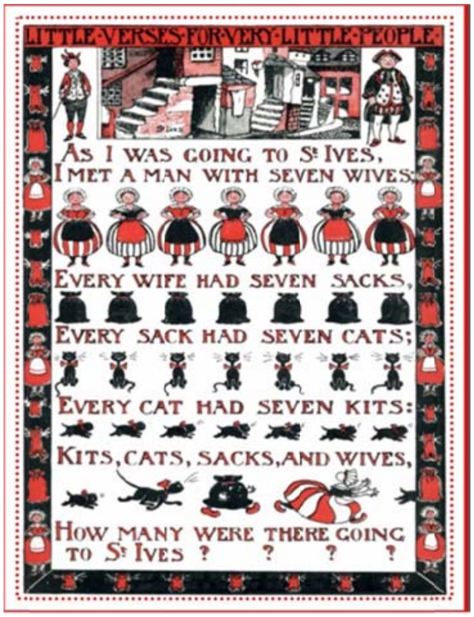
Прогресије – шта ће то мени?

(о аритметичким и геометријским прогресијама)

Александра Равас
Јован Кнежевић
Нела Спасојевић



Републички семинар 2017.

о настави математике и рачунарства у основним и средњим школама

Београд, 11. фебруар 2017.

Кратка историја прогресија

In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In Mathematics alone each generation builds a new story to an old structure.

Херман Хенкел

Како је млади Гаус задивио свог учитеља

Вероватно су ретки они који нису чули причу из времена када је Гаус (1777 — 1855) био дечак. Према њој, једног дана његов учитељ математике задао је ђацима у разреду да саберу бројеве од један до 100. Тек што је задатак био постављен, Гаус је саопштио резултат 5050, што је тачан одговор. Како је дошао до њега? Довољно је приметити да се сабирањем одговарајућих бројева са почетка и краја низа задатак своди на множење два броја.

Задатак са мердевинама (42. задатак из чувене збирке „Задаци за гимнастику ума“) Алкуина из Јорка (735 — 804) кроз живописнији текст проблема суштински тражи исто што и Гаусов учитељ:

> *Мердевине имају 100 газишта. На првом газишту стајао је један голуб, на другом два, на трећем три, на четвртом четири, на петом пет и све тако до стотог газишта. Нека каже, онај ко може, колико је ту укупно било голубова?*

Алкуиново решење указује да је концепт одређивања траженог збира био познат у IX веку, скоро хиљаду година пре него што је Гаус збунио свог учитеља:

> *Биће их оволико: узми голуба са првог газишта и додај га групи од 99 голубова који седе на 99-ом газишту, добићеш 100. Уради исто са другим и 98-им газиштем и такође ћеш добити 100. Комбиновањем свих газишта на овај начин, тј. једног од виших газишта са једним од нижих, увек ћеш добити 100. Међутим, педесето газиште је само и нема свог парњака; слично, стото газиште нема* парњака. Сабери све и биће 5050 голубова.

Мало историје

Иако је број различитих правила којима се може дефинисати низ бројева бесконачан, што омогућава постојање бесконачно много различитих низова, односно прогресија, кроз историју математике изучавано је само неколико. Најпре аритметичка и геометријска, а са Грцима и хармонијска. Иако су, према Боецију (око 510.), Грци изучавали само те три прогресије, каснији аутори спомињу још три, али их не именују.[1] Понекад се у радовима појављују посебне врсте прогресија, па тако Штифел у својој књизи *Arithmetica Integra* из 1544 (fol. 64), спомиње *астрономску прогресију* (*astronomica progressio*), односно низ „астрономских разломака“:

$$1, \frac{1}{60}, \frac{1}{3600}, \cdots$$

што је један од ретких примера опадајуће прогресије која се може наћи у првим европским књигама.

---

[1] "Vocantur aute quarta: quinta: vel sexta" (*Arithmetica*, I издање, 1488, књига II, поглавље 41 ; ур. Friedlein, стр. 139).

Већина индијских аутора изучавала је само две основне прогресије, али су Брамагупта (око 628.), Махавира (око 850.) и Баскара (око 1150.) разматрали збирове квадрата и кубова. Постоје арапски и јеврејски аутори који су се такође бавили тим специјалним прогресијама.

Већина средњевековних и аутора ране ренесансе углавном је користила растуће прогресије, али се опадајуће могу наћи код Ахмеса, Архимеда и неких кинеских писаца који су стварали вековима раније.

Интересантно је да је до XVII века, уместо класификације на аритметичке, геометријске и хармонијске прогресије, коришћена подела на природне и неприродне, непрекидне и прекидне, али су ти називи на почетку коришћени прилично слободно. Тако је прогресија 1, 2, 3, ... називана природном, а прекидна или подељена прогресија била је она код које разлика узастопних чланова није била једнака јединици.

Назив

Грчки назив за низове, који су први употребили рани Питагорејци, био је εκθεσιζ (*ek'thesis*), у буквалном значењу распродаја,[2] а назив за члан низа био је οροζ (*hor'os*), у буквалном значењу, граница.[3] Боеције (око 510.), попут осталих аутора који су писали на латинском, користи реч *progressio*, што је било уобичајено све до скора.

Реч прогресија води порекло од латинских речи *pro* (са индо-европским кореном *per*-), у значењу „напред“, и gressus (партицип перфекта глагола *gradi*, „ходати, корачати“), са индо-европским кореном *ghredh*-, чије је изворно значење „ходање ка напред“; пошто се сматра или нада да је ситуација ка којој се иде боља од тренутне, именица *прогрес* добила је значење „побољшање“. У математици, прогресија је алтернативни назив за низ, јер чланови прогресије „ходају ка напред“, један иза другог.

У радовима холандских и немачких математичара срећу се веома различити термини, зато што су се они држали свог обичаја да избегавају називе изведене из латинског.

Чини се да се прелазак на коришћење термина „низови“ (*series*) десио у XVII веку. На пример, Џејмс Грегори, пишући 1671, говори о „бесконачним низовима“ (*infinite serieses*), међутим, Валис је у свом издању Алгебре из 1693, за бесконачне низове користио термин „бесконачне прогресије“.

Аритметичке прогресије

Први пример артиметичке прогресије у историји, забележен је у Ахмесовом папирусу (око 1550 п.н.е.) где се могу наћи два задатка која их користе. Први задатак гласи:

> *Подели 100 векни између 5 особа на такав начин да број векни које добију прве две особе буде исти као једна седмина броја векни које добију преостале три особе.*

Из решења се види да се подразумева да је број векни изражен аритметичком прогресијом код које је $n = 5, S_5 = 100$ и још важи:

$$\frac{(a+4d)+(a+3d)+(a+2d)}{7} = (a+d)+a$$

---

[2] Додатно, та реч може да има и значење изложба, излагање.

[3] Иста реч је означавала и међу, гранични камен, правило, стандард или границу између два објекта.

Одатле је $2d = 11a$, па је

$$S_5 = \frac{a + (a + 4d)}{2} \cdot 5 = 5a + 10d = 60a = 100$$

Зато је $a = 1\frac{2}{3}$ и још је $d = 9\frac{1}{6}$, те је тражена подела $1\frac{2}{3}, 10\frac{5}{6}, 20, 29\frac{1}{6}, 38\frac{1}{3}$,уз напомену да Ахмес није користио наведени, савремени начин да реши постављени задатак.

Други задатак, у оригиналном, Ахмесовом тексту, гласи:

> *Правило дистрибуције разлике. Ако ти се каже да има 10 мерица жита, и да их треба поделити на 10 особа тако да разлика које свака од њих добије у мерицама жита износи $\frac{1}{8}$. Узми средину мерица, дакле 1 Одузми 1 од 10, остаје 9.Одреди половину разлике, дакле $\frac{1}{16}$. Узми је 9 пута. Тако добијаш $\frac{1}{2}\ \frac{1}{16}$. Додај то на део средине. Затим одузми разлику $\frac{1}{2}$ од сваког дела, да би добио решење. Учини како је приказано:*

$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{16}$	$1\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$	$1\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{16}$	$1\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$	$1\ \frac{1}{16}$
$\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$

У савременој формулацији, задатак би гласио:

> *Поделити 10 мерица жита на 10 особа тако да свака добије $\frac{1}{8}$ мерице мање од претходне.*

То значи да је $n = 10$, $S_n = 10$, $d = -\frac{1}{8}$, па је

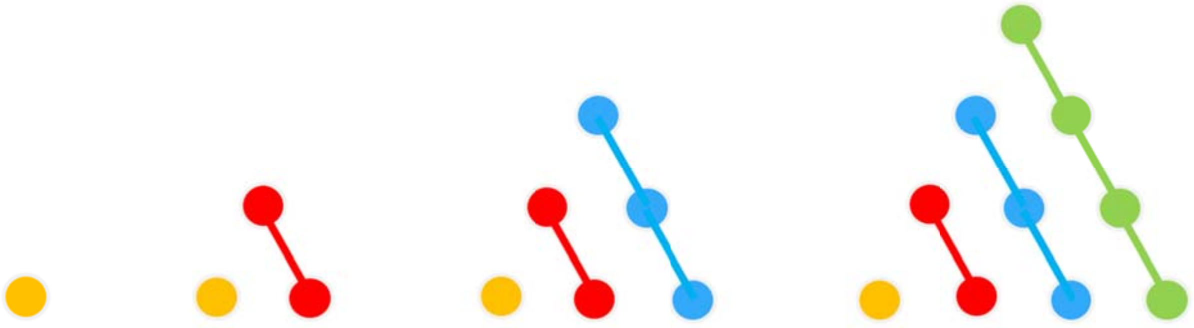
$$S_n = 10 = \frac{2a + (n-1)d}{2} \cdot n = \left(2a - \frac{9}{8}\right) \cdot 5$$

Одатле је $a = 1\frac{9}{16}$, а тражени низ је опадајућа прогресија:

$$1\frac{9}{16}, 1\frac{7}{16}, 1\frac{5}{16}, \cdots, \frac{9}{16}, \frac{7}{16}$$

Веза са фигуративим бројевима

Грци су познавали теорију аритметичких прогресија, али су је обично разматрали кроз полигоналне или фигуративне бројеве. На пример, ово су прва четири троугаона броја:



Очигледно је да је сваки од тих бројева збир прогресије $\sum_1^n \mathrm{n}$. Фигуративне бројеве разматрао је још Никомах из Герасе (око 100.) у свом делу „Увод у аритметику“ (*Introductio Arithmeticae*), значајном по томе што представља први систематични рад у коме се аритметика излаже независно од геометрије.

Геометријске прогресије

Најстарији познати примери геометријских прогресија откривени су на глиненим вавилонским таблицама датираним на 2000. година п. н. е. Први нађени задатак у египатској математици који се своди на геометријску прогресију је задатак под бројем 79 са Ахмесовог папируса, и он гласи:

Скала *јединице*		домаћинстава	7
		мачака	49
једанпут даје	2801	мишева	343
удвостручено даје	5602	снопова жита	2401
четвороструко даје	11204	хеката[4] (мерица жита)	16807
укупно	19607	укупно	19607

Према Смиту, колона са леве стране вероватно је замишљена као правило за сумирање геометријске прогресије. Изгледа да је Ахмес приметио да, онда када је количник једнак првом члану, важи да је $S_n = (S_{n-1} + 1) \cdot q$. Зато је израчунао да је збир прва четири члана 2800, томе је додао 1, и помножио резултат са 7 како би добио збир пет чланова. Могуће да се у томе очитава значај израза „Скала јединице“. Слично, код колоне са десне стране, врло је могуће да је Ахмес сабрао четири члана, затим додао 1, добивши 2801 који се налази у левој колони, и на крају га, на типичан египатски начин, помножио са 7, представивши ту седмицу као збир бројева 1 2 и 4.

Ахмесов задатак личи на чувени задатак о седам мачака, али је на папирусу другачије постављен. Међутим, према Бартону, можда би запис могао да се протумачи овако:

> *У свакој од седам кућа има по седам мачака. Свака мачка улови седам мишева. Сваки од тих мишева могао је да поједе седам снопова жита, а сваки од тих седам снопова, могао је да да принос од седам хеката мерица жита. Колико је жита на тај начин сачувано? (или можда: куће, мачке, мишеви, снопови, мерице жита, колико је свих тих ствари укупно?)*

---

[4] *Hekt* (*hekat*) је била мера за запремину.

Сличан задатак може се наћи у Фибоначијевој „Књизи о рачунању“ (*Liber abaci*, 1202) и тамо је решен на сличан начин, а гласи:

Ci sono sette vecchie in viaggio per Roma	*Седам старица путовало је у Рим;*
Ognuna di esse ha sette muli	*Свака је имала седам магараца;*
Ogni mulo porta sette sacchi	*Сваки магарац носио је седам џакова;*
Ogni sacco contiene sette pagnotte	*У сваком џаку било је по седам хлебова;*
In ogni pagnotta ci sono sette coltelli	*Уз сваки хлеб било је седам ножева;*
Ogni coltello è in sette foderi	*Сваки нож имао је седам корица.*
Donne, muli, sacchi, pagnotte, coltelli, foderi: in quanti viaggiano per Roma?	*Жене, магарци, џакови, хлебови, ножеви, корице, колико их је путовало за Рим?*

Фибоначијева формулација, све са навођењем баш броја седам, може се препознати и у старој дечјој песмици пореклом са енглеског говорног подручја, која гласи:

As I was going to Saint Ives,	*Кад сам путовао у Сент Ајвз,*
I met a man with seven wives.	*Срео сам човека са седам супруга.*
Each wife had seven sacks;	*Свака жена имала је седам џакова;*
Every sack had seven cats;	*У сваком џаку било је седам мачака;*
Every cat had seven kits;	*Свака мачка имала је седам мачића;*
Kits, cats, sacks, and wives,	*Мачићи, мачке, џакови, жене,*
How many were going to Saint Ives?	*колико њих је ишло у Сент Ајвз?*

И ова песмица наводи на помисао да треба израчунати збир геометријске прогресије, али ако се обрати пажња на први и последњи стих, можда и није потребан велики труд да се да одговор. И док је трик питање очигледан англосаксонски допринос, полазни проблем био је интересантан различитим нацијама током више векова.

За разлику од Египћана, за које се то не може са сигурношћу тврдити, Грци су знали како да сумирају геометријске прогресије, а код Еуклида се може наћи правило које у савременој нотацији гласи:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

И које уствари каже:

$$\frac{aq^n - a}{S_n} = \frac{aq - a}{a}$$

Одакле се добија позната формула:

$$S_n = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

У Индији, интерес за геометријске прогресије углавном се заустављао на задацима који траже одређивање њиховог збира. Следи пример типичног задатка, који се може наћи у радовима Бхаскаре (око 1150.):

> *Неко даде просјаку пар шкољки, уз обећање да ће сваког следећег дана удвостручити износ милостиње. Колико ће nishcas*[5] *та особа поклонити за месец дана?*

Арапи су преузели правило за одређивање збира прогресије од Грка, и оно се појављује у интересантном облику у делима Албирунија (око 1000.).

Литература

1. David Eugene Smith, *History Of Mathematics II*, Dover Publications Inc, New York, 1958.
2. Steven Schwartzman, *The Words of Mathematics, An Etymological Dictionary of Mathematical Terms Used in English*, MAA, Washington, 1994.
3. David M. Burton, *The History of Mathematics, AN INTRODUCTION*, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York, 2011.

---

[5] *Nishca* је реч која означава 16x16x4x20 шкољки. У Бхаскарино доба, шкољке су коришћене као новчане јединице. Одговор који се појављује у преводу износи 2.147.483.646 шкољки, односно 104.857 *nishcas*, 9 *drammas*, 9 *panas*, 2 *cacinis* и 6 шкољки. Видети Heath, *Euclid*, књига II, стр. 291

Примена прогресија

- Аритметичка средина првих десет чланова аритметичког низа је 6. Аритметичка средина првих двадесет чланова аритметичког низа је 16. Одреди петнаести члан низа.

- Да би се на клавиру добила нота средње C, он се штимује тако да жица вибрира 262 пута у секунди, што износи 262 херца. C за октаву више, штимује се на 524 херца. Штимовање за преосталих 11 нота које се налазе између те две, ради се уз помоћ методе једнаких темперамената који су задати низом $a_n = 262 \cdot 2^{n/12}$. Одредити вредности на које се штимују те остале ноте.

- Сваки човек има једну мајку, две баке, четири прабаке, осам пра-прабака и тако даље. Ако реч „пра“ ставимо испред речи бака 36 пута, колико онда један човек има таквих предака? Да ли је тај број већи или мањи од тренутног броја људи на нашој планети?

- Ако 1. септембра ставите у касицу 1 динар, и затим наставите да штедите убацујући сваког дана дупло више новца него претходног, колико ћете убацити у касицу 30. септембра? Укупна уштеђевина може се израчунати сабирањем 30 уложених износа. Посматрајте како се износ улога повећава свакодневно и размислите како да дођете до месечне суме. Образложите свој одговор.

- Предлог за рад у групама. У свакој групи изабрати некога ко ће да измисли формулу за општи члан низа, али је неће показати осталим члановима групе. Уместо тога, писаће чланове низа на папиру, један по један, почевши од првог. Сваки пут када се открије нови члан низа, цела група има задатак да погоди следећи. У тренутку када успеју тачно да предвиде следећи члан низа, нови задатак им је да нађу формулу за општи члан низа.

- Милица је почела да чита књигу 1. октобра, када је прочитала 5 страна. Ако сваког следећег дана прочита две стране више него претходног, колико ће страница прочитати током октобра?

- Уколико систем за вентилацију не буде уведен до договореног датума, фирма која изводи радове мора да плати 60.000 РСД казне за први дан кашњења, 72.000 РСД за други дан кашњења, 84.000 РСД за трећи дан кашњења итд. Ако увођење система буде завршено са 10 дана закашњења, колики је укупан износ казне који мора да плати ангажована фирма?

- Браћа Саша и Зоран имају по једно дете од 13 година. Сваки од њих жели да за 18. рођендан поклони свом детету ауто. Саша бира да купује две срећке недељно следећих 5 година, у нади да ће свом детету освојити ауто као награду. Једна срећка кошта 250 РСД. Зоран, који сматра да игре на срећу тешко могу да донесу зараду, бира да, током следећих 5 година, сваке недеље одвоји 500 РСД и уштеђену суму уплати на штедни рачун свака 3 месеца како би на крају купио полован ауто. Банка ће му на уложени новац платити 5% годишње камате која се приписује на тромесечном нивоу. Који брат има бољу тактику? Образложити одговор.

Гимназије

Аритметички низ:

Задаци које би обавезно требало одрадити на часу:

1. Дат је аритметички низ, $a_4 = 1$, $a_{332} = 2$. Одредити a_{168}.
2. Дат је аритметички низ за који је $a_1 = 14{,}5$, $d = 0{,}07$. Ако је $a_n = 32$, одредити n и S_n.

   Решење: Формула за општи члан низа гласи
   $$a_n = a_1 + (n-1)d,$$
   па имамо да ја $32 = 14{,}5 + (n-1) \cdot 0{,}07$, односно $17{,}5 = \frac{7}{100}(n-1)$. Велики број ученика има проблема при рачуну са децималним бројевима, па је ову једначину погодно написати у облику
   $$\frac{35}{2} = \frac{7}{100} \cdot (n-1).$$
   Множењем једначине са $\frac{100}{7}$, налазимо да је $250 = n-1$, одакле је $n = 251$.

   Формула за суму првих n чланова низа гласи
   $$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)\,,$$
   одакле налазимо да је
   $$S_{251} = \frac{251}{2} \cdot \left(29 + 250 \cdot \frac{7}{100}\right).$$
   Сређивањем израза унутар заграде, закључујемо да је
   $$S_{251} = \frac{251 \cdot 93}{4}.$$
   □

3. Дат је аритметички низ за који је $S_3 = 30$, $S_5 = 75$ и $S_n = 105$. Одредити a_1, d и n.

   Решење: Из $S_3 = 30$ и $S_5 = 75$, можемо закључити да је
   $$a_1 + a_2 + a_3 = 30,$$
   $$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 75.$$
   Искористимо да је $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, итд. Имамо сада да је
   $$3(a_1 + d) = 30,$$
   $$5(a_1 + 2d) = 75.$$
   Скраћивањем прве једначине са 3, имамо да је $a_1 + d = 10$, а скраћивањем друге са 5, да је $a_1 + 2d = 15$. Одатле лако закључујемо да је $d = 5$, а потом, заменом у било коју од две једначине, и да је $a_1 = 5$.

   Како бисмо одредили n, уочимо да је
   $$105 = \frac{n}{2} \cdot (10 + 5(n-1))\,.$$
   Можемо извадити 5 испред заграде и помножити једначину са $\frac{1}{5}$. Налазимо да је $n(n+1) = 42$, одакле се лако налази да је $n = 6$. □

4. Дат је аритметички низ за који је $a_1 = 41$, $d = 2$. Ако је $S_n = 4784$, одредити n.

Решење: Имамо да је

$$\frac{n}{2} \cdot (2 \cdot 41 + (n-1) \cdot 2) = 4784.$$

Сређивањем те једнакости долазимо до квадратне једначине

$$n^2 + 40n - 4784 = 0.$$

Раставимо број 4784 на чиниоце: $4784 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 23$. Како коефицијент уз линеарни члан морамо да раставимо на два броја чија је разлика једнака 40, закључујемо да двојке морамо да расподелимо у два броја, што битно смањује број могућих комбинација. Налазимо да је

$$n^2 + 40n - 4784 = n^2 + 92n - 52n - 4784 = (n-52)(n+92).$$

Како је $n \in \mathbb{N}$, решење $n = -92$ отписујемо, па имамо да је $n = 52$.

Напомена: Постоје и другачији начини да се реши једначина

$$n^2 + 40n - 4784 = 0.$$

Једна од опција је формирање канонског облика:

$$n^2 + 40n - 4784 = n^2 + 40n + 400 - 400 - 4784 = (n+20)^2 - 5184 = 0,$$

па како корен из 5184 износи 72, помоћу разлике квадрата налазимо два решења. ,,Физикалци" су склони да реше једначину на следећи начин:

$$n_{1,2} = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 + 4 \cdot 4784}}{2} = \frac{-40 \pm 2\sqrt{400 + 4784}}{2} = -20 \pm \sqrt{5184}.$$

□

5. Дат је аритметички низ у коме важи

$$a_1^2 + a_3^2 = 68 \qquad \text{и} \qquad a_2 \cdot a_4 = 55.$$

Одредити индекс члана низа који је једнак 131.

Решење: Имамо да је

$$a_1^2 + a_1^2 + 4ad + 4d^2 = 68,$$
$$(a_1 + d)(a_1 + 3d) = 55,$$

односно да је

$$a_1^2 + 2ad + 2d^2 = 34,$$
$$a_1^2 + 4ad + 3d^2 = 55.$$

Потребно је помножити прву једначину са 55, а другу са -34, и саберимо их. Имамо да је

$$21a_1^2 - 26a_1d + 8d^2 = 0,$$

што можемо написати као $21a_1^2 - 14a_1d - 12a_1d + 8d^2 = 0$, односно као $7a_1(3a_1 - 2d) - 4d(3a_1 - 2d) = 0$. Имамо, дакле, да је

$$(3a_1 - 2d)(7a_1 - 4d) = 0,$$

те мора бити $a_1 = \frac{2}{3}d$ или $a_1 = \frac{4}{7}d$.

Заменом $a_1 = \frac{2}{3}d$ у $a^2 + 2ad + 2d^2 = 34$, налазимо да је

$$\frac{4}{9}d^2 + \frac{4}{3}d^2 + 2d^2 = 34.$$

Сређивањем, имамо да је $\frac{34}{9}d^2 = 34$, одакле налазимо да је $d^2 = 9$, односно $d = \pm 3$.

Ако је $d = -3$, онда је $a = -2$, те је одговарајући низ $-2, -5, -8, -11, \ldots$. Тај низ не може имати члан 131.

Ако је $d = 3$, ода је $a = 2$, те је одговарајући низ $2, 5, 8, 11, \ldots$. Имамо да је

$131 = 2 + (n-1)\cdot 3$, па је $n = 44$.

Заменом $a_1 = \frac{4}{7}d$ у $a^2 + 2ad + 2d^2 = 34$, налазимо да је

$$\frac{16}{49}d^2 + \frac{8}{7}d^2 + 2d^2 = 34.$$

Сређивањем, имамо да је $d = \pm\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Ако је $d = \frac{7\sqrt{5}}{5}$, онда је $a = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, а ако је $d = -\frac{7\sqrt{5}}{5}$, онда је $a = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$. У оба случаја, одговарајући низови неће имати члан 131, јер је

$$131 = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5} + (n-1)\cdot\left(\pm\frac{7\sqrt{5}}{5}\right),$$

односно

$$131 = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot(4 + 7(n-1)),$$

а мора бити $n \in \mathbb{N}$.

Дакле, решење је $n = 44$. □

6. Дат је аритметички низ у коме важи

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \qquad \text{и} \qquad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 = 0{,}1.$$

Одредити тај низ.

Решење: Из прве једначине имамо да је $4a_1 + 6d = 1$.

Из друге једначине налазимо да је

$$a_1^3 + (a_1+d)^3 + (a_1+2d)^3 + (a_1+3d)^3 = \frac{1}{10}.$$

Групишимо први и последњи чинилац са леве стране, као и два унутрашња, и раставимо их као збир кубова. Имамо да је

$$(2a_1+3d)\cdot\left(a_1^2 - a_1(a_1+3d) + (a_1+3d)^2\right) +$$
$$+(2a_1+3d)\cdot\left((a_1+d)^2 - (a_1+d)(a_1+2d) + (a_1+2d)^2\right) = \frac{1}{10}$$

Како из прве једначине можемо уочити да је $2a_1 + 3d = \frac{1}{2}$, закључујемо да је

$$a_1^2 - a_1(a_1+3d) + (a_1+3d)^2 + (a_1+d)^2 - (a_1+d)(a_1+2d) + (a_1+2d)^2 = \frac{1}{5}.$$

Сређивањем израза са леве стране, налазимо да је

$$a_1^2 + 3a_1d + 6d^2 = \frac{1}{10},$$

то јест, да је

$$\left(a_1 + \frac{3}{2}d\right)^2 - \frac{9}{4}d^2 + 6d^2 = \frac{1}{10}.$$

Како је $4a_1 + 6d = 1$, имамо да је $a_1 + \frac{3}{2}d = \frac{1}{4}$, па је

$$\frac{1}{16} + \frac{15}{4}d^2 = \frac{1}{10}.$$

Одавде лако закључујемо да је $d^2 = \frac{1}{100}$, односно да је $d = \pm\frac{1}{10}$. За дате вредности d можемо наћи одговарајуће вредности a_1, па уочавамо два низа:

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \ldots \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \ldots.$$

□

7. Бројеви $\log_2(3^x-1)$, $\log_4(9+9^x-7\cdot 3^x)$ и $\log_2(3-3^x)$ су узастопни чланови аритметичког низа. Одредити x.

Решење: Уочимо да је

$$\log_2(3^x-1)+\log_2(3-3^x)=2\cdot\log_4(9+9^x-7\cdot 3^x),$$

односно

$$\log_2(3^x-1)(3-3^x)=\log_2(9-7\cdot 3^x+9^x).$$

Притом, мора бити $3^x-1>0$ и $3-3^x>0$, те је $x\in(0,1)$.

Уведимо смену $3^x=t$. Имамо да је

$$(t-1)(3-t)=9-7t+t^2,$$

$t\in(1,3)$. Сређивањем тог израза долазимо до квадратне једначине

$$2t^2-11t+12=0,$$

а та једначина се може написати на следећи начин:

$$(2t-3)(t-4)=0.$$

Решење $t=4$ не задовољава наше услове да је $t\in(1,3)$, те као једино решење узимамо $t=\frac{3}{2}$. Одатле имамо да је $3^x=\frac{3}{2}$, то јест да је $x=1-\log_3 2$. ☐

8. Унутрашњи углови многоугла образују аритметички низ чија је разлика 10°, а најмањи члан 100°. Одредити број страница тог многоугла.

Решење: Имамо да је $a_1=100^\circ$, $d=10^\circ$, и да је $S_n=(n-2)\cdot 180^\circ$, па можемо закључити да је

$$\frac{n}{2}\cdot(200^\circ+(n-1)\cdot 10^\circ)=(n-2)\cdot 180^\circ.$$

Сређивањем тог израза долазимо до квадратне једначине

$$n^2-17n+72=0,$$

чије је решење $n=8$. Решење $n=9$ отписујемо, јер би тада било $a_9=180^\circ$. ☐

9. Одредити углове правоуглог троугла ако је познато да синуси углова образују аритметички низ.

Решење: Углови троугла су α, β и 90°, односно $\alpha, 90^\circ-\alpha$ и 90°. Њихови синуси $\sin\alpha$, $\sin(90^\circ-\alpha)$ и $\sin 90^\circ$ чине аритметички низ, , а та три елемента низа можемо записати и као $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и 1.

Одатле налазимо да је $2\cos\alpha=1+\sin\alpha$, па имамо да је

$$2\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

односно

$$2\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Даље имамо да је

$$3\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2},$$

то јест, да је

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}.$$

Како је

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4},$$

имамо да је $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\approx 53^\circ\,8'$. ☐

10. Један угао троугла је 120°, а странице троугла образују аритметички низ са разликом 4. Одредити странице троугла и његову површину.

Решење: На основу косинусне теореме, имамо да је

$$(a+4)^2 = (a-4)^2 + a^2 - 2(a-4)a\cos 120^\circ,$$

а како је $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, имамо да је

$$(a+4)^2 - (a-4)^2 = a^2 + (a-4)a.$$

Даљим сређивањем тог израза, налазимо да је $a = 10$, те су странице троугла 6, 10 и 14. Стога је површина троугла једнака $15\sqrt{3}$. □

11. Странице троугла и полупречник круга уписаног у тај троугао чине четири узастопна члана аритметичког низа. Ако је полупречник уписаног круга једнак 4, одредити површину троугла.

Решење: Четири члана низа, r, a, b и c, можемо записати и као 4, $4+d$, $4+2d$ и $4+3d$. Имамо да је $s = 6+3d$. Познато је да је површина троугла

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

као и да је $P = rs$. Можемо формирати једначину

$$\sqrt{(6+3d)\cdot(2+2d)\cdot(2+d)\cdot 2} = (6+3d)\cdot 4.$$

Сређивањем тог израза налазимо да је $d = 11$. Јасно је да је $a = 15$, $b = 26$ и $c = 37$. Стога је површина троугла $P = 39 \cdot 4 = 156$. □

Геометријски низ:

1. Одредити први члан геометријског низа и број његових чланова, ако је познато да је последњи члан једнак 112, збир 217, а количник 2.

Решење: Формула за збир првих n чланова геометријског низа је

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$$

те имамо да је

$$217 = a_1 \cdot \frac{1-2^n}{1-2}.$$

Формула за n-ти члан геометријског низа је

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

па налазимо да је

$$112 = a_1 \cdot 2^{n-1}.$$

Како је

$$217 = a_1 \cdot (2^n - 1) \qquad \text{и} \qquad a_1 \cdot 2^n = 224,$$

лако закључујемо да је $217 = 224 - a_1$, те да је $a_1 = 7$. Заменом у формулу $2^n = 32$, налазимо и да је $n = 5$. □

2. Одредити геометријски низ из система

$$a_1 + a_5 = 1285,$$
$$a_2 a_4 = 6400.$$

Решење: Имамо да је

$$a_1(1+q^4) = 1285,$$
$$a_1^2 q^4 = 6400.$$

Посматрајмо другу једначину. Постоје две могућности; да је $a_1 q^2 = 80$, или да је $a_1 q^2 = -80$. Другу могућност отписујемо! Објаснимо зашто; како је q^2 ненегативан, штавише позитиван број, неопходно би било да број a_1 буде негативан. Но тада би и број a_5 нужно био негатива, те прва једначина система не би никако могла да буде задовољена.

Систем сада постаје

$$a_1(1+q^4) = 1285,$$
$$a_1 q^2 = 80.$$

Поделимо прву и другу једначину. Имамо да је

$$\frac{1+q^4}{q^2} = \frac{257}{16},$$

одакле можемо формирати биквадратну једначину

$$16q^4 - 257q^2 + 16 = 0.$$

Није тешко уочити да је

$$16q^4 - 256q^2 - q^2 + 16 = 0,$$

па груписањем одговарајућих чинилаца, налазимо да је

$$(16q^2 - 1)(q^2 - 16) = 0,$$

одакле налазимо четири решења дате једначине. То су $q = \pm\frac{1}{4}$ и $q = \pm 4$.

Стога и имамо четири могућа низа, и то су следећи низови:

1280, 320, 80, 20, 5, ...	1280, -320, 80, -20, 5, ...
5, 20, 80, 320, 1280, ...	5, -20, 80, -320, 1280, ...

□

3. Збир реалних бројева, који чине прва три члана неког геометријског низа је 7, а збир њихових квадрата је 21. Одредити те бројеве.

Решење: Имамо да је

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 7,$$
$$a_1^2 + a_1^2q^2 + a_1^2q^4 = 21,$$

односно да је

$$a_1(1 + q + q^2) = 7,$$
$$a_1^2(1 + q^2 + q^4) = 21.$$

Поделимо другу и прву једначину. Имамо да је

$$\frac{a_1(1 + q^2 + q^4)}{1 + q + q^2} = \frac{21}{7} = 3.$$

Посматрајмо израз $1 + q^2 + q^4$. Додавањем и одузимањем члана q^2, налазимо да је тај израз једнак изразу $(q^2 + 1)^2 - q^2$, то јест производу $(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1)$.

Заменом у наш количник, налазимо да је

$$a_1(1 - q + q^2) = 3.$$

Формирајмо сада систем

$$a_1(q^2 - q + 1) = 3,$$
$$a_1(q^2 + q + 1) = 7.$$

Поново поделимо једначине система. Имамо да је

$$\frac{q^2 - q + 1}{q^2 + q + 1} = \frac{3}{7},$$

што се сређивањем своди на квадратну једначину

$$2q^2 - 5q + 2 = 0,$$

чија су решења $q = 2$ и $q = \frac{1}{2}$.

Ако је $q = 2$, онда је $a_1 = 1$, па су тражени бројеви 1, 2 и 4. Ако је $q = \frac{1}{2}$, онда је $a_1 = 4$, па су тражени бројеви поново исти: 4, 2 и 1. ☐

4. Средњи члан геометријског низа једнак је 12. Збир првог и последњег члана је 51, а збир свих чланова низа 93. Одредити број чланова овог низа.

Решење: Ако постоји средњи члан низа, тај низ мора имати непаран број чланова, и облика је

$$\underbrace{a_1,\, a_1q,\, \ldots,\, a_1q^{n-1}}_{n},\quad a_1q^n,\quad \underbrace{a_1q^{n+1},\, a_1q^{n+2},\, \ldots,\, a_1q^{2n}}_{n}.$$

Према условима задатка, имамо да је

$$a_1 \cdot (1 + q^{2n}) = 51, \qquad a_1 \cdot q^n = 12 \qquad \text{и} \qquad 93 = a_1 \cdot \frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1}.$$

Из друге једначине можемо изразити q^n, као $q^n = \frac{12}{a_1}$. Заменом у прву једначину, имамо да је

$$a_1 \cdot \left(1 + \frac{144}{a_1^2}\right) = 51,$$

то јест,

$$a_1 + \frac{144}{a_1} = 51.$$

Дата једначина се своди на квадратну једначину

$$a_1^2 - 51a_1 + 144 = 0,$$

чија су решења $a_1 = 3$ и $a_1 = 48$.

Ако је $a_1 = 3$, онда је $q^n = 4$, па заменом у трећу једначину, имамо да је

$$93 = 3 \cdot \frac{16q - 1}{q - 1},$$

те да је

$$31(q - 1) = 16q - 1.$$

Очигледно је $15q = 30$, то јест, $q = 2$. Како је $2^n = 4$, имамо да је $n = 2$, па је број чланова низа једнак $2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Разматрањем случаја $a_1 = 48$, дошли бисмо до истог закључка. $\square$

5. Одредити геометријски низ ако је $b_4 - b_3 = 60$ и $b_5 + b_6 = 80$.

Решење: Дељењем две дате једначине, налазимо да је

$$\frac{bq^2(q - 1)}{bq^4(1 + q)} = \frac{3}{4},$$

одакле налазимо да је

$$4q - 4 = 3q^2 + 3q^3.$$

Полином $3q^3 + 3q^2 - 4q + 4 = 0$ може се факторисати као

$$(q + 2)(3q^2 - 3q + 2) = 0,$$

одакле налазимо да је $q = -2$. Одатле следи да је $b = -5$, а тражени геометријски низ је -5, 10, -20, 40, -80, 160... $\square$

6. Основне ивице и висина усправне пирамиде, чија је основа правоугаоник, су три узастопна члана геометријског низа. Запремина пирамиде је $576\,\mathrm{cm}^3$, а површина дијагоналног пресека је $120\,\mathrm{cm}^2$. Одредити површину пирамиде.

Решење: Према условима задатка, основне ивице пирамиде су a и aq, а висина пирамиде је aq^2. Даље, имамо да је

$$P_{DP} = \frac{dH}{2} = 120,$$

као и да је

$$V = \frac{1}{3}BH = 576.$$

Посматрајмо прву једначину. Како је $d^2 = a^2 + (aq)^2$, имамо да је

$$\frac{\sqrt{a^2 + a^2q^2} \cdot aq^2}{2} = 120,$$

то јест, да је

$$a^2q^2\sqrt{1 + q^2} = 240.$$

Из друге једначине имамо да је

$$\frac{1}{3} \cdot a \cdot aq \cdot aq^2 = 576,$$

односно да је

$$(aq)^3 = 1728,$$

одакле налазимо да је $aq = 12$. Заменимо то у прву једначину. Следи да је

$$144 \cdot \sqrt{1 + q^2} = 240,$$

одакле се лако проналази да је $q = \frac{4}{3}$. Јасно, следи да је $a = 9$.

Преостаје да израчунамо висине бочних страна. Како је

$$h_1^2 = H^2 + \left(\frac{aq}{2}\right)^2 \qquad \text{и} \qquad h_2^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

налазимо да је $h_1 = 2\sqrt{73}$ и $h_2 = \frac{1}{2}\sqrt{1105}$.

Лако се налази да је

$$P = ab + 2 \cdot \frac{ah_1}{2} + 2 \cdot \frac{bh_2}{2} = 6\left(18 + \sqrt{73} + 2\sqrt{1105}\right).$$

$\square$

7. У посуду која садржи 10 l чистог алкохола, улије се 1 l воде, а затим се из посуде излије 1 l мешавине. Исти поступак се понови још четири пута (укупно пет пута). Одредити количину алкохола која је преостала у посуди.

Решење: После првог корака, у посуди се налази

$$10\,\mathrm{l} - \frac{1}{11}\cdot 10\,\mathrm{l} = \frac{10^2}{11}\,\mathrm{l}$$

алкохола. После другог корака, у посуди преостаје

$$\frac{10^2}{11}\,\mathrm{l} - \frac{1}{11}\cdot\frac{10^2}{11}\,\mathrm{l} = \frac{10^3}{11^2}\,\mathrm{l}$$

алкохола. Јасно, после петог корака, у посуди остаје $\frac{10^6}{11^5}$ l алкохола. □

8. Одредити x-ти члан геометријског низа чија су прва три члана $11 - x^{\log x}$, $x^{\log x} - 5$ и $35 - x^{\log x}$.

Решење: Познато је да је $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, те следи да је

$$\left(x^{\log x} - 5\right)^2 = \left(11 - x^{\log x}\right)\cdot\left(35 - x^{\log x}\right).$$

Уведимо смену $x^{\log x} = t$. Једначина се своди на облик

$$36t = 360,$$

па имамо да је $x^{\log x} = 10$. Логаритмујмо обе стране те једнакости. Имамо да је

$$\log\left(x\right)^{\log x} = \log 10,$$

то јест, да је

$$\log^2 x = 1.$$

Како x не може бити $-\frac{1}{10}$, једино решење је $x = 10$. Прва три члана низа су 1, 5 и 25, а x-ти члан низа је $a_{10} = 5^9$. □

9. Странице троугла образују геометријски низ.

   а) Доказати да количник q тог низа задовољава услов

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

   б) Одредити количник q тако да троугао буде правоугли.

Решење: а) На основу Питагорине теореме, следи да је

$$a^2 + a^2q^2 = a^2q^4,$$

одакле се може закључити да је

$$q^4 - q^2 - 1 = 0.$$

Свођењем те једначине на канонски облик, уочавамо да је

$$q^2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0,$$

одакле следи да је

$$q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

б) Узмимо да је $q > 1$, па мора бити

$$aq^2 > aq > a.$$

Користимо услов

$$|a - b| < c < a + b.$$

Како је $c < a + b$, имамо да је

$$aq^2 < aq < a,$$

те је

$$q^2 - q - 1 < 0.$$

Одатле налазимо да је $q \in \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Имамо да је $b < a + c$, те да је

$$aq < a + aq^2,$$

одакле налазимо да је $q^2 - q + 1 > 0$, тј. да је $q \in \mathbb{R}$.

Из $a < b + c$, имамо да је

$$a < aq + aq^2,$$

те да је

$$q^2 + q - 1 > 0,$$

одакле, имајући услов у виду, налазимо да је $q \in (1, +\infty)$.

Узмимо да је $q < 1$. Имамо да је $c < a+b$, те је $q \in (0, 1)$. Ако је $a < b+c$, налазимо да је $q \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$.

Када је $q = 1$ троугао је једнакостранични, тако да је коначно решење

$$q \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

□

10. Ако углови α, β и γ троугла ABC чине геометријски низ са количником 2, доказати да важи

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Решење: Како је $q = 2$, углови α, β и γ су једнаки α, 2α и 4α. Збир углова у троуглу је $\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ$, те налазимо да је

$$\alpha = \frac{\pi}{7}.$$

На основу синусне теореме, која гласи

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

можемо закључити да је

$$b = 2R\sin\beta \qquad \text{и} \qquad c = 2R\sin\gamma,$$

а одатле и да је

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2R\sin\beta} \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{c} = \frac{1}{2R\sin\gamma}.$$

Имамо да је

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2R\sin\beta} + \frac{1}{2R\sin\gamma} = \frac{1}{2R} \cdot \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}.$$

Потребно је имати у виду израз за збир синуса

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Сада имамо

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2R} \cdot \frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \sin 4\alpha},$$

па је

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}},$$

и коначно,

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{a}.$$

□

Мешовити задаци:

1. Збир прва три члана геометријског низа је 91. Ако тим члановима додамо 25, 27 и 1, редом, формира се аритметички низ. Одредити седми члан датог геометријског низа.

Решење: Ако први члан геометријског низа означимо са a, имамо да је

$$a + aq + aq^2 = 91.$$

Посматрајмо сада аритметички низ. Имамо да је

$$2(aq + 27) = a + 25 + aq^2 + 1.$$

Сређивањем тога израза налазимо да је

$$a(q^2 - 1)^2 = 28.$$

Имамо да је

$$\frac{a(1 + q + q^2)}{a(q - 1)^2} = \frac{91}{28},$$

то јест, да је

$$\frac{q^2 + q + 1}{(q - 1)^2} = \frac{13}{4},$$

одакле налазимо да је

$$3q^2 - 10q + 3 = 0.$$

Решења те квадратне једначине су $q = 3$ и $q = \frac{1}{3}$, а одговарајући први чланови геометријског низа су $a = 7$ и $a = 63$. Дакле, имамо два могућа седма члана, и то су

$$a_7 = 7 \cdot 3^6 \qquad \text{и} \qquad a_7 = \frac{7}{81}.$$

□

2. Дата су четири броја. Прва три одређују геометријски низ , а задња три аритметички низ . Збир крајњих бројева је 32, а збир унутрашња два је 24. Одредити те бројеве.

Решење: Оначимо те бројеве са a, b, c и d. Прва три броја одређују геометријски низ, па важи

$$b^2 = ac,$$

а последња три аритметички низ, па имамо да је

$$2c = b + d.$$

Поред тога је познато да је $a + d = 32$ и $b + c = 24$.

Имамо да је $d = 32 - a$ и $c = 24 - b$. Заменом у другу једначину, имамо да је

$$2c = b + 32 - a,$$

па можемо закључити да је

$$2 \cdot (24 - b) = b + 32 - a,$$

одакле можемо изразити и a преко b, као $a = 3b - 16$.

Заменом у прву једначину, формира се квадратна једначина

$$b^2 - 22b + 96 = 0,$$

чија су решења $b = 16$ и $b = 6$.

Одговарајуће четворке бројева (a, b, c, d) су $(32, 16, 8, 0)$ и $(2, 6, 18, 30)$. □

3. Бројеви a_1, a_2 и a_3 су три узастопна члана геометријског низа са количником $q = 2$, а a_2, a_3 и a_4 су три узастопна члана аритметичког низа са разликом $d = 6$. Одредити збир $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Решење: Означимо први члан геометријског низа са a. Геометријски низ сада постаје a, $2a$ и $4a$, а аритметички низ је $2a$, $2a + 6$ и $2a + 12$.

Имамо да је

$$4a = 2a + 6,$$

одакле налазимо да је $a = 3$. Тражени збир је $3 + 6 + 12 + 18 = 39$. ☐

4. Први, пети и једанаести члан аритметичког низа образују геометријски низ. Ако је први члан овог аритметичког низа једнак 24, одредити десети члан тог низа.

Решење: Означимо први члан аритметичког низа са a. Имамо да је $a = 24$, и да a, $a + 4d$ и $a + 10d$ чине геометријски низ.

На основу својства геометријског низа, имамо да је

$$(a + 4d)^2 = a(a + 10d),$$

па заменом $a = 24$ и сређивањем квадратне једначине, налазимо да је

$$d^2 - 3d = 0,$$

односно да је $d = 0$ или $d = 3$. Како $d = 0$ очигледо не задовољава услове задатка, прихаватамо само решење $d = 3$, и за то решеје, налазимо да је $a_{10} = 51$. ☐

5. Ако се првим члановима аритметичког низа дода 5, 6, 9 и 15, формира се геометријски низ. Одредити тај геометријски низ.

Решење: Означимо први члан аритметичког низа са a. Аритметички низ постаје a, $a+d$, $a+2d$ и $a+3d$, а геометријски низ је $a+5$, $a+d+6$, $a+2d+9$ и $a+3d+15$.

Посматрајмо систем једначина

$$(a + d + 6)^2 = (a + 5)(a + 2d + 9),$$
$$(a + 2d + 9)^2 = (a + d + 6)(a + 3d + 15).$$

Сређивањем једначина датог система, налазимо да се он своди на

$$d^2 + 2d - 2a - 9 = 0,$$
$$d^2 + 3d - 3a - 9 = 0.$$

Одузимањем датих једначина налазимо да је

$$a - d = 0,$$

то јест, да је $a = d$, те да је $d^2 = 9$.

Стога имамо две могућности: $(a, d) = (-3, -3)$ и $(a, d) = (3, 3)$. Одатле се веома лако уочавају тражени аритметички и геометријски низови. ☐

6. Одредити чланове аритметичког и геометријског низа ако је збир првих чланова 23, других 21, трећих 22 и четвртих 29.

Решење: Означимо први члан аритметичког низа са a, а први члан геометријског низа са b. Имамо четири једначине:

$$a + b = 23,$$
$$a + d + bq = 21,$$
$$a + 2d + bq^2 = 22,$$
$$a + 3d + bq^2 = 29.$$

Помножимо прву једначину бројем -1, и додајмо је осталим једначинама. Потом можемо помножити другу једначину са -2, односно -3, и додати је трећој, односно четвртој једначини. На тај начин смо дошли до тога да у трећој и четвртој једначини фигуришу само b и q.

Даљим сређивањем налазимо да је $q = 2$ и $b = 3$, те се лако закључује и да је $a = 20$ и $d = -5$.

Тражени чланови су 20, 15, 10 и 5, односно 3, 6, 12 и 24. □

7. Четири броја чине аритметички низ. Прва два и четврти чине геометријски низ. Одредити те бројеве ако је познато да је разлика аритметичког низа једнака количнику геометријског низа.

   Решење: У питању су бројеви 2, 4, 6 и 8. □

8. Четири броја чине геометријски низ. Њихови логаритми, узети за основу 3, чине аритметички низ чија је разлика 1, а збир 18. Одредити та четири броја.

   Решење: $a = 27$, $q = 3$. □

Бесконачни геометријски ред:

1. Одредити збир бесконачног геометријског реда
$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots.$$

2. Одредити граничну вредност израза:
   а) $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5}}}}\dots$; б) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\dots$.

3. Претворити периодичне разломке у обичне:
   а) 0,555...; б) 2,717171...; в) 0,3(8);
   г) 1,41(26); д) 0,17(21); ђ) 0,(142857).

4. Дат је бесконачан низ квадрата тако да је страница сваког претходног квадрата једнака дијагонали идућег. Страница највећег квадрата једнака је a.
   а) Одредити збир обима и површина свих квадрата;
   б) Одредити који квадрат по реду има површину $1\,\mathrm{cm}^2$ ако је $a = 1{,}6\,\mathrm{dm}$.

5. У коцку ивице a уписана је лопта, у лопту коцка, па у мању коцку нова лопта, и тако даље. Одредити збир запремина свих коцки и свих лопти.

6. У једнакокраком троуглу основице $2a$ и угла при врху 2α уписани су кругови, који су постављени један изнад другог, тако да први додирује основицу троугла и краке, а сваки следећи додирује претходни круг и краке троугла. Одредити збир обима и површина свих кругова.

7. Дат је бесконачан ред
$$\log_{\frac{1}{8}} x + \log^2_{\frac{1}{8}} x + \log^3_{\frac{1}{8}} x + \dots.$$
   Одредити интервал у коме се мора налазити x да би ред био конвергентан, а затим одредити x тако да збир реда буде $\frac{1}{2}$.

8. Решити неједначину
   а) $\dfrac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots < \dfrac{7}{2}$;
   б) $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots < \dfrac{13}{6}$.

   Решење: а) За $|x| < 1$ имамо да је
$$x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-x}.$$
   Дакле, имамо да је
$$\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} < \frac{7}{2},$$

што после сређивања постаје

$$\frac{(3x-1)(3x-2)}{2x(x-1)} > 0.$$

Лако се уочава да је $x \in (-1,0) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. □

9. У дати квадрат уписан је једнакостраничан троугао тако да му једно теме лежи у темену квадрата, а остала два на страницама квадрата. У тај троугао уписан је квадрат тако да му једна страница лежи на страници троугла, итд. Одредити збир површина свих квадрата.

Решење: Имамо да је

$$b^2 = a^2 + x^2,$$

те да је

$$b^2 = (a-x)^2 + (a-x)^2.$$

Одатле следи да је

$$a^2 + x^2 = 2a^2 - 4ax + 2x^2,$$

што се своди на квадратну једначину

$$x^2 - 4ax + a^2 = 0,$$

чија су решења $x = 2a - a\sqrt{3}$, које прихватамо, и $x = 2a + a\sqrt{3}$, које отписујемо. Сада имамо да је

$$b^2 = a^2 + a^2(2-\sqrt{3})^2,$$

одакле налазимо да је

$$b = a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1).$$

скок □

Домаћи задатак:

1. Дат је аритметички низ у коме важи

$$a_2 + a_4 + a_6 = 3 \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} = \frac{3}{4}.$$

   Одредити тај низ.

2. Ако бројеви $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ чине аритметички низ, то и $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$ такође чине аритметички низ. Доказати.

3. Аритметички низови

$$17, 21, 25, 29, \dots \qquad \text{и} \qquad 16, 21, 26, 31, \dots$$

   имају неке заједничке чланове. Одредити збир првих 100 таквих чланова.

4. Дат је низ $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_4 = 11$, $a_5 = 18$, $\dots$, такав да разлике његових узастопних чланова образују аритметички низ. Одредити a_{500}.

5. Странице троугла чине аритметички низ са разликом $d = 1$. Ако је површина троугла 84, одредити полупречнике уписане и описане кружнице.

Решење: Имамо да су странице троугла a, $a+1$ и $a+2$. Полуобим троугла је $s = \frac{3}{2}(a+1)$.

На основу Хероновог обрасца, налазимо да је

$$84 = \sqrt{\frac{3}{2}(a+1) \cdot \left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\right)}.$$

Квадрирањем и сређивањем тог израза, налазимо да је

$$84 \cdot 28 \cdot 16 = (a^2 + 2a + 1)(a^2 + 2a - 3).$$

Уведимо смену $a^2 + 2a = t$. Налазимо да је

$$t^2 - 2t - 3 \cdot 84 \cdot 28 \cdot 16 = 0.$$

Решења те једначине су $t = 195$ и $t = -193$, но решење $t = -193$ отписујемо.

Имамо да је $a^2 + 2a - 195 = 0$, те је $a = 13$. Странице троугла су 13, 14 и 15.

Знамо да је

$$r = \frac{P}{s} \qquad \text{и} \qquad R = \frac{abc}{4P},$$

те је $r = 4$ и $R = \frac{65}{8}$. □

6. Сума свих природних бројева од 1 до n (укључујући n) једнака је троцифреном броју једнаких цифара. Одредити n.

Решење: Имамо да је $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \overline{xxx}$, то јест, да је

$$\frac{n(n+1)}{2} = 111x,$$

односно

$$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot x.$$

Имамо да је $n + 1 = 37$ и да је $n = 6x$, одакле закључујемо да је $x = 6$. □

7. Израчунати суму $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{98}$ ако је низ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ аритметички низ са диференцијом 1 и ако је $S_{98} = 137$.

Решење: Имамо да је

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{98} = 137,$$

а то можемо записати и на следећи начин:

$$a_2 - 1 + a_2 + a_4 - 1 + a_4 + \cdots + a_{98} - 1 + a_{98} = 137.$$

Имамо да је

$$(a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + \cdots + a_{98} + a_{98}) - 49 = 137,$$

одакле налазимо да је

$$a_2 + a_4 + \ldots a_{98} = \frac{1}{2} \cdot 186 = 93.$$

□

Додатак:

1. Одредити збир:

   а) $S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\ldots 99}_{n}$;

   б) $S_n = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\ldots 77}_{n}$;

2. Одредити збир:

   а) $S_n = 1 + 3q + 5q^2 + \cdots + (2n+1)q^n$;

   б) $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$;

   в) $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n}$;

   г) $S_n = 1 + 2^2 q + \cdots + (n+1)^2 q^n$, $q \neq 1$;

   д) $S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n}$;

3. Нека су a, b и c узастопни чланови аритметичког низа, b, c и d узастопни чланови геометријског низа, и c, d и e три узастопна члана хармонијског низа. Доказати да су тада a, c и e узастопни чланови геометријског низа.

4. Нека је $\overline{aaa\ldots a}$ број чије су све цифре a, $a \neq 0$. Одредити збир n бројева:
$$S = \overline{a} + \overline{aa} + \overline{aaa} + \cdots + \overline{aaa\ldots aa}.$$

5. За које вредности параметра a бројеви $5^{1+x} + 5^{1-x}$, $\frac{a}{2}$, $25^x + 25^{-x}$ могу бити три узастопна члана аритметичког низа?

Решење: На основу особина аритметичког низа, имамо да је
$$\frac{5^{1+x} + 5^{1-x} + 25^x + 25^{-x}}{2} = \frac{a}{2},$$
то јест, да је
$$5^{1+x} + 5^{1-x} + 25^x + 25^{-x} = a.$$
Посматрајмо функцију
$$f(x) = 5 \cdot \left(5^x + \frac{1}{5^x}\right) + 25^x + \frac{1}{25^x}.$$
Имамо да је
$$5^x + \frac{1}{5^x} \geq 2\sqrt{5^x \cdot \frac{1}{5^x}} = 2,$$
и да је
$$25^x + \frac{1}{25^x} \geq 2.$$
Стога је
$$f(x) \geq 5 \cdot 2 + 2 = 12,$$
те закључујемо да функција $f(x)$ има минимум 12. □

6. Сума прва четири члана геометријског низа је 30, а збир њихових квадрата је 340. Одредити тај низ.

7. Три реална броја различита од нуле образују аритметички низ, а квадрати тих бројева, у истом поретку, образују геометријски низ. Одредити количник геометријског низа.

8. Ако a, b, c и d образују аритметички низ, тада решења једначине
$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-d}=0$$
такође образују арит. низ. Доказати.

Решење: Имамо да је
$$\frac{2x-(a+d)}{(x-a)(x-d)}+\frac{2x-(b+c)}{(x-b)(x-c)}=0.$$
Како на основу својстава аритметичких низова важи да је $a+d=b+c$, имамо да је
$$(2x-(a+d))\cdot\left(\frac{1}{(x-a)(x-d)}+\frac{1}{(x-b)(x-c)}\right)=0.$$
Одмах можемо уочити решење
$$x_1=\frac{a+d}{2},$$
док преостала два решења налазимо решавајући квадратну једначину
$$2x^2-(a+b+c+d)x+ad+bc=0.$$
Налазимо да је
$$x_2+x_3=\frac{a+d\pm\sqrt{a^2+d^2-2bc}}{2}=a+d.$$
Како је $x_2+x_3=2x_1$, закључујемо да бројеви x_2, x_1 и x_3 образују аритметички низ. □

9. Ако котангенси углова у троуглу чине аритметички низ, доказати да и квадрати страница чине аритметички низ.

Решење: Имамо да је
$$\sin\alpha=\frac{a}{2R}\qquad \text{и} \qquad \cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$
Како котангенси углова чине аритметички низ, имамо да је
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{R}{abc}\cdot(b^2+c^2-a^2),\quad \operatorname{ctg}\beta=\frac{R}{abc}\cdot(a^2+c^2-b^2)\quad \text{и}\quad \operatorname{ctg}\gamma=\frac{R}{abc}(a^2+b^2-c^2).$$
На основу особина аритметичког низа, имамо да је
$$2\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma,$$
то јест, да је
$$2(a^2+c^2-b^2)=b^2+c^2-a^2+a^2+b^2-c^2.$$
Одатле закључујемо да је
$$2(a^2+c^2)=4b^2,$$
односно, да је
$$2b^2=a^2+c^2,$$
чиме је тврђење доказано. □

10. Одредити два различита природна броја чије су аритметичка и геометријска средина двоцифрени бројеви, при чему ови бројеви имају исте цифре али написане обрнутим редом.

11. Могу ли $\sqrt{5}$ и 5 бити чланови аритметичког низа, чији је први члан једнак 2?

12. Дат је аритметички низ у коме су сви чланови природни бројеви. Ако је у том низу један члан квадрат природног броја, доказати да низ садржи бесконачно много чланова који су квадрати природних бројева.

13. Свака од тројки бројева

$$(\log a, \log b, \log c) \qquad \text{и} \qquad (\log a - \log 2b, \log 2b - \log 3c, \log 3c - \log a)$$

образује аритметички низ. Да ли бројеви a, b, c могу бити дужине страница троугла? Ако могу, какав је то троугао? Израчунати углове овог троугла.

14. Нека су S_n и Σ_n суме првих n чланова аритметичких низова (A_n) и (a_n). Ако је $\dfrac{\Sigma_n}{S_n} = \dfrac{7n+1}{4n+27}$ израчунати $\dfrac{a_{11}}{A_{11}}$.

15. Израчунати збирове:

а) $S_n = 1 + 3q + 5q^2 + \cdots + (2n+1)q^n$;

б) $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$;

в) $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n}$;

г) $S_n = 1 + 2^2 q + \cdots + (n+1)^2 q^n$, $q \neq 1$;

д) $S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \cdots + \dfrac{n}{3^n}$.

16. Доказати да не постоји квадрат чија се темена налазе на четири концентричне кружнице чији полупречници образују: (а) геометријски низ; (б) аритметички низ.

17. Функција f задовољава услове:

1° $f(0) = 1$;

2° $1 + f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Одредити збир

$$S = f(0)^2 + f(1)^2 + \cdots + f(n)^2.$$

Решење: Имамо да је

$$1 + f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-2) = f(n-1),$$
$$1 + f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-2) + f(n-1) = f(n).$$

Одузмимо прву једначину од друге. Налазимо да је

$$f(n-1) = f(n) - f(n-1),$$

то јест да је

$$f(n) = 2f(n-1).$$

Математичком индукцијом можемо показати да је $f(n) = 2^n$. Стога имамо да је

$$S = 1^2 + 2^2 + (2^2)^2 + \cdots + (2^n)^2 = 1 + 4 + 16 + \cdots + 4^n,$$

то јест, да је

$$S = \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

$\square$

18. Природни бројеви су разврстани на следећи начин:

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
итд.	...	...	...	...	...	...	...	...

а) Доказати да је збир бројева у n-тој врсти једнак $n^3 + (n-1)^3$;

б) Одредити збир n бројева у колони која се налази у средини

$$1 + 3 + 7 + 13 + \ldots.$$

Решење: а) У првој врсти имамо један број; у другој имамо три броја; у $k-1$-вој врсти $2k-3$ броја; у k-тој врсти имамо $2k-1$ бројева.

У првих $k-1$ врста имамо $1 + 3 + \cdots + 2k - 3$ бројева, то јест

$$\frac{k-1}{2} \cdot (2k - 3 + 1) = (k-1)^2$$

бројева. Стога k-та врста почиње бројем $(k-1)^2 + 1$, а завршава се бројем k^2.

Збир бројева у n-тој врсти једнак је

$$S_n = \frac{2n-1}{2} \cdot \big((n-1)^2 + 1 + n^2\big) = 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^3 + (n-1)^3.$$

б) У средини k-те врсте налази се број a_k који је једнак аритметичкој средини почетног и крајњег броја у тој врсти, то јест,

$$a_k = \frac{1}{2} \cdot \big((k-1)^2 + 1 + k^2\big) = k^2 - k + 1.$$

Имамо да је

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1,$$

те да је

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n^2+2)}{3}.$$

$\square$

19. Дата је таблица

$$\begin{array}{lllllllll}
1 \\
2 & 3 & 4 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Одредити збир бројева у n-тој врсти дате таблице.

Решење: Елементи n-те врсте су n, $n+1$, $n+2$, $\dots$, $3n-2$ и она има $2n-1$ чланова. Та врста представља аритметички низ са првим чланом $a_1 = n$, разликом $d = 1$ и последњим елементом $a_{2n-1} = 3n - 2$.

Стога је збир елемената у n-тој врсти једнак

$$S_{2n-1} = \frac{2n-1}{2} \cdot (a_1 + a_{2n-1}) = \frac{2n-1}{2} \cdot (n + 3n - 2) = (2n-1)^2.$$

$\square$

20. Дат је низ рационалних бројева

$$\frac{1}{2}, \frac{19}{20}, \frac{199}{200}, \frac{1999}{2000}, \frac{19999}{20000}, \dots.$$

Познато је да је збир првих 1000 чланова датог низа децималан број. Одредити збир цифара тог броја.

Решење: Први члан тог низа је

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{5}{10}.$$

Други члан низа је

$$\frac{19}{20} = 1 - \frac{1}{20} = 1 - \frac{5}{10^2}.$$

Трећи члан низа је број

$$\frac{199}{200} = 1 - \frac{1}{200} = 1 - \frac{5}{10^3}.$$

На тај начин можемо закључити да је k-ти члан датог низа

$$a_k = 1 - \frac{5}{10^k}.$$

Збир првих 1000 чланова низа је

$$S_{1000} = 1000 - 5 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{1000}} \right) = 1000 - \frac{5}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^{1000}}}{1 - \frac{1}{10}},$$

те имамо да је

$$S_{1000} = 1000 - \frac{5}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^{1000}} \right) = 1000 - \frac{5}{9} \cdot 0,\underbrace{999\dots9}_{1000} = 1000 - 0,\underbrace{555\dots5}_{1000}.$$

Одатле налазимо да је

$$S_{1000} = 999,\underbrace{444\dots4}_{999}5.$$

Збир цифара броја S_{1000} износи

$$3 \cdot 9 + 999 \cdot 4 + 5 = 4028.$$

$\square$

21. Дат је низ (x_n) такав да за свако $m, n \in \mathbb{N}$ важи неједнакост

$$|x_{m+n} - x_m - x_n| < \frac{1}{m+n}.$$

Доказати да је (x_n) аритметички низ.

Решење: Нека су k и n произвољни природни бројеви. Имамо да је

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - x_n - (x_{k+1} - x_k)| &= |(x_{n+k+1} - x_n - x_{k+1}) - (x_{n+k+1} - x_{n+1} - x_k)| \leq \\ &\leq |x_{n+k+1} - x_n - x_{k+1}| + |x_{n+k+1} - x_{n+1} - x_k| \leq \\ &\leq \frac{1}{n+k+1} + \frac{1}{n+k+1} < \frac{2}{n}.\end{aligned}$$

Ако фиксирамо k и пустимо да $n \to +\infty$, налазимо да низ $(x_{n+1} - x_n)$ има граничну вредност $x_{k+1} - x_k$. Међутим, како се k може бирати произвољно, закључујемо да $x_{k+1} - x_k$ не зависи од k. Стога је

$$x_2 - x_1 = x_{n+1} - x_n = \text{const}.$$

Следи да је (x_n) аритметички низ. □

1 Примена низова у економији:

1. Предузеће Апекс комерц би требало да, на име позајмице уз годишњу каматну стопу од 8%, врати банци 350 000 у року од пет година. Одредити колико ће новца предузеће дати банци, ако жели да исплати дуг по истеку треће године.

2. Колико би новца требало орочити под камату од 6% на годишњем нивоу, да би се након десет година добила свота од 200 000 рсд?

   Решење: Износ главнице након десет година је

   $$C_{10} = C_0 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10} = 200\,000.$$

   Одавде је

   $$C_0 = \frac{200\,000}{1{,}06^{10}} = \frac{200\,000}{1{,}7908} = 111\,679,$$

   што одговара траженом износу новца. □

3. Колико је година потребно да се удвостручи главница орочена на 5% на годишњем нивоу.

   Решење: Имамо да је

   $$2C_0 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{n},$$

   те је

   $$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14{,}206.$$

   □

4. Одредити годишњу камату потребну да главница од 100 000 рсд. након пет година порасте на 150 000 рсд.

   Решење: Имамо да је

   $$1{,}5 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{5},$$

   те налазимо да је

   $$1 + \frac{p}{100} = 1{,}5^{0{,}2}.$$

   Уз помоћ дигитрона, можемо наћи да је

   $$1 + \frac{p}{100} = 1{,}08447,$$

   те је $p = 8{,}447$. □

5. Петар уплаћује годишње осигурање у износу од 5000 динара на годишњем нивоу, уз камату од 8%. Одредити којом ће светом Петар располагати након двадесет година.

   Решење: Имамо да је

   $$S_{20} = S \cdot r \cdot \frac{r^{20} - 1}{r - 1} = 5000 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^{20} - 1}{1{,}08 - 1} = 247\,114.$$

   Приметимо да главница износи 100 000 рсд. а допринос износи 147,114 рсд. □

Литература:

- Збирка решених задатака из математике 3, Вене Богославов;
- Математика 4, уџбеник и збирка задатака за 4. разред природословне гимназије, Дакић, Елезовић;
- Референтне методе за решавање проблема из математике за средње школе, Ципкин, Пински;
- Матхематископ 4, Стојановић, Ћирић;
- Збирка задатака за 3. разред средњих школа са упутствима и решењима, Пешић, Јевремовић;
- Збирка решених тестова из математике, Тошић, Станковић;
- Збирка решених задатака и проблема из математике, Тошић, Јовановић;
- Математика 3, Ивановић, Огњановић.

Стручне школе

Аритметички низ:

1. Показати да је низ
$$1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$$
аритметички. Израчунати 27. члан и збир првих 50 чланова.

2. Показати да бројеви
$$\frac{4}{15}, \frac{23}{30}, \frac{19}{15}$$
чине аритметички низ.

3. Одредити збир свих природних бројева мањих од 1000 дељивих са 11.

4. Збир прва два члана аритметичког низа је 15, а збир њихових реципрочних вредности је $\frac{15}{44}$. Одредити први члан тог низа и његову разлику.

5. Збир прва три члана аритметичког низа је 12, а збир њихових квадрата је 66. Одредити тај низ.

6. Одредити збир свих двоцифрених бројева.

7. Пењући се на врх планине високе 5250 m, планинар првог дана пређе 900 m, а сваког следећег пређе висину која је за 50 m мања него претходног дана. Одредити за колико дана ће се планинар попети на врх планине.

8. Одредити број страница многоугла чији је обим 158 cm, а странице му чине аритметички низ чија је разлика 3 cm, при чему је дужина најдуже странице 44 cm.

9. Полазећи из станице, воз равномерно повећава своју брзину. Након 25 min, његова брзина износи 60 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Одредити убрзање воза у метрима по минути за миуту.

10. Одредити x из једначине
$$(x+1)+(x+4)+(x+7)+\cdots+(x+28)=155.$$

11. Доказати да је низ
$$(a+x)^2, \quad a^2+x^2, \quad (a-x)^2$$
аритметички, и одредити збир n његових чланова.

12. Одредити аритметички низ чији је збир увек једнак троструком квадрату броја његових чланова.

13. Бројеви $3, 5, 9, 15, \dots$ чине низ у коме разлике узастопних чланова низа формирају аритметички низ. Одредити општи члан тог низа.

14. Међу свим разломцима који се налазе између бројева m и n, и чији су бројиоци и имениоци узајамно прости, одредити збир оних чији је именилац једнак 3.

15. Одредити број x тако да квадрати бројева

$$1-x, \quad a-x \quad \text{и} \quad a^2-x$$

чине аритметички низ.

16. Одредити збир прва четири члана аритметичког низа $2+\sqrt{3}$, 4, $6-\sqrt{3}$.

17. Збир три узастопна члана аритметичког низа је 54. Ако је највећи од тих бројева два пута већи од најмањег, одредити њихов производ.

18. У аритметичком низу са различитим члановима, први, пети и једанаести члан образују геометријски низ. Ако је први члан низа 24, одредити десети члан аритметичког низа.

19. Решити једначину

$$(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\cdots+(x^2+20x+39)=4500.$$

20. Одредити збир првих седам чланова аритметичког низа:

    а) $\frac{5a}{2}$, a, $-\frac{a}{2}$; б) $\frac{b-a}{2}$, $-\frac{b}{2}$, $\frac{a-3b}{2}$.

21. Одредити број чланова аритметичког низа чији је први члан $\frac{1}{x+y}$, последњи члан $\frac{1}{x^2-y^2}$, а разлика $d=\frac{1-x+y}{5(x^2-y^2)}$.

22. Одредити аритметички низ, ако је познато:

    а) $a_5=11$, $a_7=15$; б) $a_6=8$, $a_3=1$;
    в) $a_{10}=7$, $a_4=4$; г) $S_{10}=230$, $a_8+a_{13}=86$;
    д) $a_{15}-a_8=-21$, $a_3+a_9=-26$;
    ђ) $S_{15}-S_4=119\frac{5}{8}$, $S_{26}-2S_{10}=223\frac{5}{8}$.

23. Одредити аритметички низ од 10 чланова, ако је збир другог и шестог члана једнак 2, а однос збира свих чланова и збира чланова између првог и последњег износи 5 : 4.

24. Одредити аритметички низ ако је збир квадрата другог и трећег члана једнак 74, а разлика квадрата петог и првог члана износи 112.

25. Збир четири броја који чине аритметички низ је 5, а збир њихових реципрочних вредности износи $\frac{25}{6}$. Одредити те бројеве.

26. Производ четвртог и једанаестог члана аритметичког низа је 18,5, а шести члан тог низа је 6. Одредити тај низ, као и збир првих 53 чланова аритметичког низа који настаје тако што се између свака два члана датог низа интерполира по девет нових чланова.

27. Цифре једног троцифреног броја образују аритметички низ. Збир његових цифара је 18, а производ збира прве две цифре и треће цифре износи 81. Одредити тај број.

28. Одредити вредности реалног параметра m тако да решења биквадратне једначине

$$x^4 - (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0$$

образују аритметички низ.

29. Унутрашњи углови једног многоугла образују аритметички низ чија је разлика 10°, а најмањи угао му је 100°. Одредити број страница тог многоугла.

30. Дат је троугао површине $84\,\mathrm{cm}^2$. Одредити дужине његових странице, ако је познато да оне чине аритметички низ са разликом $1\,\mathrm{cm}$.

31. Путник креће из места A, и током првог дана пређе $15\,\mathrm{km}$, а сваког следећег дана пређе по километар више. Након четири дана, исти путем за њиме пође курир, који током првог дана пређе $20\,\mathrm{km}$, а сваког идућег дана по $7{,}1\,\mathrm{km}$ више. Одредити где и када ће курир стићи путника.

32. Одредити x тако да низ

$$1+\sin x, \quad 2+2\sin x, \quad 4+4\sin x, \quad \ldots$$

буде аритметички.

33. Одредити број чланова низа које би требало сабрати да би збир био најмањи:

а) $-3,\ -1,\ 1,\ \ldots;$ б) $2p-1,\ 3p,\ 4p+1,\ \ldots.$

Геометријски низ:

1. У једнакокрако-правоугли троугао уписан је низ квадрата на следећи начин: страница првог квадрата једнака је половини крака, и две његове странице леже на крацима; страница другог квадрата једнака је половини странице првог квадрата, једна његова страница лежи на страници првог квадрата, а једна на одговарајућем краку троугла, итд.
   а) Одредити збир свих обима квадрата;
   б) Одредити збир површина свих квадрата.
2. Решити једначину
$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = 1.$$
3. Одредити геометријски низ чији је први члан 1, а збир трећег и петог члана је 90.
4. Одредити геометријски низ ако је познато да збир прва три његова члана износи 112, а збир следећа три члана је 14.
5. Одредити геометријски низ који има шест чланова, ако је познато да је збир чланова на непарним местима 455, а збир чланова на парним местима износи 1365.
6. Чланови геометријског низа су $A = a_{m+n}$ и $B = a_{m-n}$. Одредити чланове a_m и a_n.
7. Претворити у разломак број 1,4666....
8. Одредити вредност израза
$$\frac{0{,}333\ldots - 0{,}75 : 4}{1{,}4999\ldots - 0{,}999\ldots}.$$
9. Дат је квадрат дијагонале a. Страница тог квадрата представља дијагоналу другог квадрата, а страница другог квадрата представља дијагоналу новог квадрата, итд. Одредити збир обима и површина свих квадрата.
10. Аритметички и геометријски низ имају први члан 3, и једнаке треће чланове. Ако је други члан аритметичког низа већи од другог члана геометријског низа за 6, одредити те низове.
11. Збир три броја, који чине аритметички низ, је 15. Ако се ти бројеви повећају за 1, 4 и 19, редом, три формирана броја чине геометријски низ. Одредити три дата броја.
12. Ако бројеви a, b и c чине геометријски низ , доказати да они задовољавају релацију
$$(a + b + c) \cdot (a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

13. Бројеви a_1, a_2 и a_3 чине геометријски низ. Ако је познато да је $a_1 a_2 a_3 = 343$ и $a_2 - a_1 = 5$, одредити збир $a_1 + a_2 + a_3$.

14. Одредити први члан, као и укупан број чланова геометријског низа чији је количник $\frac{1}{2}$, последњи члан $\frac{1}{2}$, и збир свих чланова $31\frac{1}{2}$.

15. Дат је геометријски низ $5, 15, 45, \ldots$. Одредити ранг оног члана који је за 15 већи од осмоструког збира другог и четвртог члана.

16. Одредити геометријски низ ако је познато да је $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ и $a_2 \cdot a_4 = 16$.

17. Дат је геометријски низ са количником 2. Одредити онај члан тог низа који је за p већи од збира свих претходних чланова.

18. Први члан геометријског низа са непарним бројем чланова је 7, а средњи члан је 56. Ако је збир свих чланова једнак 889, одредити број чланова тог низа, као и његов количник.

19. Одредити збир
$$1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots1}_{n}.$$

20. Из бурета које садржи 800 l бензина сваког дана се источи половина количине бензина која се у бурету налази. Одредити количину бензина која ће се источити седмог дана, као и количину бензина која ће након тога остати у бурету.

21. Збир прва три члана геометријског низа је S. Ако те чланове помножимо бројевима 1, 2 и 3, редом, њихов збир ће бити S_1. Одредити тај низ.

22. Испитати да ли постоји правоугли троугао чије странице образују геометријски низ.

23. Лопта је са неке висине пуштена да пада на подлогу. После првог одскока, лопта је достигла висину од 1 m. После другог одбитка од подлоге, лопта је одскочила на 90 cm. Познато је да висине одскока опадају геометријски. Одредити после ког одскока ће лопта одскочити тачно 30 cm од подлоге.

24. Ако се од четири члана геометријског низа одузму бројеви 3, 4, $5\frac{1}{2}$ и 8, редом, формира се аритметички низ. Одредити четири дата броја.

25. Два геометријског низа имају једнак први члан, и он износи 2. Трећи члан првог низа је за 2 већи од другог члана другог низа, а пети члан првог низа је за 6 већи од збира прва три члана другог низа. Одредити та два низа.

26. Три цела броја образују аритметички низ. Ако се први број смањи за 1, а други за 2, формира се геометријски низ чији је количник једнак половини разлике аритметичког низа. Одредити три дата броја.

27. Дат је једнакостранични троугао странице a. У тај троугао је уписан нови троугао, спајањем средина страница великог троугла, па је у нови троугао на сличан начин уписан још један троугао, и тако редом. Одредити збирове обима и површина свих троуглова формираних на тај начин.

28. У једнакостранични троугао странице a уписан је квадрат чија се једна страница налази на страници троугла, а два темена на другим двема страницама. Изнад овог квадрата је на сличан начин је уписан нови квадрат, и тако редом. Одредити збир порвшина свих квадрата.

29. У лопту полупречника R уписан је правилан тетраедар, у тетраедар је уписана лопта, итд. Одредити збир површина и запремина свих:

    а) лопти; б) тетраедара.

30. Три броја образују геометријски низ. Ако трећи члан умањимо за 64, три броја образују аритметички низ. Ако потом други члан тог аритметичког низа умањимо за 8, формира се нови геометријски низ. Одредити три дата броја.