Полиомино поплочавања

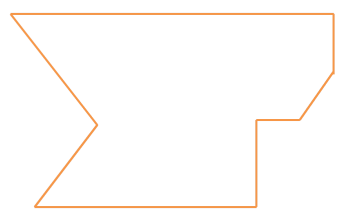
Ђорђе Баралић [1], Един Лиђан[2]

Сажетак. *Проблем поплочавања или паркетирања је древни проблем који се јавља још код Египћана, Грка, Персијанаца, Римљана, као и у Кини, Јапану и у другим старим цивилизацијама. Проблем се састоји у дељењу равни на различите облике који би је у потпуности прекривали, без празнина и преклапања, уз одређене правилности с обзиром на врсту и облик. Посебно занимљива врста поплочавања је врста поплочавања са полиоминима, која се обрађује на овој радионици. Детаљнији опис проблема је дат са доминама, триминима, тетраминима и пентаминима уз приказ до сада остварених резултата у истраживањима са поменутом проблематиком.*

Кључне речи: *полиомино, поплочавање, домино, тримино, тетрамино, пентонимо*

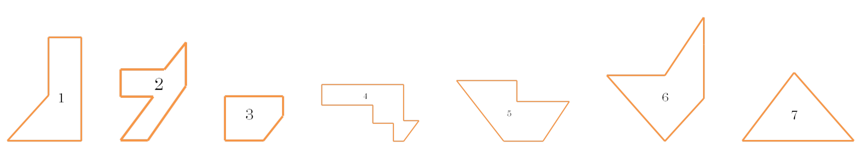
1 Увод

H. E. Dudene 1097. године у књизи *The Canterbury Puzzles* поставља проблем поплочавања (паркетирања или прекривања). Дајмо одговор на питање: "шта заправо представља проблем поплочавања равни?„Претпоставимо да имамо регион следећег облика:



Фигуре 1: Регион за поплочавање

и да нам је дато сљедећих 7 дијелова



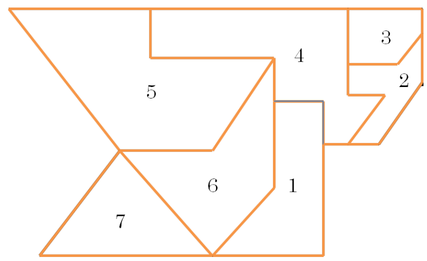
Фигуре 2: Облици за прекривање региона

Поставља се питање да ли је могуће са датим деловима прекрити цели регион, тако да се сваки део употреби само једном.

---

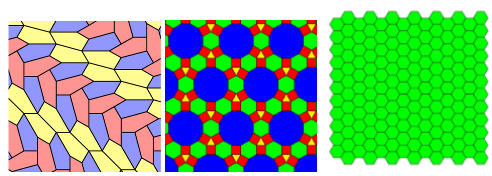
[1]ђбаралицЖми.сану.ац.рс

[2] lidjan_edin@hotmail.com



Фигуре 3: Могуће поплочавање

Ово би заправо била и сама илустрација проблема поплочавања. У зависности од тога с каквим дијеловима поплочавамо регион или раван, можемо говорити о различитим начинима поплочавања. Нпр. регион можемо поплочавати са правилним или неправилним геометријским облицима. Познато је да раван можемо поплочати, тј. покрити без преклапања и празнина помоћу квадрата, једнакостраничних троуглова и правилних шестоуглова, а да се не може поплочати правилним петоугловима или неким другим правилним многоугловима. Многи други неправилни облици могу поплочати раван, као нпр. правоугли трапези.



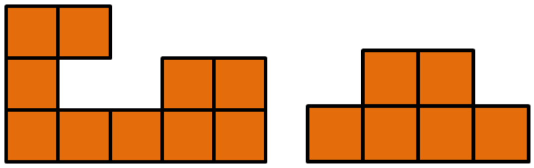
Фигуре 4: Могуће поплочавање

Проучавање поплочавања равни се компликује повећавањем разматрања различитих облика са којима се може раван поплочати. Зато ћемо разматрати специфичне не облике које називамо *полиоминима*.

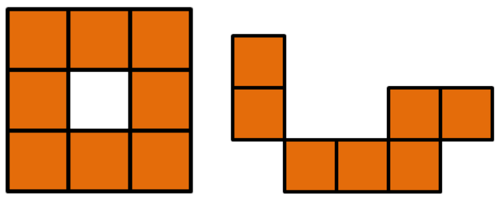
2 Полиомино

Полиомини су једноставни облици добијени повезивањем јединичних квадрата и њихових страница, тј. коначан 4- повезани подскуп равнине без рупа.

У математику их је први увео Solomon W. Golomb у својој књизи *Полуоминоес* (Сцрибнерс, 1965). Он је развио номенклатуру, а проблем опће формуле броја различитих типова n-омина који је поставио је и данас нерешен. Полиомине је касније популаризовао Martin Garden у својој колумни у *Scientific American*, названој *Mathematical Games*. Најједноставнији полиомино је мономино, елементаран јединични квадратић од којег су направљени остали полиомини, као и плоча коју прекривамо. Плоча је дакле правоугаоник димензија $m \times n$, тј. она има укупно $m \cdot n$

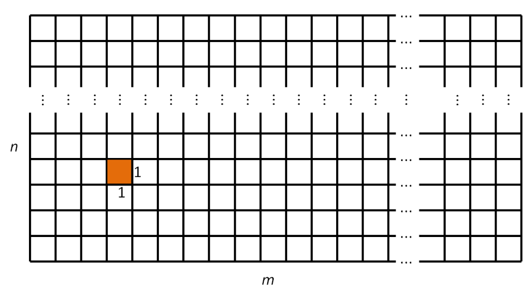


Фигуре 5: Примјери облика полиомина



Фигуре 6: Примјери облика неполиомина

мономиона.



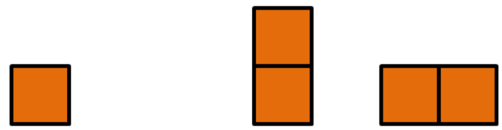
Фигуре 7: Правоугаона мрежа и мономино

Од мономиона добијамо све остале полиомине, нпр. домино је састављен од два мономина, тромино од 3, тетрамино од 4, пентонимо од 5 итд. Мономино и домино су јединствени, јер постоји по само један тип.

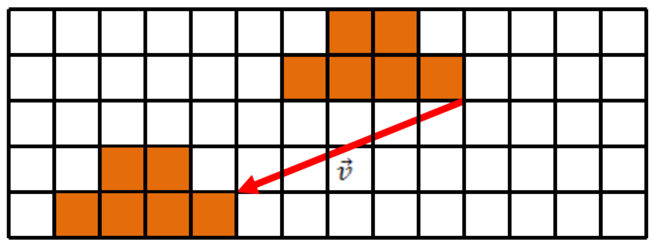
Овђе је заправо важно дати одговор које облике полиомина ћемо сматрати истим, а које различитим. Све облике које можемо добити један из другог транслацијом или комбинацијом транслација, рефлексија или ротација сматраћемо истим.

Нека је p полиомино и вектор $\overrightarrow{v} \in \mathbb{Z}^2$, тада ће $p_{\overrightarrow{v}}$ представљати слику полиомина p добијеног транслацијом за вектор $\overrightarrow{v}$. Сада бисмо могли прецизно математички дефинисати поплочавање помоћу полиомина.

Дефиниција 2.1 (Поплочавање) *Поплочавање $\mathcal{T}$ подскупа $D \subset \mathbb{Z}^2$ са скупом полиомина $\mathcal{P}$ је скуп парова $(p, \overrightarrow{u}) \in \mathcal{P} \times \mathbb{Z}^2$, таквих да*



Фигуре 8: Мономио и домино



Фигуре 9: Транслација

и) *D је унија полиомина $p_{\overrightarrow{u}}$,*

ии) *за сваки пар $(p, \overrightarrow{u})$ и $(p', \overrightarrow{v}) \in \mathcal{T}$, $p_{\overrightarrow{u}}$ и $p_{\overrightarrow{v}}$ се не преклапају.*

Сада бисмо могли рећи да проблем поплочавања са полиоминима можемо дефинисати на следећи начин:

Дефиниција 2.2 (Проблем поплочавања) *За дати скуп полиомина $\mathcal{P}$ и подскуп $D \subset \mathbb{Z}^2$. Да ли за D постоји поплочавње са $\mathcal{P}$?*

Како бисмо дати проблем поплочавања приближили размотримо следеће једноставне примере.

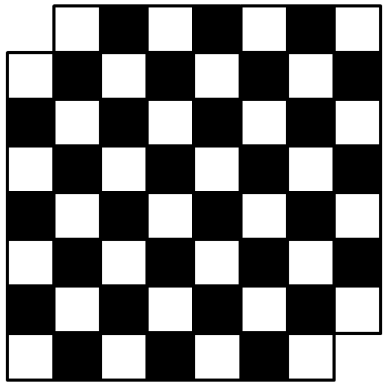
Пример 2.1 *Да ли је могуће шаховску плочу могуће поплочати са доминама?*

Пример 2.2 *Да ли је могуће са доминама поплочати окрњену шаховску плочу са Слике 10*

Пример 2.3 *Да ли се плоча димензија 6×6 прекривена доминама може пререзати, а да не пресежемо ни једну домину?*

Пример 2.4 *Може ли се шаховска табла димензија 8×8 из које су избачена нека два угаона поља поплочати доминама 1×2?*

Пример 2.5 *На колико начина се табла димензија $n \times 2$ може поплочати са плочицама димензија 1×2?*



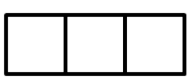
Фигуре 10: Окрњена шаховска плоча

Пример 2.6 *На колико начина се табла димензија $n \times 3$ може поплочати са плочицама димензија 1×2?*

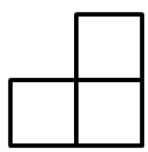
Пример 2.7 *Доказати да је за сваку шаховску плочу (било које димензије) са доминама, број хоризонталних домина са црним левим квадратом једнак броју хоризонталних домина са белим левим квадратом. Многи математичари су се заинтересовали за истраживања полиомина и до сада су показали следеће резултате везане за поплочавања са доминама.*

2.1 Поплочавања са тороминима

Полиомино који има три мономиона назива се тромино. Погледајмо могуће облике тромина и покушајмо установити колико имамо различитих облика.



(а) I -тромино



(б) L-тромино

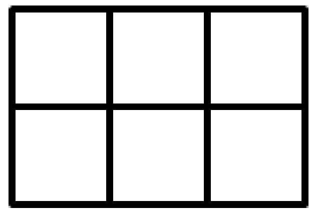
Фигуре 11: Тромино облици

Одакле можемо закључити да постоје два типа тромина, и то I-тромино и L-тромино.

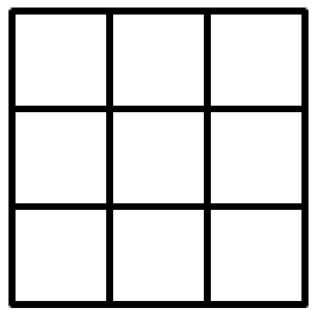
Пример 2.8 *Колико различитих начина постоји за поплочавање X са троминима.*

Пример 2.9 *Колико различитих начина постоји за поплочавање Y са троминима.*

Пример 2.10 *Може ли се шаховска табла 8×8 из које је избачено једно поље поплочати правим тромином 1×3?*

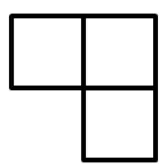


Фигуре 12: Правоугаона мрежа X



Фигуре 13: Правоугаона мрежа Y

Пример 2.11 *Поплочавање правоугаоника $m \times n$ са угаоним тромином (Слика 14) зваћемо правилним, ако не постоји правоугаоник са страницама мањим од m и n унутар тог поплочавања који је поплочан угаоним троминима. Доказати да ако за неко m и n постоји правилно, поплочавање правоугаоника $m \times n$, тада правилно, поплочавање постоји и за правоугаоник димензија $2m \times 2n$.*



Фигуре 14: Угаони тромино

Пример 2.12 *Одредити све парове природних бројева (m, n) таквих да је таблу димензија $m \times n$ могуће поплочати са угаоним троминима тако у том поплочавању не постоји правоугаоник (осим правоугаоника $m \times n$) који је поплочан фигурама типа угао.*

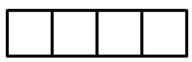
Пример 2.13 *Доказати је број начина да се правоугаоник димензија $m \times n$ поплоча са угаоним троминима паран.*

Пример 2.14 *Може ли се табла 5×7 прекрити угаоним троминима тако да су сва поља прекривена истим бројем фигура?*

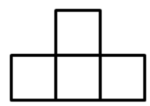
Пример 2.15 *Табла димензија 30×30 поплочана је са троминама 1×3. У сваку вертикалну домину уписан је број врсте у којој се налази, а у сваку хоризонталну број колоне у којој се налази. (Врсте и колоне су нумерисане бројевима од 1 до 30). Доказати да је збир свих написаних бројева дељив са 3.*

2.2 Поплочавања са тетраминима

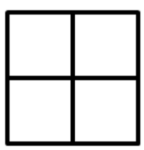
Тетрамини су полиомини који се састоје од 4 мономиона. За тетрамине постоји пет различитих типова тетрамина, а то су: I-тетрамино, L-тетрамино, T-тетрамино, Z-тетрамино и O-тетрамино.



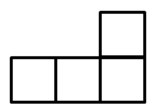
(а) I-тетрамино



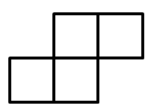
(б) L-тетрамино



(ц) O-тетрамино



(д) L-тетрамино



(е) Z-тетрамино

Фигуре 15: Тетрамино облици

Пример 2.16 *Правоугаоник је прекривен плочицама 2×2 и 1×4, O-тетраминима и I-тетраминима. Једна је плочица разбијена и за њу имамо заменску плочицу другог типа, можемо ли преслагивањем плочица поплочати правоугаоник?*

Пример 2.17 *Може ли се правоугаоник с 20 поља прекрити са свим различитим тетраминима?*

Пример 2.18 *Може ли се шаховска плоча прекрити са 15 T-тетрамина и једним O-тетрамином?*

Пример 2.19 *Може ли се плоча димензија 10×10 прекрити са*

а) T-*тетраминима*

б) L-*тетраминима*

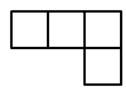
ц) I-тетраминима

Пример 2.20 *Плочи са $n \times n$ поља уклоњена су 4 угаона поља. Одредити за које n се плоча мже поплочати са L-тетраминима.*

Пример 2.21 *Може ли се поплочати 4×5 правоугаоник са по једним од сваке врсте тетраминима.*

Пример 2.22 *Да ли се табла димензија 10×10 може поплочати правим тетраминима 4×1?*

Пример 2.23 *Доказати да се табла димензије $n \times n$, $n > 2$ без угаоних поља може поплочати L-тетрамино (Слика 21) ако и само ако је $n - 2$ дељиво са 4.*



Фигуре 16: Угаони тромино

Пример 2.24 *Доказати да се табла $m \times n$ може поплочати L-тетраминима ако и само $m, n > 3$ и $8 \mid mn$.*

Пример 2.25 *Одредити све типове тетрамина.*

2.3 Поплочавања са пентаминима

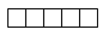
Полиомино који има пет мономиона назива се пентонимо.

Пример 2.26 *Одредити све типове пентамина.*

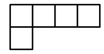
Пример 2.27 *Доказати да 12 различитих пентамина може склопити таблу 3×20.*

Пример 2.28 *Доказати да 12 различитих пентамина може утростручити V-пентамино са слике.*

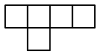
Пример 2.29 *Доказати да 12 различитих пентамина може утростручити X-пентамино са слике.*



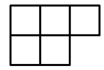
(а) I-пентамино



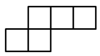
(б) L-пентамино



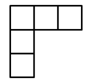
(ц) Y-пентамино



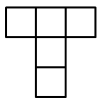
(д) P-пентамино



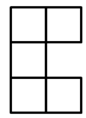
(е) N-пентамино



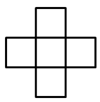
(ф) V-пентамино



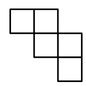
(г) T-пентамино



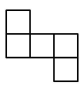
(х) U-пентамино



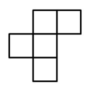
(и) X-пентамино



(ј) W-пентамино



(к) Z-пентамино



(л) F-пентамино

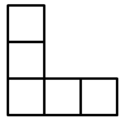
Фигуре 17: Пентамино облици

2.4 Још мало о поплочавању

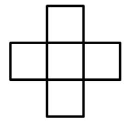
Када говоримо о поплочавањима можемо говорити о периодичном, полу-периодичном и непериодичним поплочавањима. Размотримо случај када је $D = \mathbb{Z}^2$ и $\mathcal{P}$ је коначно.

Дефиниција 2.3 (Периодично поплочавање) *Поплочавање $\mathcal{T}$ је периодично ако у њему постоје два независно линеарна вектора $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ таква да је $\mathcal{T}$ непромењен при одговарајућим транслацијама.*

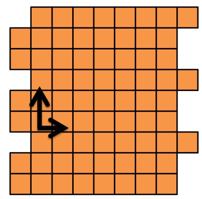
Дефиниција 2.4 (Полу-периодично поплочавање) *Поплочавање T је периодично ако у постоји вектор у такав да је T не промењен при одговарајућим транслацијама.*



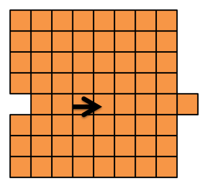
Фигуре 18: V-пентамино



Фигуре 19: X-пентамино



Фигуре 20: Периодично поплочавање



Фигуре 21: Полу-периодично поплочавање

Ремарк 2.1 (Полу-периодично имплицира периодично) *Ако постоји једно полу-периодично поплочавање равни са P, тада постоји и једно периодично.*

Теорема 2.1 *(Бергер, 1966) Проблем поплочавање са коначним скупом $\mathcal{P}$ и $D = \mathbb{Z}^2$ је неодлучив.*

Пример 2.30 *Може ли се квадрат 75×75 разбити на фигуре са слика?*

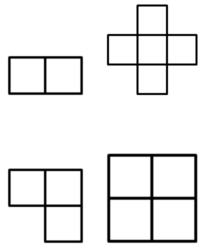
Пример 2.31 *Табла димензија 9×7 поплочана је фигурама два типа као на слици*

Нека је n број фигурица типа квадрата који учествују у поплочавању. Одредити све могуће вредности броја n.

Пример 2.32 *Да ли је могуће правоугаоник 66×62 поплочати фигурама 12×1?*

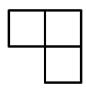
3 Полиомини у настави математике

- Само забава или алат за помоћу разумијевању разних математичких појмова и законитости, као што су основни закони аритметике (у нижим разредима основне школе типа комутативности сабирања, множења, у разумијевању изометријских трансформација, учењу и тумачењу транслације, симетрије и сл.



- Један интересантан приступ би се могао направити у учењу и разумијевању појма математичке индукције, којег ученици углавном схвате процедурално, али најчешће без конкретног разумијевња.

Пример 3.1 *Нека је n природан број. Показати да сваку шаховску плочу димензија $2^k \times 2^k$ са једним уклоњеним пољем можемо поплочатиати користећи угаони тромино*



Зашто би одабир таквог примера у редовној настави био добар?