Ако је $n-$то слободно бацање погођено, тада је $s(n) = s(n-1)+1$, па је

$$0 \leqslant 5s(n) - 4n = 5s(n-1) + 5 - 4n < 4(n-1) + 5 - 4n = 1.$$

Како је $5s(n) - 4n$ цео број, то мора бити $5s(n) - 4n = 0$, тј. $s(n) = 0{,}8n$, што значи да је морао постојати тренутак током сезоне у ком је $s(n)$ био једнак тачно $80\%$ од $n$.

**588**. Нека је $S_n$ број речи дужине $n$ у којима се слово $a$ јавља паран број пута, а $T_n$ број речи дужине $n$ у којима се слово $a$ јавља непаран број пута. Тада је $S_n + T_n = 3^n$. Међу $S_n$ речи дужине $n$ у којима се слово $a$ јавља паран број пута има $T_{n-1}$ речи које се завршавају словом $a$ и $2S_{n-1}$ речи које се завршавају словом $b$ или $c$. Дакле, $S_n = T_{n-1} + 2S_{n-1}$. Слично, $T_n = S_{n-1} + 2T_{n-1}$. Одузимајући претходне две једнакости добијамо $S_n - T_n = S_{n-1} - T_{n-1}$, па је $S_n - T_n = S_1 - T_1 = 2 - 1 = 1$, па је $S_n = (3^n + 1)/2$.

**589**. Четири тачке не могу све лежати са исте стране „интересантне" равни, јер би у супротном лежале у равни која је паралелна „интересантној" равни, па би биле компланарне. Према томе, остају две могућности:

(а) да три тачке леже са једне стране „интересантне" равни;

(б) да по две тачке леже са сваке стране „интересантне" равни.

У случају (а) постоји само једна „интересантна" раван и она је паралелна равни $\alpha$ која садржи три тачке и пролази кроз средиште дужи која спаја четврту тачку и њену нормалну пројекцију на раван $\alpha$. Од дате четири тачке једну која ће бити са друге стране „интересантне" равни можемо изабрати на 4 начина, тако да у овом случају постоје укупно 4 „интересантне" равни.

У случају (б) такође постоји једна „интересантна" раван. Два пара тачака у овом случају одређују две мимоилазне праве и простору. Посматрајмо две равни, од којих свака садржи једну од мимоилазних правих и паралелна је другој. Тада је раван која се налази између те две равни, на једнаком растојању од њих „интересантна" раван. У овом случају од 4 тачке парове од по две тачке можемо изабрати на 3 начина.

Сабирајући бројеве „интересантних" равни у случајевима (а) и (б) видимо да их има укупно 7.

**590**. *Решење.* Треба одредити све вредности параметра $m$ за које је скуп решења неједначине $\sqrt{5x^2 + mx + 2} > 1 + 2x$ једнак $\mathbb{R}$. Дату неједначину решавамо користећи познате еквиваленције:

$\sqrt{5x^2+mx+2} > 1+2x$
$\Leftrightarrow \big(5x^2+mx+2 > (1+2x)^2 \wedge 1+2x \geqslant 0\big) \vee \big(5x^2+mx+2 \geqslant 0 \wedge 1+2x < 0\big)$
$\Leftrightarrow \Big(x^2+(m-4)x+1 > 0 \wedge x \geqslant -\dfrac{1}{2}\Big) \vee \Big(5x^2+mx+2 \geqslant 0 \wedge x < -\dfrac{1}{2}\Big).$

Ако са $\mathcal{R}'_m$ означимо скуп решења неједначине $x^2+(m-4)x+1 > 0$, а са $\mathcal{R}''_m$ означимо скуп решења неједначине $5x^2+mx+2 \geqslant 0$, добијамо да је скуп решења полазне неједначине $\mathcal{R}_m$ једнак:

$$\mathcal{R}_m = \Big(\mathcal{R}'_m \cap \Big[-\frac{1}{2}, +\infty\Big)\Big) \cup \Big(\mathcal{R}''_m \cap \Big(-\infty, -\frac{1}{2}\Big)\Big).$$

Једнакост $\mathcal{R}_m = \mathbb{R}$ ће бити испуњена ако и само ако важе следећа два услова:

$$\Big[-\frac{1}{2}, +\infty\Big) \subseteq \mathcal{R}'_m \tag{2.108}$$

и

$$\Big(-\infty, -\frac{1}{2}\Big) \subseteq \mathcal{R}''_m. \tag{2.109}$$

Услов (2.108) биће испуњен ако и само ако је испуњен један од следећа два услова:

1.1) једначина $x^2+(m-4)x+1 = 0$ нема реалних решења (и тада је $\mathcal{R}'_m = \mathbb{R}$);

1.2) једначина $x^2+(m-4)x+1 = 0$ има реалних решења која су оба мања од $-\dfrac{1}{2}$ (ако су $x_1$ и $x_2$ реална решења посматране једначине, при чему је $x_1 \leqslant x_2$, онда је $\mathcal{R}'_m = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$).

1.1) Једначина $x^2+(m-4)x+1 = 0$ нема реалних решења ако и само ако је $D = (m-4)^2 - 4 = m^2 - 8m + 12 < 0$, тј. ако и само ако $m \in (2, 6)$.

1.2) Једначина $x^2+(m-4)x+1 = 0$ има реалних решења која су оба мања од $-\dfrac{1}{2}$ ако и само ако важи

$$\begin{aligned}
& m^2 - 8m + 12 \geqslant 0 \wedge x_1 < -\frac{1}{2} \wedge x_2 < -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\, & m \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty) \wedge x_1 + \frac{1}{2} < 0 \wedge x_2 + \frac{1}{2} < 0 \\
\Leftrightarrow\, & m \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty) \wedge x_1 + \frac{1}{2} + x_2 + \frac{1}{2} < 0 \wedge \Big(x_1 + \frac{1}{2}\Big)\Big(x_2 + \frac{1}{2}\Big) > 0 \\
\Leftrightarrow\, & m \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty) \wedge x_1 + x_2 < -1 \wedge x_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) > -\frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\, & m \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty) \wedge 4 - m < -1 \wedge 1 + \frac{1}{2}(4 - m) > -\frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\, & m \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty) \wedge m \in (5, +\infty) \wedge m \in \Big(-\infty, \frac{13}{2}\Big) \\
\Leftrightarrow\, & m \in \Big[6, \frac{13}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Дакле, услов (2.108) је испуњен ако и само ако $m \in (2,6) \cup \left[6, \frac{13}{2}\right) = \left(2, \frac{13}{2}\right)$

Услов (2.109) биће испуњен ако и само ако је испуњен један од следећа два услова:

2.1) једначина $5x^2 + mx + 2 = 0$ нема реалних решења (и тада је $\mathcal{R}''_m = \mathbb{R}$);

2.2) једначина $5x^2 + mx + 2 = 0$ има реалних решења која су оба већа или једнака $-\frac{1}{2}$ (ако су $x'_1$ и $x'_2$ реална решења посматране једначине, при чему је $x'_1 \leqslant x'_2$, онда је $\mathcal{R}''_m = (-\infty, x'_1] \cup [x'_2, +\infty)$).

2.1) Једначина $5x^2 + mx + 2 = 0$ нема реалних решења ако и само ако је $D' = m^2 - 40 < 0$, тј. ако и само ако $m \in \left(-\sqrt{40}, \sqrt{40}\right)$.

2.2) Једначина $5x^2 + mx + 2 = 0$ има реалних решења која су оба већа или једнака $-\frac{1}{2}$ ако и само ако (слично као у 1.2))

$$\begin{aligned}
& m^2 - 40 \geqslant 0 \wedge x'_1 \geqslant -\frac{1}{2} \wedge x'_2 \geqslant -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\, & m \in \left(-\infty, -\sqrt{40}\right] \cup \left[\sqrt{40}, +\infty\right) \wedge x'_1 + \frac{1}{2} \geqslant 0 \wedge x'_2 + \frac{1}{2} \geqslant 0 \\
& \vdots \\
\Leftrightarrow\, & m \in \left(-\infty, -\sqrt{40}\right].
\end{aligned}$$

Дакле, услов (2.109) је испуњен ако и само ако $m \in \left(-\infty, -\sqrt{40}\right] \cup \left(-\sqrt{40}, \sqrt{40}\right) = \left(-\infty, \sqrt{40}\right)$.

Коначно, оба услова (2.108) и (2.109) су задовољена ако и само ако

$$m \in \left(2, \frac{13}{2}\right) \cap \left(-\infty, \sqrt{40}\right) = \left(2, \sqrt{40}\right).$$

**591**. Ако експлицитно одредимо неколико првих чланова низа,

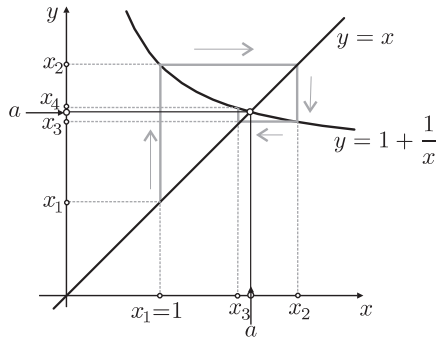
$$\begin{aligned}
& x_1 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2} = 1{,}5, \quad x_5 = \frac{8}{5} = 1{,}6, \quad x_7 = \frac{21}{13} = 1{,}615, \quad \cdots \\
& \quad x_2 = 2, \quad x_4 = \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots, \quad x_6 = \frac{13}{8} = 1{,}625, \quad \cdots
\end{aligned}$$

добијамо представу о приближној вредности траженог броја, али га, овим путем не можемо одредити.

Нека је $f(x) = 1 + 1/x$. Чланови датог низа су: $1, f(1), f(f(1)), f(f(f(1))), \ldots$

Одредимо ове чланове графички тако што најпре у истом координатном систему конструишемо графике $y = 1 + 1/x$ и $y = x$ (слика 2.93). Видимо да се све више приближавамо пресеку графика $y = 1 + 1/x, x > 0$, и $y = x$, тј. позитивном решењу једначине $x = 1 + \frac{1}{x}$: $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2} (\approx 1,61803)$. Број $a$ је тражени број. Приметимо

да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Математичком индукцијом се једноставно доказује да за свако $n$ важе неједнакости $x_{2n+1} < a$ и $x_{2n} > a$.




Слика 2.93.

Очигледно је $x_1 < a < x_2$.

Ако је $x_n < a$, тада је $\dfrac{1}{x_n} > \dfrac{1}{a}$, па је $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n} > 1 + \dfrac{1}{a} = a$.

Уколико је $x_n > a$, тада је $\dfrac{1}{x_n} < \dfrac{1}{a}$, па је $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n} < 1 + \dfrac{1}{a} = a$.

**592**. За свако $n \geqslant 0$ дефинишимо низ $E(n)$ елемената $2^N 3^N$ на следећи начин:

- ако је $n = 0$ онда је низ $E(n)$ празан;
- ако је $n > 0$ паран број, тада је $E(n)$ низ $2E(n/2)$, тј. низ се добија дуплирањем сваког елемента низа $E(n/2)$;
- ако је $n > 0$ непаран број, тада је $E(n)$ низ $(E(n - 3^k), 3^k)$, тј. низ се добија додавањем елемента $3^k$ низу $E(n - 3^k)$, где је $k$ највећи цео број такав да је $3^k \leqslant n$.

Доказаћемо да је збир свих елемената низа $E(n)$ једнак $n$, да су за парно $n$ сви елементи низа $E(n)$ парни, као и да ниједан елемент низа $E(n)$ не дели друге елементе низа.

За $n = 0$ низ је празан, па је збир његових елемената једнак 0.

За паран број $n > 0$ претпоставимо индуктивно да је збир елемената низа $E(n/2)$ једнак $n/2$, да су сви елементи парни и да ниједан елемент не дели остале елементе низа. Тада је, због $E(n) = 2E(n/2)$, збир елемената низа $E(n)$ једнак $2 \cdot n/2 = n$, сви елементи су парни и ниједан елемент не дели остале елементе низа.

Нека је сада $n > 0$ непаран број. Одредимо најпре максимално $k$ такво да је $3^k \leqslant n$. Тада је разлика $n - 3^k$ паран број. Претпоставимо индуктивно да је збир елемената низа $E(n - 3^k)$ једнак $n - 3^k$, да су сви елементи низа $E(n - 3^k)$ парни бројеви и да ниједан елемент тог низа не дели остале елементе. Тада је $E(n) = (E(n - 3^k), 3^k)$ и збир елемената низа $E(n)$ је $(n - 3^k) + 3^k = n$. Ниједан елемент низа $E(n - 3^k)$

не дели $3^k$ (јер су сви елементи низа $E(n-3^k)$ парни). Како је сваки елемент низа $E(n-3^k)/2$ не већи од $(n-3^k)/2 < (3^{k+1}-3^k)/2 = 3^k$, то елемент $3^k$ не дели ниједан од осталих елемената низа $E(n)$.

Тиме смо доказали да су за $n \geqslant 1$ елементи низа $E(n)$ облика $2^N 3^N$, да је њихов збир једнак $n$ и да ниједан од њих не дели остале елементе низа $E(n)$.

**593**. Фиксирајмо $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Нека је $r = u/v$, где су $u$ и $v$ узајамно прости. Тада је

$$c_n\left(\frac{u}{v}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + \cdots + c_1\frac{u}{v} + c_0 = 0,$$

тј. $c_n u^n + c_{n-1}u^{n-1}v + \cdots + c_1 uv^{n-1} + c_0 v^n = 0$, па је

$$\begin{aligned} &c_n u^n + c_{n-1}u^{n-1}v + \cdots + c_{i+1}u^{i+1}v^{n-i-1} \\ =& - c_i u^i v^{n-i} - c_{i-1}u^{i-1}v^{n-i+1} - \cdots - c_1 uv^{n-1} - c_0 v^n. \end{aligned}$$

Десна страна претходне једнакости је садржалац броја $v^{n-i}$, па је и лева страна подељена са $u^i$ садржалац броја $v^{n-i}$, јер су $u^i$ и $v^{n-i}$ узајамно прости бројеви. Дакле, број $c_n u^{n-i} + c_{n-1}u^{n-1-i}v + \cdots + c_{i+1}uv^{n-i-1}$ је дељив бројем $v^{n-i}$, тј. број

$$c_n\left(\frac{u}{v}\right)^{n-i} + c_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1-i} + \cdots + c_{i+1}\frac{u}{v}$$

је цео.

**594**. Посматрајмо полином

$$P(x) = (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) - (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n).$$

Степен полинома $P(x)$ је строго мањи од $n$. Из једнакости производа бројева у свим колонама следи да је $P(b_j) = (b_j+a_1)(b_j+a_2)\cdots(b_j+a_n) = c$, за неку константу $c$, за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Тада полином $P(x) - c$ има $n$ различитих нула: $b_1, b_2, \ldots, b_n$, па како је његов степен мањи од $n$ закључујемо да је $P(x) = c$ за све $x$. Тада је $c = P(-a_i) = (-1)^{n+1}(a_i+b_1)(a_i+b_2)\cdots(a_i+b_n)$, тј. производ бројева у свакој врсти табеле је $(-1)^{n+1}c$.

**595**. Како је (слика 2.94)

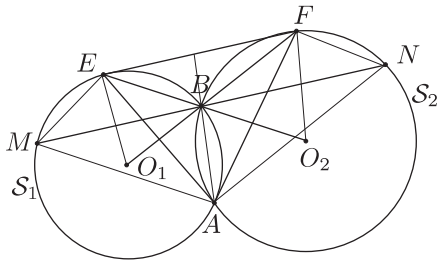
$$\sphericalangle EAB = \frac{1}{2}\sphericalangle EO_1B = 90^\circ - \sphericalangle O_1BE = 90^\circ - \sphericalangle FBO_2 = \sphericalangle BAF,$$

закључујемо да је $AB$ симетрала $\sphericalangle EAF$ и $\sphericalangle O_1BE = 90^\circ - \sphericalangle EAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle EAF$. Сада је

$$\begin{aligned} \sphericalangle EBA + \sphericalangle FBA &= \sphericalangle EBA + (180^\circ - \sphericalangle O_1BA) = 180^\circ + \sphericalangle O_1BE \\ &= 270^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle EAF. \end{aligned}$$

Тада је $\sphericalangle EBF = 90^\circ + \sphericalangle EAF$, што имплицира да је $B$ центар уписане кружнице $\triangle EAF$ (центар уписане кружнице је јединствена тачка $P$ на симетрали $\sphericalangle EAF$ таква

да је $\sphericalangle EPF = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle EAF$), па је $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BEF = \sphericalangle EBM$ (јер је $EF \parallel MN$). Према томе, четвороугао $EBAM$ је једнакокраки трапез, па је $EA = MB$. Аналогно је и $FA = NB$. Дакле, $MN = MB + NB = AE + AF$.




Слика 2.94.

**596**. (а) Нека је $f(x) = x^2 + ax + b$. Како је

$$\begin{aligned} 2 = |1 + a + b + 1 - a + b - 2b| &\leqslant |1 + a + b| + |1 - a + b| + 2|b| \\ &= |f(1)| + |f(-1)| + 2|f(0)|, \end{aligned}$$

то важи бар једна од неједнакости $|f(1)| \geqslant \dfrac{1}{2}$, $|f(-1)| \geqslant \dfrac{1}{2}$, $|f(0)| \geqslant \dfrac{1}{2}$, па је $\max\limits_{x\in[-1,1]} |x^2 + ax + b| \geqslant \dfrac{1}{2}$. Једнакост се достиже за полином $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$.

(б) Нека је $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ и $M = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$. Тада је

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \Big|2 + 2b - 2\Big(\frac{1}{4} + b\Big)\Big| \leqslant |2 + 2b| + 2\Big|\frac{1}{4} + b\Big| \\ &= |(1 + a + b + c) + (1 - a + b - c)| \\ &\quad + 2\Big|\Big(\frac{1}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\Big) - \Big(-\frac{1}{8} + \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c\Big)\Big| \\ &\leqslant |1 + a + b + c| + |1 - a + b - c| + 2\Big|\frac{1}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\Big| + 2\Big|-\frac{1}{8} + \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c\Big| \\ &= |f(1)| + |f(-1)| + 2\Big|f\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big| + 2\Big|f\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big| \\ &\leqslant M + M + 2M + 2M = 6M. \end{aligned}$$

Дакле, $M \geqslant \dfrac{1}{4}$, а једнакост се достиже за $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{4}x$.

НАПОМЕНА. У општем случају важи

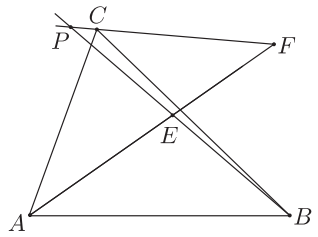
$$\min_{a_i} \max_{x\in[-1,1]} |x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Екстремална вредност се достиже за полином $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$, где је $T_n(x)$ Чебишевљев полином прве врсте $n-$тог степена, дат са $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$.

Користећи адиционе формуле лако се може показати да Чебишевљеви полиноми задовољавају трочлану рекурентну релацију

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots; \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

**597**. Нека је $P$ пресек дужи $BE$ и $CF$ (слика 2.95). Како је $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AF}{AC}$ и $\sphericalangle BAE = \sphericalangle FAC$, троуглови $BAE$ и $FAC$ су слични. Тада је $\sphericalangle AEP = \sphericalangle PCA$, па тачке $A, E, C$ и $P$ леже на једној кружници и $\sphericalangle BPC = \sphericalangle CAE = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Према томе, тачке $P$ леже на кружници $\mathcal{C}$ чије тачке $X$ задовољавају услов да је $\sphericalangle BXC = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BAC$ и чији је центар са исте стране праве $BC$ са које је тачка $A$.




Слика 2.95.

Обратно, нека је $P$ тачка на кружници $\mathcal{C}$. Нека праве $BP$ и $CP$ секу симетралу $\sphericalangle BAC$ редом у тачкама $E$ и $F$. Пошто је $\sphericalangle BPC = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BAC$, то је $\sphericalangle EPF = \sphericalangle EAC$, па тачке $A, E, C, P$ леже на једној кружници. Тако је $\sphericalangle BEA = \sphericalangle FCA$. Такође, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle FAC$, па закључујемо да су троуглови $BAE$ и $FAC$ слични. Тада је $AE \cdot AF = AB \cdot AC$. Дакле, тражено геометријско место тачака је кружница $\mathcal{C}$.

**598**. Нека је $a_1 = 1$. Нека су $a_1, \ldots, a_k$ изабрани тако да задовољавају наведене услове. Нека је $n$ најмањи природан број који се не појављује међу првих $k$ чланова. Према Кинеској теореми о остацима постоји цео број $m$ такав да је

$$m \equiv -a_1 - \cdots - a_k \pmod{k+1}$$

и

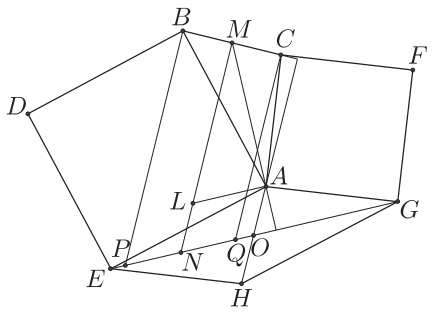
$$m \equiv -a_1 - \cdots - a_k - n \pmod{k+2}.$$

Број $m$ можемо увећати неким садржоцем броја $(k+1)(k+2)$ да обезбедимо да $m$ буде позитиван и да не буде једнак ни једном од бројева $a_1, \ldots, a_k$. Нека је $a_{k+1} = m$ и $a_{k+2} = n$. Такав низ задовољава наведене услове.

**599**. Нека су $M, N, O$ средишта дужи $BC, PQ, EG$, респективно (слика 2.96). Нека је $H$ тачка таква да је $HEAG$ паралелограм. Транслирајући за вектор $\overrightarrow{GA}$, па затим ротирајући око тачке $A$ за угао од $90°$ у смеру кретања казаљке на сату, $\triangle GHA$ ће се поклопити са $\triangle ABC$, а тачка $O$ ће се поклопити са $M$. Према томе, $HA = BC$, $HA \perp BC, OE = OG = MA$.

Нека је $L$ тачка на $MN$ таква да је $AL \parallel EG$. Како је $NL \parallel PB$, $PB \perp BC$, $BC \perp HA$, то је четвороугао $LNOA$ паралелограм, па је $AO = LN$. Пошто је $MA \perp EG$, то је и $MA \perp AL$, па је $ML \geqslant MA$ и важи

$$\begin{aligned} BP + CQ = 2MN = 2(NL + LM) &\geqslant 2(AO + MA) \\ &= 2(MB + OE) = BC + EG. \end{aligned}$$




Слика 2.96.

Једнакост важи када је $ML = MA$, тј. када се тачка $L$ поклапа са $A$, односно када је $AB = AC$.

**600**. Ако оба играју на најбољи начин онда ће други мудрац платити првом 32 динара. Показаћемо најпре да први мудрац може играти тако да добије бар 32 динара. Он у првом кораку треба да прецрта све непарне бројеве. У другом кораку први мудрац може постићи да остану бројеви код којих се две последње цифре у бинарном запису поклапају. Након свог петог корака први мудрац постиже да преостала три броја имају последњих 5 истих цифара у бинарном запису. Без обзира како одиграо други мудрац, преостала два броја ће се разликовати бар за $2^5 = 32$.

Обрнуто, други мудрац својом игром може постићи да се последња 2 броја разликују за не више од 32. Сви бројеви из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 1023, 1024\}$ сем броја 1024 представљени бинарно имају десет цифара (ако неки број има мање од десет цифара додајемо му водеће нуле). Тактика другог мудраца је следећа. Ако је након првог потеза првог мудраца остало мање од 256 бројева чија је водећа цифра у бинарном запису 1, онда други мудрац својим првим потезом прецртава све бројеве чија је водећа цифра у бинарном запису 1 и евентуално број 1024 (ако је непрецртан). Ако је након првог потеза првог мудраца остало мање од 256 бројева чија је водећа цифра у бинарном запису 0, онда други мудрац својим првим потезом прецртава све бројеве чија је водећа цифра у бинарном запису 0 и евентуално број 1024 (ако је непрецртан). У случају да је након првог потеза првог мудраца остало по 256 бројева чије су водеће цифре у бинарном запису 0 и 1 (тада је остао и 1024), тада други мудрац својим првим потезом прецртава све бројеве чија је водећа цифра 0. Наредни потези другог мудраца су слични. На тај начин након својих пет потеза други мудрац може постићи да остану

два броја чијих се првих пет цифара у бинарном запису поклапају или да остане број 1024 и још један број чијих су првих пет цифара у бинарном запису јединице. У оба случаја разлика преостала два броја није већа од 32.