ДРЖАВНИ СЕМИНАР
ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
2017.

5. **УВОД У ТЕОРИЈУ ГРАФОВА**

Војислав Петровић, ПМФ Нови Сад

Где и како се појављују графови?

У пуно савремених, и не само савремених, делатности графови се појављују на природан начин. Служе да се једноставно представе и са различитих аспеката проучавају различите и често сложене структуре. Ево неколико карактеристичних примера.

1) Саобраћајна мрежа

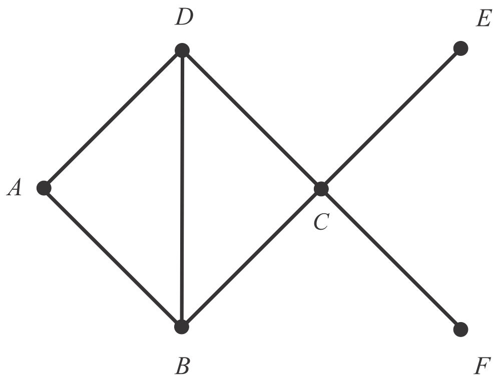
Нека су A, B, C, D, E, F шест градова међу којима су неки међусобно повезани путевима. На пример, A и B, A и D, B и C, B и D, C и D, C и E, C и F. У вези с том мрежом могу да нас интересује више ствари. Рецимо:

1° Да ли је мрежа повезана, тј. да ли се из сваког града у сваки други може стићи једним или преко више путева?

2° Ако је повезана, која су осетљива места? Мисли се на градове или путеве чијим искључењем из саобраћаја мрежа постаје неповезана.

3° Колико се максимално путева може искључити из саобраћаја, тако да остатак мреже буде повезан? Како изгледа мрежа преосталих путева?

Из наведеног описа мреже није једноставно да се дају одговори на постављена питања. То још више долази до изражаја када су бројеви градова и саобраћајница осетно већи. Међутим, ако градове и путеве који их спајају представимо геометријским цртежом као на сл. 1, ситуација постаје далеко јаснија, а одговори на постављена питања се практично намећу.



Сл. 1.

Одговори:

1° Мрежа је повезана. Из града у сваки други може стићи или директно или посредно преко једног или више градова.

2° Осетљиво место је град C. Његовим искључењем из саобраћаја мрежа постаје неповезана. Такође су осетљиве линије CE и CF. Ако се, на пример, искључи CE град E остаје "одсечен".

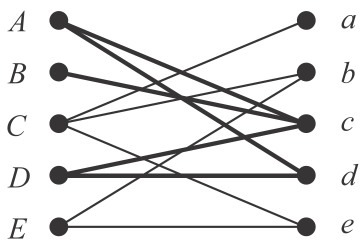
3° Да би мрежа остала повезана, максимално се могу искључити 3 пута. Рецимо, AD, CD и CF. Искључењем било којих 4 или више путева постаје неповезана.

2) Подела послова

Послодавац је објавио конкурс за обављање послова a, b, c, d, e; за сваки посао тачно један радник. На конкурс су се јавили радници A, B, C, D, E. Притом, радник A зна да обавља само послове c и d, радник B само c, радник C само a, b и e, радник D само c и d, радник E само b и e.

Да ли послодавац може да изврши поделу послова, тако да сваки радник ради посао који зна и да сваки посао буде "покривен"? Ако може, како изгледа једна таква расподела?

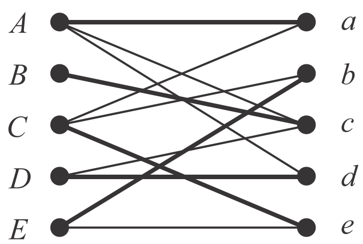
Као и у претходном примеру, увид у у поделу послова биће јаснији ако се радници и послови представе као на сл. 2.



Сл. 2.

Уколико неки радник зна да обавља неки посао, одговарајуће тачке се споје линијом (не мора бити дуж). Са слике се види да је тражена подела послова немогућа. Разлог за то су радници A, B и D који, заједно, могу да" покрију" само послове c и d (пуне линије), па је њих немогуће расподелити на различите послове.

Узмимо да је "квалификација" радника A мало измењена, тако што зна да обавља послове a, c и d, док за остале важи исто као горе (сл. 3).



Сл. 3.

Тада постоји тражена подела: $A - a$, $B - c$, $C - b$, $D - d$, $E - e$ (на сл. 3 пуне линије).

У вези с проблемом поделе послова намећу се следећа питања.

Како разликовати ситуацију кад је подела могућа од оне кад није?

Ако је подела могућа, да ли постоји метод (алгоритам) који даје једну од њих?

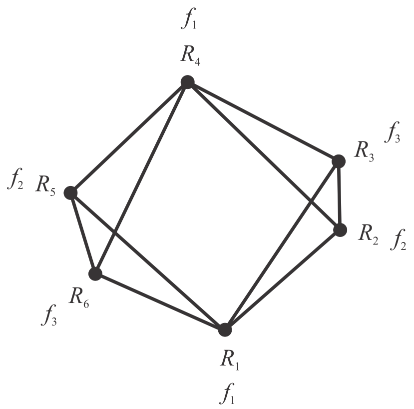
3) Подела фреквенција

На територији једне општине 6 радио станица, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, емитују своје програме. Ако је растојање између две радио станице мање од 10 km и ако имају исте фреквенције, тада ометају једна другу. Колико минимално различитих фреквенција је потребно и како их доделити да би свака радио станица емитовала свој програм без сметњи?

Нека су растојања (у километрима) између појединих радио станица дата следећом табелом.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
R_1	0	6	8,3	12	8,5	5,8
R_2	6	0	3	8,7	11	10,2
R_3	8,3	3	0	7	11	10,9
R_4	12	8,7	7	0	6,6	8,8
R_5	8,5	11	11	6,6	0	3,4
R_6	5,8	10,2	10,9	8,8	3,4	0

Из табеле се види да станица R_1 може радити на истој фреквенцији само са станицом R_4, јер је једино она удаљена више од 10 km. Уместо табелом, читава ситуација се може прегледније приказати сликом 4.



Сл. 4.

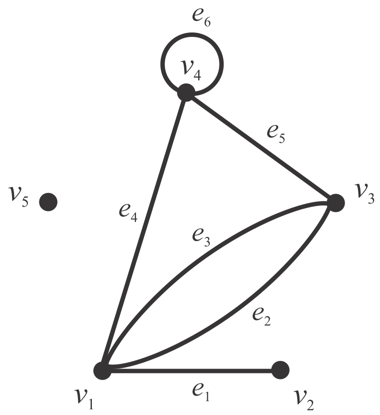
Две тачке су међусобно повезане ако и само ако су одговарајуће радио станице на растојању мањем од 10 km. Са слике се види да читав систем може несметано да ради користећи 3 различите фреквенције f_1, f_2, f_3 расподељене на следећи начин: $R_1, R_4 - f_1$; $R_2, R_5 - f_2$; $R_3, R_6 - f_3$. Са слике се, такође, види да су 2 фреквенције недовољне. Разлог је што су сваке две од радиостаница R_1, R_2, R_3 на међусобном растојању мањем од 10 km и стога морају имати различите фреквенције.

Појам графа

Ако се оставе по страни саобраћајнице, радници и послови, радио станице и фреквенције и сл. остају "огољени" математички објекти који се зову графови. Обично се обележавају са G, а се дефинишу овако.

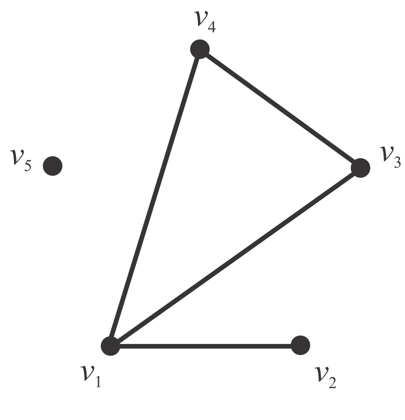
Дефиниција 1. ***Граф*** G је уређен пар (V, E), $G = (V, E)$, где су V и E коначни скупови, при чему је V непразан. Елементи скупа V зову се ***чворови***, а скупа E ***гране***. Притом су гране неуређени парови чворова (не обавезно различитих).

Граф се представља у равни геометријском сликом, тако што чворима одговарају тачке, а гранама дужи или лукови кривих које спајају парове чворова који дефинишу дотичне гране. На пример, на сл. 5 је геометријска слика графа G у којем је $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ и $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.



Сл. 5.

Грана e_1 је одређена неуређеним паром $\{v_1, v_2\}$. То означавамо $e_1 = \{v_1, v_2\}$ или кратко $e_1 = v_1v_2$, при чему имамо у виду да је исто што и $e_1 = v_2v_1$. Кажемо да грана e_1 повезује (спаја) чворове v_1 и v_2, да излази из v_1, односно из v_2, да су v_1 и v_2 њени крајеви, да су v_1 и v_2 суседни преко e_1 и сл. Гране које повезују исти пар чворова зову се ***паралелне гране***. Такве су e_2 и e_3. Грана чији се крајеви поклапају, као што је $e_6 = v_4v_4$, зове ***петља*** или ***лупа***. Граф који не садржи ни паралелне гране, ни петље зове се ***прост граф***. На сл. 6 је пример једног простог графа.



Сл. 6.

Како ћемо даље бавити углавном простим графовима, атрибут прост ћемо изостављати, тј. граф ће значити прост граф.

Скуп суседа чвора v у графу G чине сви чворови u, такви да је vu грана у G. Ако са $N_G(v)$ означимо тај скуп, тада је $N_G(v) = \{u \mid vu \in E(G)\}$. Ако је јасно о којем је графу реч, индекс G се може изоставити и уместо $N_G(v)$ писати $N(v)$. На пример, у графу на сл. сл. 6 је

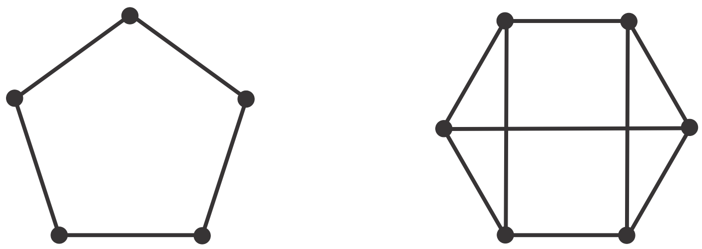
$$N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\} \tag{1}$$

$$N(v_2) = \{v_1\} \tag{2}$$

$$N(v_5) = \emptyset. \tag{3}$$

Степен чвора v у графу G једнак је броју његових суседа у G. Ознака за степен чвора је $d_G(v)$, па је $d_G(v) = |N_G(v)|$. Као у случају скупа суседа, индекс G се може изоставити. Сходно (1), (2) и (3) имамо да су степени чворова v_1, v_2, v_5: $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 1$, $d(v_5) = 0$. Ако граф има n чорова, тада за сваки његов чвор v важи $0 \leq d(v) \leq n - 1$. ***Најмањи степен*** у графу G означава се са $\delta(G)$, а ***највећи степен*** са $\Delta(G)$. Другим речима, $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} d(v)$ и $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d(v)$. У графу на сл. 6 је $\delta(G) = d(v_5) = 0$ и $\Delta(G) = d(v_1) = 3$.

Граф је ***регуларан*** ако сви чворови имају исти степен. Ако је тај степен k, кажемо да је граф ***k-регуларан***. На сл. 7 су примери једног 2-регуларног и једног 3-регуларног графа. (3-регуларни графови се још зову ***кубни графови***.)



Сл. 7.

За степене чворова важи следеће тврђење, познато као Прва теорема теорије графова.

Теорема 1. (Прва теорема) *Збир степена свих чворова графа је паран број и једнак двоструком броју грана, тј.*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| \, .$$

■

На пример, у графу G на сл. 6 је

$$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) =$$
$$3 + 1 + 2 + 2 + 0 = 8 =$$
$$2 \cdot 4 = 2|E(G)|.$$

ЗАДАЦИ

1. (а) Доказати да је у сваком графу број чворова непарног степена паран.

(б) Ако је степен сваког чвора непаран, тада је број чворова графа паран. Доказати.

(в) Ако граф има непаран број чворова, тада је бар један чвор парног степена. Доказати.

Упутство. Искористити теорему 1.

2. У некој групи особа свака особа има тачно 3 познаника. Доказати да је број особа у тој групи паран. (Познанства су узајамна; ако A познаје B, тада и B познаје A.)

3. Могу ли се 66 телефона повезати, тако да је сваки телефон у директној вези са тачно 7 других? А са 11 других?

4. У равни је уочено 2017 тачака и неки парови од њих спојени дужима. Доказати да бар из једне тачке излази паран број дужи.

5. У свакој групи од n $(n \geq 2)$ особа постоје две особе које имају исти број познаника. Доказати. (Познанства су узајамна, као у зад. 2.)

6. Доказати да за сваки паран природан број n $(n \geq 4)$ постоји 3-регуларан (кубни) граф са n чворова.

7. Доказати да за сваки природан број n $(n \geq 5)$ постоји граф са $n + 1$ чворова у којем је тачно n чворова степена 3.

8. Доказати да за сваки природан број n $(n \geq 5)$ постоји 4-регуларан граф са n чворова.

9. У једној група особа бар две особе се познају. Ако сваке две особе које имају исти број познаника немају заједничких суседа, доказати да у тој групи постоји особа која има тачно једног познаника.

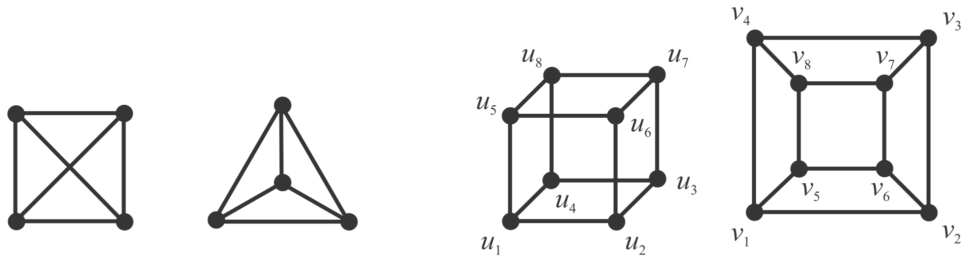
10. У једној групи од $2n$ $(n \geq 2)$ особа, међу сваке 3 постоји особа која се познаје с преостале две. Доказати да се група може разбити на n парова, тако да у сваком пару буду познаници.

11. У једној групи од n $(n \geq 4)$ особа, међу сваке 4 постоји особа која се познаје с преостале три. Доказати да у тој групи постоји особа која се познаје са свим осталим.

Изоморфизам графова, специјални графови, операције с графовима

Изоморфизам графова

Као што је речено, граф се геометријски представља, тако чворовима одговарају тачке у равни (или некој другој површи), а гранама лукови кривих које спајају суседне чворове. На сл. 8 (а) и (б) представљена су два графа чије су геометријске слике потпуно различите. Међутим, ако се посматра само њихова унутрашња структура, онда су то два графа са по 4 чвора, при чему су свака два суседна.



(а) (б) (ц) (д)

Сл. 8.

Слично је с графовима на сл. 8 (ц) и (д). Међу њиховим чворовима може се успоставити веза, тако да су два чвора суседна у једном графу ако и само ако су њима одговарајући чворови суседни у другом. Једна таква веза је: $u_i \leftrightarrow v_i,\ i = 1, 2, \ldots, 8$. То је, заправо, суштина изоморфизма.

Дефиниција 2. Нека су $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ графови. Пресликавање

$$f : V_1 \to V_2$$

која испуњава услове

1. f је бијекција
2. $uv \in E_1 \ \Leftrightarrow \ f(u)f(v) \in E_2$

зове ***изоморфизам*** графа G_1 и графа G_2.

Дефиниција 3. Граф G_1 је ***изоморфан*** са графом G_2 ако постоји изоморфизам графа G_1 на граф G_2. То означавамо са $\boldsymbol{G_1 \cong G_2}$.

Лако се види да је изомофизам графова релација еквиваленције. У исту класу еквиваленције спадају сви графови, такви да су свака два изоморфна. Тако су графови на сл. 8 (а) и (б) изоморфни и припадају истој класи еквиваленције. Изоморфни су и графови на сл. 8 (ц) и (д), али они припадају класи еквиваленције различитој од прве. О томе говори следеће тврђење.

Теорема 2. Нека су $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ графови. Ако је $G_1 \cong G_2$ и f изоморфизам, тада је

(а) $|V_1| = |V_2|$;

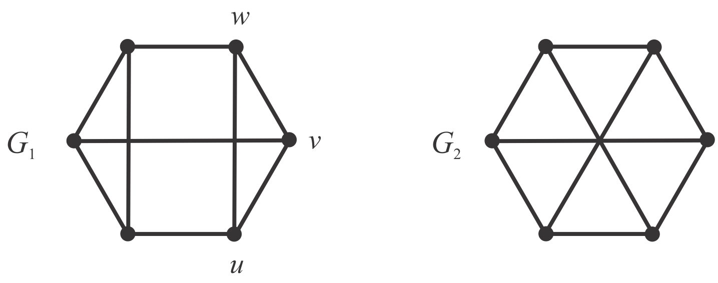
(б) $|E_1| = |E_2|$;

(в) $d_{G_1}(v) = d_{G_2}\big(f(v)\big)$.

■

Из дефиниције следи да изоморфизам графова "чува" суседност чворова. Ако је у првом плану суседност чворова, онда два изоморфна графа представљају једну те исту структуру. Према теореми 2, они имају једнаке бројеве чворова и једнаке бројеве грана.

Теорема 2 је један потребан услов да два графа буду изоморфна. Нажалост, није и довољан. Могу се наћи два графа који испуњавају услове (а), (б) и (ц) из теореме 2, а да нису изоморфни. На пример, за 3-регуларне графове G_1 и G_2 на сл. 9 важи и (а) и (б) и (ц), али нису изоморфни.



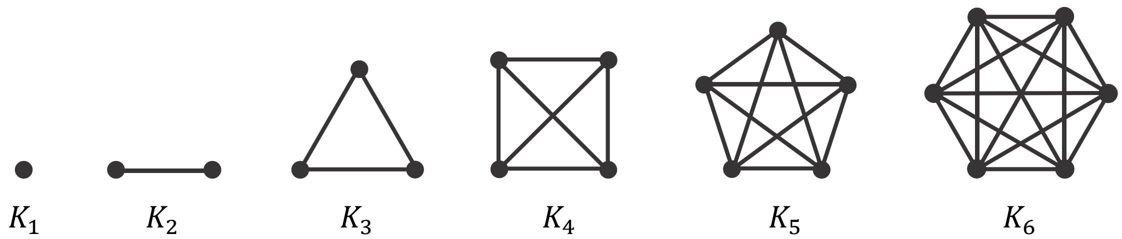
Сл. 9.

То се, рецимо, може закључити посматрањем чворова u, v и w у G_1. Свака два од њих су суседна. Према дефиницији изоморфизма, сваке две од њихових слика морају бити суседни чворови у G_2. Међутим, у G_2 не постоје таква три чвора, тј. за u, v и w нема одговарајућих у G_2.Отуда нема изоморфизма и $G_1 \ncong G_2$.

Специјални графови

Због својих специфичних особина, неки графови издвајају од других. Самим тим имају посебан значај, па стога имају и посебне називе.

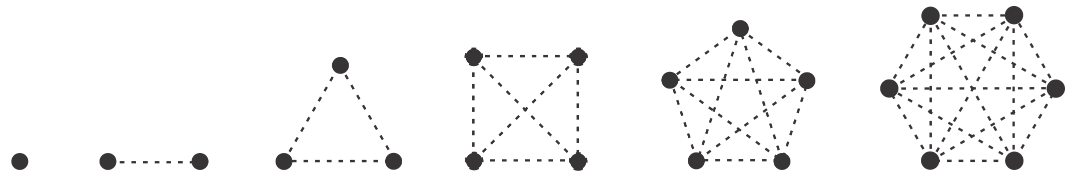
Комплетан граф је граф у којем су свака два чвора суседна. Са K_n ћемо означавати комплетан граф са n $(n \geq 1)$ чворова. На сл. 10 су примери комплетних графова.



Сл. 10.

Лако се види да је $|V(K_n)| = n$ и $|E(K_n)| = \binom{n}{2}$. Како је $d_{K_n}(v) = n - 1$ за сваки чвор $v \in V(K_n)$, комплетан граф K_n је $(n-1)$-регуларан.

Празан граф је граф у којем никоја два чвора нису суседна. То је граф без и једне гране. Ознака за празан граф са n $(n \geq 1)$ чворова је $\overline{K}_n$. На сл. 11 су примери празних графова. (Испрекидане линије означавају одсуство грана између појединих чворова.)

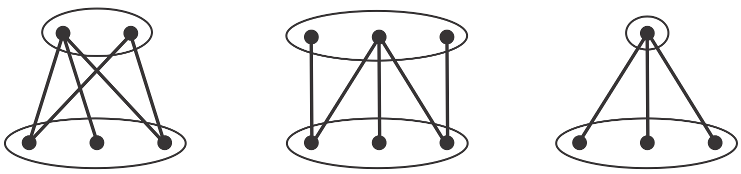


$\overline{K}_1$ $\overline{K}_2$ $\overline{K}_3$ $\overline{K}_4$ $\overline{K}_5$ $\overline{K}_6$

Сл. 11.

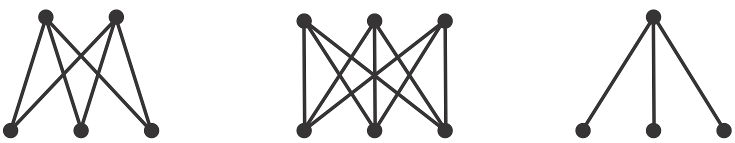
Параметри празног графа су $|V(\overline{K}_n)| = n$ и $|E(\overline{K}_n)| = 0$. $\overline{K}_n$ је 0-регуларан граф.

G је ***бипартитан граф*** ако се његов скуп чворова може разбити на два непразна дисјунктна скупа X и Y, $V(G) = X \cup Y,\ X \neq \emptyset,\ Y \neq \emptyset,\ X \cap Y = \emptyset$, тако да свака грана из G има један крај у X, а други у Y. Скупови X и Y зову се ***класе*** или ***партиције***. Понекад се бипартитан граф G с класама X и Y означава са $G(X, Y)$. Класе X и Y су равноправне, па је $G(X, Y) = G(Y, X)$. Графови на сл. 12. су бипартитни са означеним класама (партицијама).



Сл. 12.

Ако је у бипартитном графу $G(X, Y)$ сваки чвор класе X сусед са сваки чвором класе Y, имамо тзв. ***комплетан бипаритан*** граф. Ознака за комплетан бипаритан граф је $K_{m,n}$, односно $K_{n,m}$, где је $m = |X|$ и $n = |Y|$. На сл. 13 су примери три комплетна бипартитна графа.



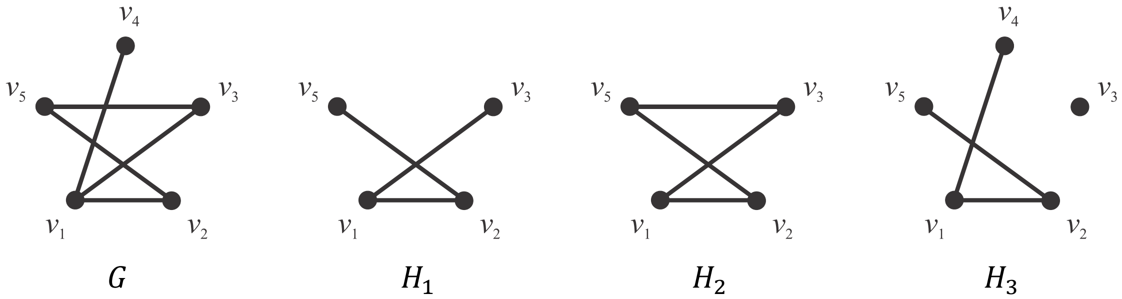
$K_{2,3}$ $K_{3,3}$ $K_{1,3}$

Сл. 13.

За $K_{m,n}$ важи: $\left|V\left(K_{m,n}\right)\right| = m + n,\ \left|E\left(K_{m,n}\right)\right| = m,\ d_{K_{m,n}}(v) = \begin{cases} n\,, & v \in X \\ m, & v \in Y \end{cases}$.

Операције с графовима

Граф H је ***подграф*** графа G, $H \subset G$, ако је $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$. Притом, крајеви грана из H припадају $V(H)$. На сл. 14. су неки подграфови графа G лево.



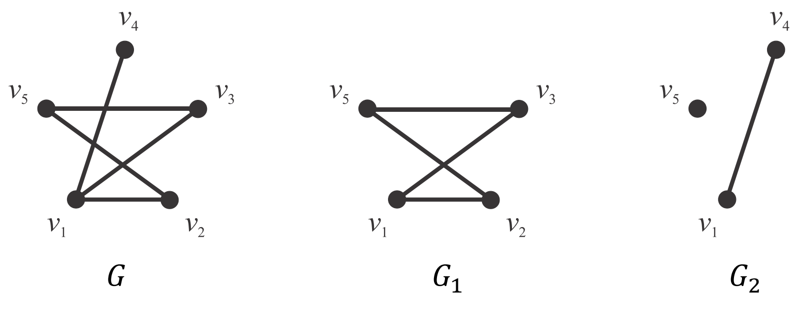
Сл. 14.

Граф H је ***покривајући*** (***разапињући***) ***подграф*** графа G, ако је $V(H) = V(G)$. Такав је H_3 на сл. 14.

Нека је V' подскуп скупа чворова графа G, $V' \subseteq V(G)$. За подграф G' чији је скуп чворова V' и чије су гране све гране из G чија су оба краја у V', кажемо да је ***индукован скупом чворова*** V'. То означавамо са $G' = G[V']$. Тако је граф H_2 на сл. 14. подграф графа G индукован скупом чворова $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$, тј. $H_2 = G[\{v_1, v_2, v_3, v_5\}]$. С друге стране је $H_1 \neq G[\{v_1, v_2, v_3, v_5\}]$, јер недостаје грана $v_3 v_5$. Очигледно је $G[V(G)] = G$.

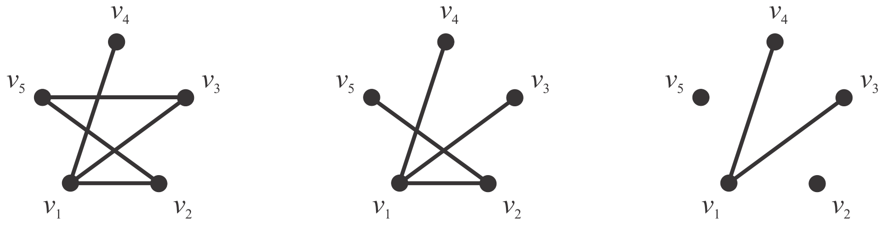
Слично је у случају грана. Нека је E' подскуп скупа грана графа G, $E' \subseteq E(G)$. За подграф G' чији је скуп грана E' и чији скуп чворова унија крајева свих грана из E', кажемо да је ***индукован скупом грана*** E' и пишемо $G' = G[E']$. Такав је граф H_1 на сл. 14, јер је $H_1 = G[\{v_1 v_2,\ v_1 v_3,\ v_2 v_5\}]$.

Ако је v чвор графа G, тада са $G - v$ означавамо граф G' добијен ***"уклањањем чвора"*** v из G. То значи да из G нестаје чвор v и све гране излазе из њега, тј. $V(G') = V(G) - v$ и $E(G') = E(G) - E'$, где су у E' све гране из G које излазе из v. У духу наведених појмова, имам да је $G - v = G[V(G) - v]$. Слично се дефинише ***"уклањање групе чворова"***. Наиме, ако је $V' \subseteq V(G)$, тада је $G - V' = G[V(G) - V']$. На сл. 15. је $G_1 = G - v_4$, док је $G_2 = G - \{v_2, v_3\}$.



Сл. 15.

Постоји и уклањање гране, односно грана, које личи на уклањање чворова, али се и разликује. Нека је e грана графа G. За граф $G' = G - e$ кажемо да је настао из G ***уклањањем гране*** e ако је $V(G') = V(G)$ и $E(G') = E(G) - e$. Слично, за $E' \subseteq E(G)$ дефинишемо граф $G' = G - E$ са $V(G') = V(G)$ и $E(G') = E(G) - E'$. За граф G' кажемо да је настао из G ***уклањањем грана*** E'. На сл. 16 је приказан граф G и графови $G_3 = G - v_3v_5$ и $G_4 = G - \{v_1v_2,\ v_2v_5, v_3v_5\}$.



G $\qquad$ G_3 $\qquad$ G_4

Сл. 16.

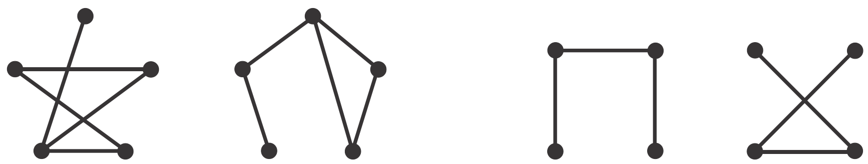
Приметимо да при уклањању грана, за разлику од уклањања чворова, чворови графа G остају недирнути. Другим речима, G' је покривајући подграф графа G.

Комплемент $\overline{\mathbf{G}}$ графа G се дефинише на следећи начин:

$$V(\bar{G}) = V(G)$$

$$E(\bar{G}) = \{uv \mid u, v \in V(G),\ uv \notin E(G)\}.$$

То значи да је $\bar{G}$ покривајући подграф графа G и да два чвора суседна у $\bar{G}$ ако и само ако нису суседни у G. На сл. 17. су приказана два графа и њихови комплементи.



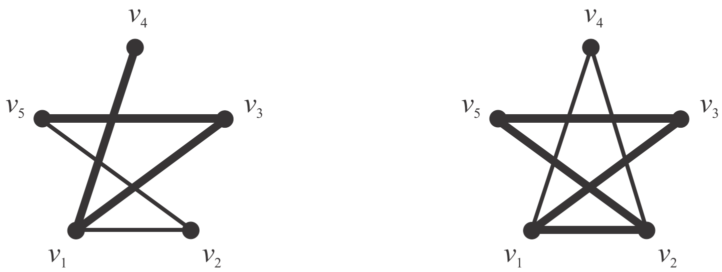
G $\qquad$ $\bar{G}$ $\qquad$ H $\qquad$ $\bar{H}$

Сл. 17.

Из дефиниције следи да се комплемент графа G узима у односу на комплетан граф чији је скуп чворова $V(G)$. Тако је $\bar{G}$ је допуна графа G до комплетног графа са истим скупом чворова. Специјално, празан граф $\overline{K_n}$ је комплемент комплетног графа K_n и обратно.

Путеви, контуре, повезаност графова

Пут у графу G је низ $v_1 v_2 \dots v_k$, $(k \geq 2)$, где $v_i v_{i+1} \in E(G)$, $1 \leq i \leq k-1$, и притом је $v_i \neq v_j$ за $i \neq j$. Ознака за пут са k чворова је P_k. По конвенцији, сам чвор се узима за пут P_1, тзв. тривијални пут. На сл. 18 (а) пуним линијама означен је пут $P_4 = v_4 v_1 v_3 v_5$.



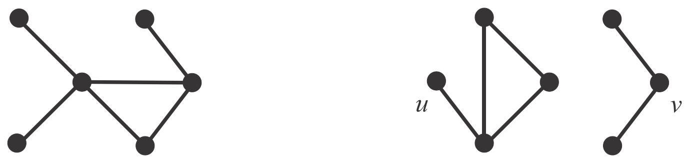
(а) (б)

Сл. 18.

Чворови v_1 и v_k су ***крајеви*** пута $P_k = v_1 v_2 \dots v_k$. Остали чворови, уколико их има, зову се ***унутрашњи***. За пут P_k се још каже да је $(v_1 - v_k)$-пут или, што је исто, $(v_k - v_1)$-пут. Такође се каже да спаја (повезује) v_1 и v_k, да је то пут између v_1 и v_k и сл. ***Дужина*** пута P_k, ознака је $d(P_k)$, једнака је броју грана које садржи, тј. $d(P_k) = k - 1$. У графу са n чворова, најдужи пут онај који садржи све чворове графа. Његова дужина је $n - 1$ и зове се ***Хамилтонов пут***. На пример, пут $P_5 = v_4 v_1 v_3 v_5 v_2$ је Хамилтонов у графу на сл. 18(а).

Контура у графу G је низ $v_1 v_2 \dots v_k$, $(k \geq 3)$, где $v_i v_{i+1}, v_k v_1 \in E(G)$, $1 \leq i \leq k-1$, и притом је $v_i \neq v_j$ за $i \neq j$. Наведену контуру означавамо са $C_k = v_1 v_2 \dots v_k v_1$. На сл. 18(б) је пуним линијама представљена контура $C_4 = v_1 v_2 v_5 v_3 v_1$. Као и у случају пута, дужина контуре C_k, ознака $d(C_k)$, једнака је броју грана које садржи, тј. $d(C_k) = k$. У простом графу (који нема петљи ни паралелних грана) дужина најкраће контуре је 3. У графу са n $(n \geq 3)$ чворова дужина најдуже контуре је n и она се зове ***Хамилтонова контура***. У графу на сл. 18(б) контура $C_5 = v_1 v_3 v_5 v_2 v_4 v_1$ је Хамилтонова.

Граф G је ***повезан*** ако за свака два чвора $u, v \in V(G)$ постоји $(u - v)$-пут у G. У противном је неповезан. По дефиницији, узима се да је граф који се састоји од једног чвора без грана, тј. K_1, повезан. Тако је граф на сл. 19(а) повезан. Међутим, граф на сл. 19(б) је неповезан, јер нема пута између чворова u и v.



(а) (б)

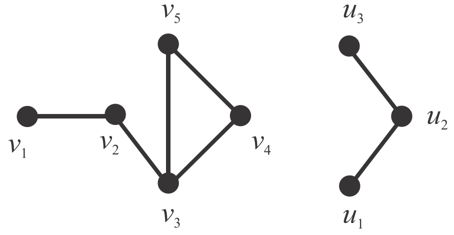
Сл. 19.

Растојање између чворова u и v у графу G једнако је дужини најкраћег $(u - v)$-пута у G. Ознака за растојање је $d_G(u, v)$, с тим да се индекс G може изоставити ако је јасно о ком је графу реч. Очигледно је $d(u, v) = d(v, u)$. По дефиницији је $d_G(u, u) = 0$. Уколико не постоји $(u - v)$-пут, као у графу на сл. 19(б), узима се да је $d(u, v) = \infty$.

Сходно томе, за поједина растојања између чворова графа на сл. 20 важи:

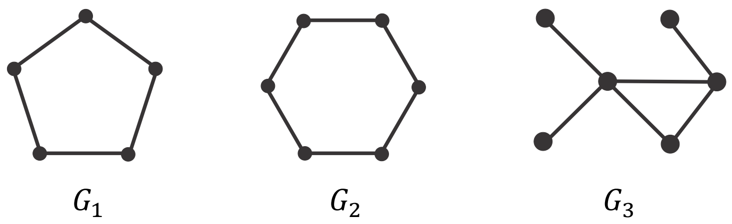
$d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 2$, $d(v_1, v_4) = d(v_1, v_5) = 3$, $d(v_1, u_i) = \infty$

$d(u_2, u_1) = d(u_2, u_3) = 1$, $d(u_2, v_i) = \infty$



Сл. 20

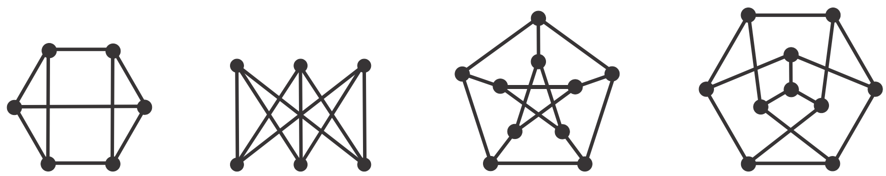
Дијаметар графа G је највеће растојање међу чворовима из G. Ознака за дијаметар је $d(G)$, па је $d(G) = \max_{u,v \in V(G)} d(u, v)$. Ако граф неповезан, као на сл. 20, дијаметар је ∞. За повезане графове, дијаметар је коначан број и притом је $1 \leq d(G) \leq |V(G)| - 1$. Тако је $d(K_1) = 0$ и $d(K_n) = 1$ за $n \geq 2$. Дијаметри графова на сл. 21 су: $d(G_1) = 2$, $d(G_2) = 3$, $d(G_3) = 3$.



Сл. 21.

ЗАДАЦИ

1. Који од графова на сл. 22 су изоморфни?

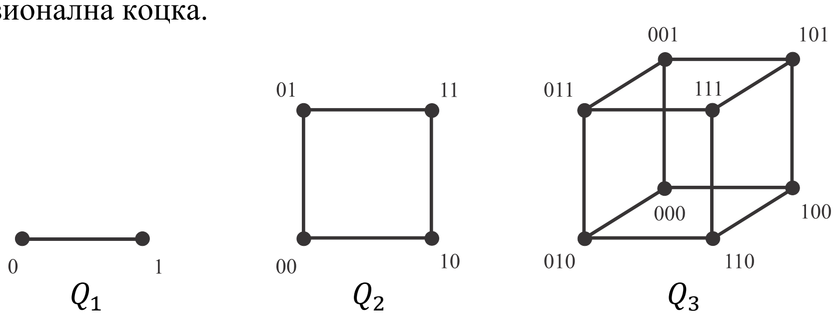


Сл. 22.

2. (а) Који је потребан и довољан услов да комплетни бипартитни графови $K_{p,q}$ и $K_{r,s}$ буду изоморфни?
(б) Колико има неизоморфних комплетних бипартитних графова са 7 чворова?

3. (а) Колико максимално грана може да има бипартитан граф са n чворова?
(б) Да ли постоји бипартитан граф са 10 чворова и 26 грана?

4. ***n*-димензионална коцка** Q_n је граф који се дефинише на следећи начин. Скуп чворова, $V(Q_n)$, чине сви низови $a_1a_2 \dots a_n$, где $a_i \in \{0, 1\}$. Чворови $a = a_1a_2 \dots a_n$ и $b = b_1b_2 \dots b_n$ су суседни, тј. $ab \in E(Q_n)$, ако и само се низови $a_1a_2 \dots a_n$ и $b_1b_2 \dots b_n$ разликују на тачно једном месту. На сл. 23 су приказане 1-димензионална, 2-димензионална и 3-димензионална коцка.



Сл. 23.

(а) Доказати да је Q_n $(n \geq 1)$ n-регуларан граф.
(б) Колико чворова и колико грана има Q_n $(n \geq 1)$?
(в) Доказати да је Q_n $(n \geq 1)$ бипартитан граф.
(г) Доказати да је Q_n $(n \geq 2)$ има Хамилтонову контуру.

5. Одредити све повезане графове G који испуњавају следећи услов. За свако $u, v, w \in V(G)$ из $uv \in E(G)$ и $vw \in E(G)$ следи $uw \in E(G)$.

6. Доказати да је за сваки граф G, бар један о графова G и $\bar{G}$ повезан.

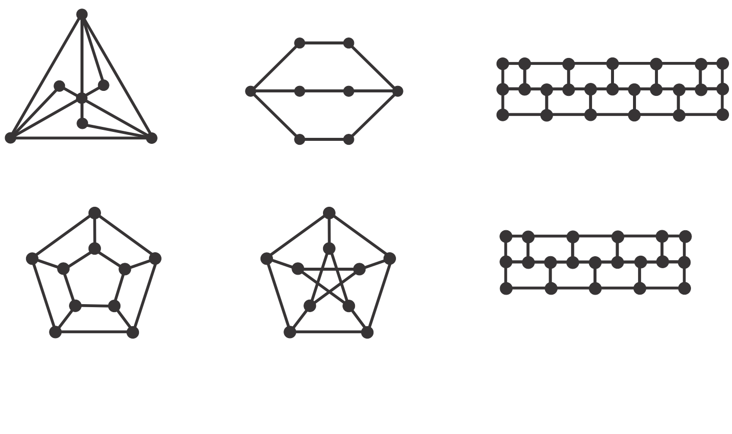
7. Одредити све 2-регуларне графове G, такве да је $\bar{G}$ неповезан.

8. Ако је $d(G) \geq 3$, доказати да је $d(\bar{G}) \leq 2$.

9. Нека је G граф са n $(n \geq 3)$ чворова, такав да је $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$ за сваки чвор $v \in V(G)$. Доказати да је G повезан.

10. (а) Ако за сваки чвор v графа G важи $d(v) \geq 2$, доказати да G садржи контуру.
(б) Ако за сваки чвор v графа G важи $d(v) \geq 3$, доказати да G садржи контуру с тетивом.

11. Који од графова на сл. 24 имају Хамилтонову контуру?



Сл. 24.