

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Материјали за младе математичаре, св. 42

Зоран Каделбург

Миливоје Лукић

Душан Ђукић

Иван Матић

НЕЈЕДНАКОСТИ

Треће допуњено издање

Б Е О Г Р А Д
2021.

Аутори: *др Зоран Каделбург*, Математички факултет у Београду
др Душан Букић, Машински факултет у Београду
др Миливоје Лукић, Rice University, Texas
др Иван Матић, City University, New York

НЕЈЕДНАКОСТИ

Материјали за младе математичаре, свеска 42

Треће допуњено издање

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнеза Михаила 35/IV

<http://www.dms.rs>

За издавача: *др Мирослав Марић*

Рецензент: *др Павле Младеновић*

Уредник: *др Зоран Каделбург*

Цртежи: *Бранка Саздановић*

AMS-класификација: 11–01

УДК: 511.2

© Друштво математичара Србије

CIP – Каталогизација у публикацији

Народна библиотека Србије, Београд

512.13(075.3)(079.1)

НЕЈЕДНАКОСТИ / Зоран Каделбург, ... [и др.] ;
[цртежи Бранка Саздановић]. – 3. допуњено изд. – Београд :
Друштво математичара Србије, 2021 (Крагујевац : Сквер). – 208
стр. : граф. прикази ; 25 см. – (Материјали за младе
математичаре / Друштво математичара Србије ; св. 42)

Тираж 500. – Напомене уз текст. – Регистри. – Библиографија:
стр. 206–208.

ISBN 978–86–6447–024–7

1. Каделбург, Зоран, 1950– [аутор]

COBISS.SR-ID 54370057

ISBN: 978–86–6447–024–7

Тираж: 500 примерака

Штампа: „Сквер“, Крагујевац

ПРЕДГОВОР

Ова књига је намењена средњошколцима. То је у великој мери одредило избор материјала и начин његове презентације. Јер, неједнакости су тема која је толико исцрпна да би заиста било сасвим немогуће на једном месту сабрати и приказати све ситуације у којима се јављају. Покушали смо зато да овде прикупимо онај материјал за који сматрамо да може користити такмичарима, као и осталима који се за ову тему заинтересују. Надамо се да ћемо им на тај начин помоћи у њиховим припремама, како за такмичења, тако и за даље изучавање „озбиљније“ математике.

Осим многих стандардних примера и задатака, у књизи су садржани скоро сви задаци са наших републичких (државних) и савезних такмичења (односно Српских математичких олимпијада) који се тичу неједнакости – означени су на начин за који сматрамо да га не треба објашњавати. Наравно, најчешће то нису оригинална појављивања таквих задатака. У посебној глави су издвојени сви задаци о неједнакостима са математичких олимпијада (међународних, балканских и српских), а још неки предлози за та такмичења су увршћени на одговарајућим местима.

Скоро сви задаци су решени или су дата, по нашем мишљењу, довољно детаљна упутства. Како се неки задаци могу наћи у другим свескама едиције „Материјали за младе математичаре“ (на пример, [5], [7], [10], [14] из списка литературе датом на крају књиге), за решења читаоца у таквим случајевима упућујемо на одговарајућу књигу¹. Неке од свезака ове едиције, међутим, нису више лако доступне (на пример, [4], [25], [27], [32].), па су стога одговарајућа решења уз одређене модификације из њих преузета.

У трећем издању књиге извршене су исправке уочених пропуста, а збирка задатака је допуњена задацима са такмичења последњих година.

Захваљујемо се др Павлу Младеновићу који је у својству рецензента прочитао рукопис и дао корисне примедбе и сугестије. Захваљујемо се и свима који су нас упозорили на пропусте у претходним издањима књиге.

У Београду, децембра 2021. године

Аутори

¹Књиге [7] и [14] се могу видети у електронском облику на сајту Друштва математичара Србије www.dms.rs

САДРЖАЈ

1. ОСНОВНА СВОЈСТВА РЕЛАЦИЈА НЕЈЕДНАКОСТИ	1
2. АЛГЕБАРСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ	6
1. Најједноставније неједнакости	6
2. Неједнакости између средина	8
3. Својства квадратног тринома. Коши-Шварцова неједнакост	13
4. Оцене збирова и производа	15
Задачи	17
3. НЕЈЕДНАКОСТИ СА ЕЛЕМЕНТАРНИМ ФУНКЦИЈАМА	27
Задачи	29
4. ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ	32
Задачи	36
5. ПРИМЕНА МАТЕМАТИЧКЕ ИНДУКЦИЈЕ	43
1. Основни облик математичке индукције	43
2. Регресивна индукција. Неједнакости између средина	45
3. Број e	48
Задачи	50
6. ПРИМЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА	55
Задачи	58
7. КОНВЕСНЕ ФУНКЦИЈЕ. ЈЕНСЕНОВА НЕЈЕДНАКОСТ	60
1. Конвексне и конкавне функције	60
2. Конвексност и диференцијабилност	64
3. Неједнакости везане за конвексне функције	67
4. Јенсенова неједнакост и њене примене	67
5. Јенсен-конвексне функције	71
Задачи	73

8. НЕКЕ КЛАСИЧНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ	76
1. Јангова неједнакост	76
2. Хелдерова неједнакост	78
3. Неједнакост Минковског	80
4. Чебишовљеве неједнакости	81
5. Петровићева неједнакост	83
6. Караматина неједнакост	84
7. Шурова и Мјурхедова неједнакост	86
Задаци	92
9. НЕКЕ ПРИМЕНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ	95
1. Одређивање екстремних вредности	95
2. Метрички простори	103
Задаци	106
10. ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ОЛИМПИЈАДА	111
1. Међународне олимпијаде	115
2. Балканске олимпијаде	116
3. Српске олимпијаде	119
11. РЕШЕЊА И УПУТСТВА ЗА РЕШАВАЊЕ ЗАДАТАКА	121
2. глава	121
3. глава	139
4. глава	143
5. глава	160
6. глава	168
7. глава	170
8. глава	175
9. глава	181
10. глава	191
ИНДЕКС ПОЈМОВА	204
ИНДЕКС ИМЕНА	205
ЛИТЕРАТУРА	206