ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНИ СЕМИНАР
О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА
У ОСНОВНИМ И СРЕДЊИМ ШКОЛАМА

Број: 242
Компетенција: К1
Приоритети: 1

ТЕМА:

МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАЦИ, ЊИХОВА КЛАСИФИКАЦИЈА И НЕКЕ МЕТОДЕ ЊИХОВОГ РЕШАВАЊА

РЕАЛИЗАТОРИ СЕМИНАРА:

ДР ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ,
ВЕЉКО ЋИРОВИЋ

Београд,
12. 02. 2017.

САДРЖАЈ

1. УВОД

Настава математике садржи разне математичке проблеме који представљају згодну могућност да се одређени наставни садржаји трансформишу у конкретне задатке, а да се радом на тим задацима и њиховом решавању ученици усмере ка стицању знања неопходних за примену у разним областима свакодневног жовота и за наставак математичког образовања.

Чини се да ниједан наставни предмет нема такву могућност да све што се теоријски обрађује практично провери и увежба од основног до највишег нивоа.

Зато се овај семинар бави математичким проблемима, њиховом класификацијом и методама њиховог решавања. Решавање математичких задатака је веома важан наставни проблем јер представља најбољу симулацију решавања проблема уопште. Циљ нам је да укажемо на што шири избор метода како би обогатили репертоар наставника на овом плану.

2. МАТЕМАТИЧКИ ПРОБЛЕМИ И ЊИХОВА КЛАСИФИКАЦИЈА

Условно речено математичке проблеме можемо поделити у две категорије:

- Доказни задаци и
- Конструктивни задаци.

Доказни задаци су они математички проблеми код којих се на основу неких датих података изводи, односно доказује, да тражени математички објекат (израз, формула, фигура, тело, скуп ...) има особине које треба доказати. На пример, ако је познато да је дати четвороугао квадрат, онда се од решаваоца задатка тражи да на основу дефиниције квадрата и већ доказаних особина квадрата, докаже да су дијагонале нормалне.

Конструктивни задаци су они математички проблеми код којих се на основу датих података тражи откривање непознатих математичких особина појединих објеката. На пример да се ако је дат неки израз израчуна његова вредност, или ако је дата нека једначина одреде њена решења, или ако су дате странице неког троугла да се конструише тај троугао. Конструктивни задаци нису по правилу само геометријски. Конструктивни задаци су сви они који откривају непозната својства датих математичких објеката.

Већина доказних задатака се може претворити у конструктивне и обрнуто. Доказни задатак – *Доказати да су дијагонале квадрата нормалне* може се претворити у конструктивни задатак – *Одредити какав је међусобни положај дијагонала квадрата*. И обрнуто, конструктивни задатак – *Израчунај збир свих двоцифрених природних бројева*, може се формулисати као доказни задатак – *Доказати да је збир свих двоцифрених природних бројева једнак 4905.*

У почетној настави математике доказни задаци су тежи за ученике, а касније то није случај, јер код доказних задатака тачно знамо шта доказујемо, док код конструктивних задатака никада нисмо сигурни да ли је откривена особина математичког објекта (вредност израза, решење једначине, површина троугла ...) тачно дефинисана. Упитајмо се и сами шта је теже за решавање? Проблем – *Доказати да је сваки прост број већи од 3 облика 6к – 1 или 6к +1* или проблем – *Одредити ког облика могу бити сви прости бројеви који су већи од 3?*

3. АЛГОРИТАМ ЗА РЕШАВАЊЕ МАТЕМАТИЧКИХ ПРОБЛЕМА И ЊЕГОВА ПРИМЕНА

Чувени амерички математичар, мађарског порекла, Ђерђ Поја у својој популарно написаној књизи "*Како ћу решити математички задатак?*"[1] даје, и на примерима објашњава, један врло користан општи алгоритам за решавање математичких проблема. То је поступак који треба да буде на уму сваком ученику и зато је значајно да се у наставном раду добро илуструје.

Овај алгоритам може много помоћи да се његовим правилним коришћењем издиференцирају фазе у решавању и дати проблем корак по корак трансформише у облик из кога се далеко лакше добијају тражена решења и изводе потребне анализе.

Алгоритам за решавање математичких проблема који предлаже Поја дат је у следећој табели којом се аутор алгоритма обраћа ученицима:

ПРВО		РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА
	■	Шта је непознато?
	■	Шта је задато?
	■	Како гласи услов?
ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ	■	~~Да ли је могуће задовољит~~и услов? Да ли је услов довољан за
ЗАДАТАК		одређивање непознате? Или није довољан? Можда је
		преодређен? Или контрадикторан?
	■	Нацртај слику! Уведи препознатљиве ознаке!
	■	Растави разне делове услова! Можеш ли их написати?
ДРУГО		ПРАВЉЕЊЕ ПЛАНА
	■	Да ли си задатак већ видео? Или си исти задатак видео у
		нешто другачијем облику?
	■	Знаш ли неки сродни задатак? Да ли знаш која теорема би ти
ПОТРАЖИ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ		могла бити од помоћи?
	■	Размотри непознату! Покушај да се сетиш неког познатог
ЗАДАТОГ И НЕПОЗНАТОГ!		задатка који садржи исту или сличну непознату!
АКО СЕ НЕ МОЖЕ НАЋИ	■	Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен! Можеш ли га
НЕПОСРЕДНА ВЕЗА,		употребити? Можеш ли применити његов резултат? Можеш
МОРАЋЕШ ДА РАЗМОТРИШ		ли применити методу којом је тај задатак решен?
ПОМОЋНЕ ЗАДАТКЕ.		Да ли можеш да уведеш неки помоћни елемент који би ти
		олакшао употребу тог задатка?
	■	Можеш ли да другачије формулишеш задатак? Да ли га је
		могуће изразити на још неки начин? Врати се на дефиниције!

[1] Видети књигу [14.] Ђерђ Поја: Како ћу решити математички задатак? – "Школска књига" - Загреб, 1966.

НА КРАЈУ ТРЕБА ДА НАПРАВИШ ПЛАН РЕШАВАЊА.	▪ Ако не можеш да решиш постављени задатак покушај прво да решиш неки сродан задатак! Можеш ли да се сетиш неког лакшег задатка који му је сличан? Општији задатак? Специфичнији задатак? Аналогни задатак? Можеш ли да решиш део задатка? Задржи само један део услова, а одбаци други део; када је непозната тако одређена како се може мењати? Да ли из датих података можеш извући нешто употребљиво? Да ли можеш да се сетиш неких других података који ти могу помоћи у одређивању непознате? Можеш ли да промениш непознату, или дате податке, или ако треба и једно и друго тако да нова непозната и нови подаци буду међусобно ближи?
	▪ Да ли си искористио све задато? Да ли си искористио услов у потпуности? Да ли си узео у обзир све битне појмове који се налазе у задатку?
ТРЕЋЕ	ПРИМЕНА ПЛАНА
А. ПРИМЕНИ СВОЈ ПЛАН!	▪ Када користиш план решавања, контролиши сваки корак! ▪ Можеш ли јасно видети да је корак исправан? ▪ Можеш ли доказати да је исправан?
ЧЕТВРТО	ПРОВЕРА
В. ПРОВЕРИ ДОБИЈЕНО РЕШЕЊЕ	▪ Можеш ли проверити резултат? ▪ Можеш ли проверити доказ?
	▪ Можеш ли резултат извести другачије? ▪ Можеш ли га уочити на први поглед?
	▪ Можеш ли резултат или поступак употребити на неком другом задатку?

<u>ПРИМЕР</u> <u>1.</u> Одредити непознате цифре a и b тако да број $\overline{2015ab}$ буде дељив са 12.

ПРВО	РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА
	▫ У траженом шестоцифреном броју непознате су цифре a и b
	▫ Дате су прве четири цифре 2, 0, 1 и 5
	▫ Услов је да добијени шестоцифрени број буде дељив са 12
ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ ЗАДАТАК	▫ Услов је могуће задовољити, јер је, на пример, број 201504 дељив са 12
	▫ Услов да је број $2015ab$ дељив са 12 је довољан за одређивање решења
	▫ Услов није контрадикторан.
	▫ Чини се да проблем има више решења, јер је сваки дванаести број дељив са 12
	▫ Слика ми није потребна
ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ ЗАДАТАК	▫ Дати услов садржи два подуслова: да би добијени број био дељив са 12 мора бити дељив са 3 и са 4
	▫ То значи да збир цифара добијеног броја мора бити дељив са 3
	▫ Али и да двоцифрени завршетак ab мора бити дељив са 4

ДРУГО	ПРАВЉЕЊЕ ПЛАНА
ПОТРАЖИ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ	▪ Имам две идеје
ЗАДАТОГ И НЕПОЗНАТОГ!	▪ Прва је: Одредићу најмањи број $2015ab$ који је дељив са 12, а остале ћу добити додавањем броја 12 на претходни број, јер је сваки дванаести број дељив са 12
АКО СЕ НЕ МОЖЕ НАЋИ НЕПОСРЕДНА ВЕЗА, МОРАЋЕШ ДА РАЗМОТРИШ ПОМОЋНЕ ЗАДАТКЕ.	▪ Друга је да одредим збир цифара траженог броја $2015ab$, а он је $8 + a + b$ и да издвојим све комбинације a и b које задовољавају два постављена услова, тј. да је $8 + a + b$ дељиво са 3 и да је двоцифрени завршетак ab дељив са 4.
	▪ За прву идеју план је јасан - треба одредити најмањи број
НА КРАЈУ ТРЕБА ДА НАПРАВИШ ПЛАН РЕШАВАЊА.	▪ За другу идеју план се састоји у додавању на 8 збирова $a + b$ који омогућују дељивост са 3. Дакле, $a + b$ може бити 1, 4, 7, 10, 13 и 16, јер $a + b$ не може бити веће од 18.
ТРЕЋЕ	ПРИМЕНА ПЛАНА
	▪ Прва Најмањи тражени број је 201504.идеја:
	▪ Сви тражени бројеви су тада 201504, 201516, 201528, 201540, 201552, 201564, 201576, 201588.
	▪ Друга идеја:
	▪ Ако је $a + b = 1$ могући су бројеви 201501 или 201510, али ни један од њих није дељив са 12.
	▪ Ако је $a + b = 4$ могући су бројеви 201504, 201540, 201513, 201531, 201522. Решење су прва два броја, док остали то нису.
C. ***ПРИМЕНИ СВОЈ ПЛАН!***	▪ Ако је $a + b = 7$ могући су бројеви 201507, 201570, 201516, 201561, 201525, 201552, 201534 и 201543, а решења су трећи и шести број јер остали нису дељиви са 4.
	▪ Ако је $a + b = 10$ могући су бројеви 201519, 201591, 201528, 201582, 201537, 201573, 201546, 201564, 201555, а решење је само трећи и осми број, јер остали нису дељиви са 4.
	▪ Ако је $a + b = 13$ могући су бројеви 201549, 201594, 201558, 201585, 201567 или 201576, а решење је само последњи број, јер остали нису дељиви са 4.
	▪ Ако је $a + b = 16$ могући су бројеви 201579, 201597, 201588 а решење је само број 201588.
ЧЕТВРТО	ПРОВЕРА
	▪ Упоређивањем решења добијених првом и другом идејом јасно је да су добијена решења једина решења
	▪ Решење је добијено на два начина, а сигурно је и да постоје друге могућности.
	▪ На пример од свих бројева чији је двоцифрени завршетак дељив са 4 елиминисати оне који нису дељиви са 3
D. **ПРОВЕРИ ДОБИЈЕНО РЕШЕЊЕ**	▪ Или одредити остатак при дељењу броја 201500 са 12 и на основу тога одредити најмањи број.
	▪ Дати поступак се може употребити и код проблема који имају сличну формулацију. На пример:
	▪ Одредити све бројеве облика $2015ab$ који су дељиви са 15.
	▪ Одредити цифре a и b такве да је збир бројева $1234a$ и $9876b$ дељив са 12

4. МЕТОДЕ РЕШАВАЊА ДОКАЗНИХ ЗАДАТАКА

Доказни поступак или правилна аргументација нису само важан део наставе математике, већ и много битан део свакодневног живота и зато је припрема ученика за правилно доказивање важан задатак наставе математике. Доказивање треба увежбавати од најнижег узраста, али треба добро одмерити које облике доказивања користимо у ком узрасту.

Сматрамо да су директан доказ и доказ контрапримером сасвим довољни за првих пет разреда основне школе. Нешто строжије доказивање везано је за садржаје о подударности и елементарној теорији бројева и све што проистиче из подударности и бројева у шестом разреду када се могу користити и елементи доказивања разликовањем случајева. Метод свођења на противречност се уводи у седмом разреду (код доказа ирационалности броја $\sqrt{2}$) и мислимо да је то за основну школу сасвим довољно. Коришћење контрапозиције и разних облика математичке индукције при доказивању везано је за средњошколску наставу и нема потребе да се раније форсирају, јер доказивање у основној школи је сложен и тежак посао и без ових метода, јер се настава најчешће заснива на очигледности и ученици не виде потребу за доказивањем онога што је „очигледно".

4.1. МЕТОД ДИРЕКТНОГ ДОКАЗА

Метод директног доказа је најчешће коришћен метод доказивања и почива на једноставном личичком правилу (таутологији) у математичкој логици познатој као транзитивност имплика-ције: $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Највећи број тврђења у настави математике има облик $A \Rightarrow B$, где A представља претпоставку, а B тврђење. Метод директног доказивања подразумева низ коректних импликација, при чему је A први, а B последњи елеменат у том низу. Конкретно, директан доказ представља закључивање облика $(A \Rightarrow p_1 \wedge p_1 \Rightarrow p_2 \wedge \ldots \wedge p_{K-1} \Rightarrow p_K \wedge p_K \Rightarrow B)$, па се на основу добијеног низа закључује да $A \Rightarrow B$.

Неке примере директних доказа дајемо у наредним задацима:

1. Природни бројеви 1, 2, 3, ... 2014, 2015 написани су један за другим и добијен је вишецифрени број 12345678910....201320142015. Доказати да је добијени број дељив са 9 и није потпун квадрат неког природног броја.
2. Доказати да је $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
3. Ако је p прост број већи од 3, онда је $p^2 - 1$ дељиво са 24. Доказати.
4. Ако су x и y природни бројеви већи од 1 онда је $x^4 + 4y^4$ сложен број. Доказати.
5. Доказати неједнакост између аритметичке и геометријске средине два ненегативна броја.
6. Збир тежишних дужи троугла већи од полуобима, а мањи од обима троугла. Доказати.
7. Нека су s и t сечица и тангента датог круга k конструисане из тачке M ван области датог круга. Сечица s сече кружницу у тачкама A и B, а тангента t додирује кружницу у тачки C. Доказати да је $MA \cdot MB = MC^2$.

4.2. ДОКАЗИВАЊЕ КОНТРАПРИМЕРОМ

За тврђење облика $(\forall x \in X)\big(P(x)\big)$ може се доказати да није тачно, ако пронађемо елемент a X $P(a)$ a се назива контрапример за тврђење $(\forall x \in X)\big(P(x)\big)$ ење.

Када нам се деси да ни после неколико покушаја не успевамо да докажемо неко тврђење, или када „слутимо" да неко тврђење није тачно, онда ћемо покушати да нађемо контрапример којим ћемо то тврђење оповргнути.

Веома често метода доказивања контрапримером користи се и приликом доказивања особина релација, где се особине рефлексивности, симетричности, антисиметричности и транзитивности, веома једноставно оповргавају контрапримером кад год је то могуће.

Примери оповргавања тврђења контрапримером.

1. Доказати да следеће тврђење није тачно: Сваки ненегативан цео број једнак је збиру квадрата три ненегативна цела броја.

   Доказ: за ово тврђење се може доказати да није тачно тако што ћемо наћи контрапример за њега, односно наћи ћемо ненегативан цео број, који није збир квадрата три ненегативна цела броја.

   Поћи ћемо редом од броја 0,

$$0 = 0^2 + 0^2 + 0^2$$
$$1 = 0^2 + 0^2 + 1^2$$
$$2 = 0^2 + 1^2 + 1^2$$
$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$$
$$4 = 0^2 + 0^2 + 2^2$$
$$5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$$
$$6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$$
$$7 = ?$$

Дошли смо до броја 7 и видимо да се он не може представити у облику збира квадрата три ненегативна броја јер се не може представити као збир бројева 0, 1, и 7. Број 7 је дакле контрапример за дато тврђење, чиме смо показали да оно није тачно.

2. Доказати да није тачно тврђење: За све реалне бројеве a и b из $a^2 = b^2$ следи $a = b.$

   Доказ: тврђење ћемо оповргнути тако што ћемо наћи пример два различита реална броја таква да су вредности њихових квадрата једнаке. Такви су на пример 2 и -2, или $\frac{1}{\ }$ и $-\frac{1}{\ }$ или било која два друга супротна реална броја.

4.3. ДОКАЗИВАЊЕ СВОЂЕЊЕМ НА ПРОТИВРЕЧНОСТ

Свођење на противречност или, по Аристотелу, *свођење на немогуће* (лат. Reductio ad absurdum) је један од чешће коришћених доказа у логици и математици.

Овде се имплицитно користи закон контрадикције (свођење на апсурд) који тврди да једна категорична изјава не може бити истовремено и истинита и неистинита.

Сам метод логички се базира на таутологији $(\neg p \Rightarrow (q \land \neg q)) \Rightarrow p$.

Доказивање тврђења овим методом састоји се у следећем: ако хоћемо да докажемо неку тврдњу, онда прво претпоставимо њену негацију. Ако ту негацију доведемо у противуречност (апсурд), онда смо тиме успели да докажемо саму почетну тврдњу. Овакав начин доказивања често се назива индиректним. Доказ се не изводи директно за тврдњу коју желимо да докажемо, већ доказујемо да је негација тврдње немогућа. Затим прихватамо саму тврдњу и закључујемо да поседујемо доказ за њу, до чега смо дошли индиректно.

Метода је најпре коришћена код хеленских филозофа. Претпоставља се да су је први користили филозофи софисти, који су ову методу користили као адвокати у судовима. Софисти – адвокати су невиност својих штићеника доказивали започињући са „претпоставимо да је мој штићеник крив..." и на крају показивали како то доводи до противречности са постојећим доказима.

Најстарији математички доказ који је изведен овом методом, а приписује се Еуклиду, је доказ тврђења које садржи следећи:

Задатак 1. Скуп простих бројева је бесконачан. Доказати.

Доказ. Претпоставимо да постоји само коначно много простих бројева и да се они могу поређати у низ $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Сви остали природни бројеви би били сложени, па би то био и број $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$+1. Али како је сложен он мора бити дељив неким од простих бројева, но то није могуће јер са којим год од наведених да се подели он даје остатак 1. Па смо овим конструисали још један прост број, и тако претходни поступак можемо понављати до бесконачности. Па скуп простих бројева није коначан, већ бесконачан. Овај доказ је прибележио Еуклид, још пре више од 2000 година!

Задатак 2. Доказати да је број $\sqrt{2}$ ирационалан.

Доказ. Пођимо од супротне претпоставке. Претпоставимо да $\sqrt{2}$ није ирационалан број! Он се онда може представити као разломак $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, тако да су p и q узајамно прости бројеви. Квадрирањем и једноставном трансформацијом се добија да је $p^2 = 2q^2$. Одваде следи да је p^2, а тиме и pсложен број дељив са 2, па се може представити као $p = 2r$.

Одавде је $4p^2 = 2q^2$, одакле следи да је q^2, а тиме и q сложен број дељив са 2, па се може представити као $q = 2t$.

Међутим, то је у супротности са претпоставком да су p и q узајамно прости бројеви, па следи да $\sqrt{2}$ не може бити рационалан, већ ирационалан број. Овим је доказано постојање ирационалних бројева.

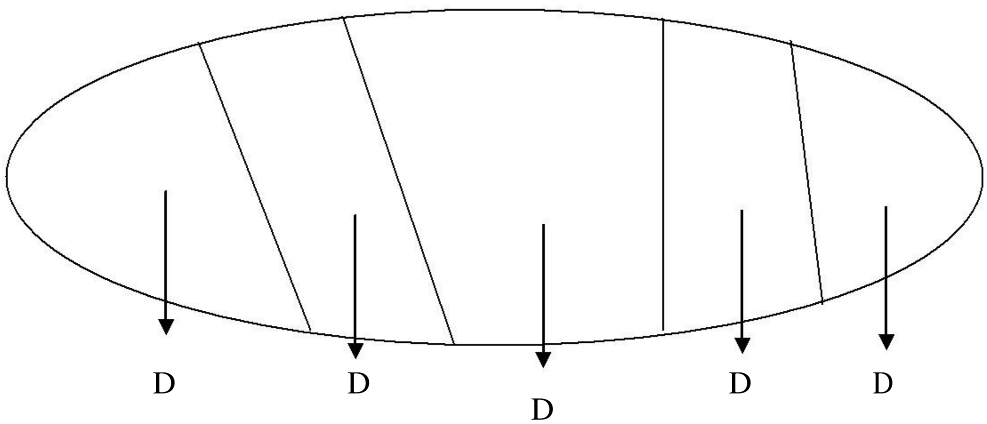
Задатак 3. Број 3 није решење једначине $x^3 - 5x = 10$.

Задатак 4. Доказати да једначина $2^n + 9 = k^2$ нема решења у скупу природних бројева за $n > 4$.

4.4. ДОКАЗИВАЊЕ РАЗЛИКОВАЊЕМ СЛУЧАЈЕВА

Решавање доказних задатака метод разликовања случајева није много познат, а ни превише теоријски третиран у радовима везаним за методику математике. О методу разликовања случајева писали су у својим радовима Марица Прешић (1980), Војислав Андрић (1981, 2001, 2006), Здравко Курник (2003. и 2010.), Ш. Арсланагић (2004.) …

Метод разликовања случајева претпоставља прецизно дефинисање домена математичког задатка, затим поделу домена на дисјунктне скупове и доказивање у сваком од уочених дисјунктних скупова. Међутим, није лако направити дисјунктну поделу домена задатка и суштина методе разликовања случајева управо и јесте у критеријумима и принципима поделе домена на дисјунктне поскупове.



Зато је циљ овог дела семинара да се на конкретним примерима илуструју принципи поделе домена задатка на дисјунктне подскупове и прикаже универзалност примене метода, јер се метод једнако успешно може применити у свим математичким наукама (алгебра, геометрија, теорија бројева, комбинаторика…). Наравно циљ је и да се илуструју нестандардне ситуације у којима су елементарне методе углавном немоћне. Наводимо неке карактеристичне примере примене методе разликовања случајева у доказним задацима у настави математике:

1. Ако је x реалан број, онда је $x^2 \geq 0$.
2. Доказати да је сваки прост број већи од 3 облика $6к - 1$ или $6к + 1$. Да ли важи обрнуто тврђење?
3. Доказати да за сваки реалан број a важи неједнакост $a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 > 0$.
4. Доказати да не постоје цели бројеви x и y такви да је $x^4 + y^4 = 333 ... 333$ (2015 тројки).
5. Доказати да 5 тачака у равни одређује највише 10 правих.
6. Од свих правоугаоника датог обима, највећу површину има квадрат. Доказати.
7. На математичкој конференцији учествује n математичара. Доказати на на конференцији постоје бар два учесника са истим бројем познаника.
8. У равни је дато 2015 тачака таквих да за сваке три (на пример A, B и C) од њих важи да је растојање $AB < 1$ или $AC < 1$ и ли $BC < 1$. Доказати да постоји круг полупречника 1 који садржи бар 1008 датих тачака.

4.5. ДОКАЗИВАЊЕ КОРИШЋЕЊЕМ КОНТРАПОЗИЦИЈЕ

У доказним задацима се жели показати да из неке претпоставке P следи нека тврдња Q, тј. да је импликација $P \Rightarrow Q$ истинита. Директно доказивање састоји се у томе да се полазећи од претпоставке P, применом аксиома, дефиниција и раније доказаних теорема, низом исправних логичких закључивања дође до Q. За разлику од директног доказивања, индиректним доказивањм је пут од претпоставке P до тврдње Q „заобилазан".

Један од метода индиректног доказивања је доказивање коришћењем контрапозиције. Иако се ређе употребљава, може у неким ситуацијама бити од користи. Сам метод је базиран на таутологији, тзв. **закону контрапозиције**,

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

Уместо да се доказује да из P следи Q, доказује се да из $\neg Q$ следи $\neg P$, а што у неким случајевима може бити знатно лакше.

Следе задаци којима се илуструје доказивање коришћењем контрапозиције:

1. Ако је n^2 непаран број, онда је и n непаран број. Доказати.
2. Ако је у скупу реалних бројева $xy \neq 0$, онда је $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Доказати.
3. У троуглу ABC дужине страница BC, CA и AB су редом a, b и c. Ако важи да је $a^2 + b^2 \neq c^2$, онда је $\angle ACB \neq 90^\circ$. Доказати.
4. Ако за конвексан четвороугао $ABCD$ важи да је $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$, онда су странице AB и CD паралелелне. Доказати.

4.6. ДОКАЗИВАЊЕ КОРИШЋЕЊЕМ МАТЕМАТИЧКЕ ИНДУКЦИЈЕ

Математичка индукција је метод математичког доказивања најчешће коришћеног за доказивање да је нека тврдња тачна за све природне бројеве.

Најранији трагови математичке индукције се могу наћи у Еуклидовом доказу да постоји бесконачно много простих бројева, и Баскарином *циклидном методу*. Форма доказа математичком индукцијом се јавља у књизи коју је написао Ал-Караџи око 1000. године, који ју је између осталог користио да докаже биномну теорему и Паскалов троугао.

Прво ригорозно излагање принципа индукције је дао Франческо Мауролико, у свом делу *Arithmeticorum libri duo* (1575.), који је користио ову технику да докаже да је збир првих n непарних целих бројева једнак n^2. Индукцију су такође независно открили Швајцарац Јакоб Бернули и Французи Паскал и Ферма.

Доказ математичком индукцијом изводи у три корака:

(1) у првом кораку проверавамо да ли тврђење важи за $n = 1$ (или понекад за неку другу рочетну вредност), овај корак се зове **база индукције**.

(2) у другом кораку претпоставимо да тврђење важи за неки број n, и овај корак се зове индукцијска претпоставка.

(3) у трећем, уједно и последњем кораку, доказујемо да ако тврђење важи за број n, онда важи и за $n+1,$ и ако то успемо закључујемо да тврђење важи за сваки природан број n.

Ево и неколико задатака који се доказују применом математичке индукције:

1.Методом математичке индукције доказати да важе дате једнакости:

a) $1+2+3+4+\cdots+(2n-1)=n^2$

b) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

c) $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n-1)2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=2^n$

2. Доказати да важи:

a $19|\, 5^{2n+1}2^{n+2}+3^{n+2}2^{2n+1}$ $n\geq 0$);

b) $84|\, 4^{2n}-3^{2n}-$

3. Доказати да n правих у равни од којих никоје две нису паралелне и никоје три не садрже исту тачку, деле раван на 1+ $\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Доказати да се поштанским маркицама од 3 и 5 динара може платити сваки износ поштарине већи или једнак од 8 динара.

РАДИОНИЦА 1.

1. Доказати да једначина $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.

2. Ако су p и q прости бројеви онда једначина $2^p + p^2 = q$ има јединствено решење. Доказати.

3. Доказати да се поштанским маркицама од 3 и 5 динара може платити сваки износ поштарине већи или једнак од 8 динара.

4. Да ли се квадрат сваког природног броја већег од 1 може приказати као збир два проста броја?

5. Ако је a рационалан број различит од 0, а b ирационалан број, онда су бројеви $a + b$, $a - b$, ab, a/b, b/a ирационални беојеви. Доказати.

5. МЕТОДЕ РЕШАВАЊА КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАТАКА

5.1. МЕТОД ДИРЕКТНОГ ИЗРАЧУНАВАЊА

Метод директног израчунавања почива на особинама транзитивности (једнакости, неједнакости, конгруенција ...) и састоји се у суштини од низа формула које су добијене од полазне разним еквивалентним трансформацијама.

За случај једнакости, тј. израчунавања неког израза тај низ би се могао приказати на следећи начин $I = I_1 = I_2 = \ldots = I_{к\text{-}1} = I_к$ где је I почетни израз, а $I_к$ коначна његова вредност.

Код једначина, неједначина, система, ... уопште неких формула, тај низ би био мало другачији, тј решавање формула би се одвијало по механизму: $F \Leftrightarrow F_1$, $F_1 \Leftrightarrow F_2$ ... $F_{к\text{-}1} \Leftrightarrow F_к$ где је последња формула $F_к$ у такозваном решеном облику.

Проблеми на чијем решавању ћемо илустровати изложене идеје су:

1. Одредити све просте бројеве p за које важи неједнакост: $\frac{3}{8} < \frac{3}{p} < \frac{4}{3}$.

2. Угао који заклапају висина и тежишна дуж из темена правог угла је 14°. Одредити углове датог правоуглог троугла.

3.Шта је веће: $5 + \sqrt{8}$ ил$\sqrt{\text{ı}}$ $\sqrt{6} + \sqrt{?}$

4. Која цифра је на 2015 месту у децималном запису броја 2/7?

5. Израчунати вредност израза $S = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} + 3^n$.

6. У датом троуглу ABC, тачка D је средиште странице BC. Тачка E дели дуж AD у размери 3 : 1. Права BE сече страницу AC у тачки F. Одредити однос површина троуглова ABF и BCF.

7. Хипотенузина висина дели хипотенузу на одсечке 9cm и 16cm. Израчунати странице, висине и тежишне дужи правоуглог троугла, полупречник описаног и уписаног круга, обим и површину троугла.

8. Ако је x реалан број колико износи најмања вредност израза $(x – 1)(x – 2)(x – 3)\ (x – 4)$?

9. У кружни исечак чије је полупречник R и тетива $2a$ уписан је круг полупречника r. Израчунати r у функцији R и a.

10. Моторни чамац из Новог Сада Дунавом у Београд стигне за 3 сата, а из Београда у Нови Сад за 5 сати. Колико пута је брзина чамца већа од брзине Дунава?

11. Колико има правоуглих троуглова код којих је мерни број хипотенузе за 1 већи од мерног броја дуже катете?

12. За природне бројеве a, b, c и d важи једнакост $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Да ли је број $a + b + c + d$ прост или сложен?

Неколико напомена и о проблемским задацима:

Способност решавања проблемских задатака текстуалне природе веома ефикасно показује ниво математичких знања и способности самих ученика. Начин одабраног математичког моделовања при решавању текстуалних проблемских задатака може значајно да допринесе развијању разумевања поступака њиховог решавања.

Текстуални задаци могу се разумети као језички опис неке проблемске ситуације, где се поставља одређено питање, а решење проблема се добија применом рачунских операција на бројевне и друге податке из описа проблема. Веома важне фазе у решавању оваквих проблема су: разумевање текста, разумевање ситуације у реалном окружењу, пребацивање на метематички језик – превођење у изразе, рачунање и разумевање решења.

Постоје многе директне и индиректне методе решавања текстуалних задатака.

Индиректне методе које се заснивају на коришћењу модела и најчешће се користе у почетној настави математике, су: метода дужи, метода правоугаоника, метода таблица, метода Веновог дијаграма...

Неке од директних метода, које се карактерише решавањем одређеног проблема без коришћења модела су: метод покушаја и погрешака, метод директног израчунавања, метод једначина...

У поступку решавања математичког проблема методом директоног израчунавња важна фаза је записивање, најчешће, сложеног математичког израза који одговара структури датог проблема.

Пример 1. (Илустрација за млађе разреде ош) Два друга, Миша и Тома, имају заједно 240 динара. Они треба да поделе овај новац тако да Тома добије 50 динара више. Колико динара ће добити сваки од њих?

Решење. Текст проблема директно преводимо на рачун.

Миша ће добити: (240 – 50) : 2 = 95 динара, а Тома 95 + 50 = 145 динара.

Задаци

1. Продавац у једној продавници има на располагању 50 новчића од 1, 2 и 5 динара. Укупна вредност свих новчића је 100 динара. Колико је новчића од сваке врсте ако се зна да су два од та три броја једнака?

2. Ако Пера позајми Милици 500 динара они ће имати исте суме новца. Ако Милица позајми Пери 500 динара онда ће он имати пет пута више новца од ње. Колико новца имају њих двоје?

3. На табли је записано неколико позитивних реалних бројева од којих је сваки једнак шестини збира преосталих бројева. Колико је бројева написано на табли?

4. Двадесет шибица кошта толико динара колико се шибица добија за 500 динара. Колико кошта 2015 шибица?

5. Решити једначину

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}.$$

5.2. МЕТОД КОРИШЋЕЊА ТАБЛИЦА

Таблице су врло ефикасно средство да се реше поједини проблеми у настави математике. Њихово присуство је евидентно код решавања логичко-комбинаторних проблема, али је могуће и код решавања задатака из елементарне теорије бројева и других наставних области.

Таблице прегледно и јасно саопштавају информације и зато су погодне за примену у настави математике. Приказивањем података у форми таблице добија се визуелни преглед у коме се јасније уочавају битне релације између објеката, а смим тим се лакше долази до исправних закључака. Најчешће се примењују у задацима „са пресипањем“, који се обрађују у додатној настави нижих разреда основне школе, у задацима са одређивањем поретка, могу се примењивати приликом решавања једноставнијих проблема из теорије бројева, али и приликом решавања сложенијих логичко-комбинаторних проблема.

Следе примери за илустровање примене овог метода

1. Млекарица Мара располаже кантом за млеко и судовима чија је запремина 3 литра и 5 литара. Како да свом клијенту Пери испоручи тачно 4 литра млека?
2. Ученици са такмичарским бројевима 1, 2, 3 и 4 такмиче се из математике. Одредити редослед ученика ако се зна: (1) Ниједан од ученика није освојио место које се поклапа са његовим такмичарским бројем; (2) Такмичар са редним број 3 није освојио прво место;

   (3) Број ученика који је освојио четврто место, поклапа се са бројем места које је освојио ученик са бројем 2. Одредити редослед такмичара.
3. Доказати да не постоје цели бројеви x и у такви да је $x^4 + y^4 = 12\,345\,678$.
4. Пет кућа је обојено у 5 различитих боја,у свакој кући живи особа друге националности. Тих 5 власника пију одређено пиће, свирају одређени инструмент и држе одређене кућне љубимце. Ниједан власник нема исти иструмент, љубимца нити пију исто пиће. Знамо још и да:
   1) Британац живи у црвеној кући,
   2) Свеђанин дрзи псе,
   3) Данац пије цај,
   4) Зелена кућа је лево од беле куће,
   5) Власник зелене куће пије кафу,
   6) Особа која свира виолину гаји птице,
   7) Власник жуте куће свира клавир,
   8) Власник средње куће пије млеко,
   9) Норвежанин живи у првој кући,
   10) Човек који свира трубу живи поред онога који гаји мачиће,
   11) Човек који држи коње живи поред човека који свира клавир,
   12) Власник који свира хармонику пије пиво,
   13) Немац свира гитару,
   14) Норвежанин живи поред плаве куће,
   15) Човек који свира трубу има комшију који пије воду.

   Ко од њих држи рибице?

5.3. МЕТОД ,,ПАР - НЕПАР"

Метод ,,пар - непар" за решавање математичких задатака почива на коришћењу парности, односно непарности, бројева. У задацима који се могу решити овим методом битно је уочити да ли је вредност неког израза парна или непарна, посматрати парност збира или производа, пратити смењивање парности и непарности, очување (не)парности након неке извршене трансформације ....

Особине које се најчешће користе при употреби овог метода су:

1. Збир или разлика два парна, односно два непарна броја, је паран број.
2. Збир или разлика парног и непарног, односно непарног и парног броја, је непаран број.
3. Производ два непарна броја је непаран, а производ парног и броја произвољне парности је паран.

Следе одабрани задаци који илуструју метод „пар – непар“:

1. Множећи разлику два природна броја са њиховим производом Пера је добио 2015. Да ли је погрешио у рачуну?
2. Да ли је могуће бројеве од 1 до 10 поделити у две групе тако да збирови бројева у те две групе буду једнаки?
3. Редом је написано седам природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Затим су ти исти бројеви написани у новом редоследу и обележени редом са $b_1, b_2, \ldots, b_7$. Да ли је могуће добити да производ $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_7 - b_7)$ буде непаран број?
4. Одредити све парове природних бројева (x, y) такве да је $x! + 4y = 8765$.
5. Одредити све парове природних бројева (m, n) такве да је $m^2 + 99998 = n^2$.
6. Одредити све парове (p, m), где је p прост број, а m цео број, такве да је вредност израза
$$\frac{m^3 - pm + 1}{m^2 + pm + 2}$$
цео број.
7. Мара је на папиру написала 2014 нула и 2015 јединица. Она брише по два броја и ако су исти уместо њих уписује јединицу, а ако су различити онда нулу. Који ће број остати последњи написан на папиру?
8. На табли је редом написано првих 2015 природних бројева. У сваком кораку бришу се два произвољна броја, а уписује се апсолутна вредност њихове разлике. Да ли је могуће да после 2014 корака на табли остане написан број 1?

О методу „пар – непар“ биће још речи код приказаивања разних метода којима се елементарно решавају Диофантове једначине.

5.4. МЕТОД РАЗЛИКОВАЊА СЛУЧАЈЕВА

Метод разликовања случајева је један од најексплоатисанијих метода за решавање математичких проблема. У неким областима, као на пример у елементарној математици (теорији бројева, комбинаторици, алгебри, геометрији), он је општи, али није свемогућ, мада је сигурно најчешће коришћен, било самостално, било у комбинацији са другим методама. Зато ћемо, пре извесног уопштавања, метод разликовања случајева илустровати са неколико примера који се односе на разне математичке проблеме који показују шта се све може користити као инструмент за рационално разликовање случајева и које принципе при том треба имати на уму.

1. Дате су једнакости $* + * = * - * = * \cdot * = ** : *$ и цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Уместо девет "звездица" распоредити девет датих цифара тако да се свака цифра употреби само једном и да све једнакости буду тачне.
2. Одредити све реалне бројеве x такве да је $2^x + 5^x = 641$.
3. Да ли постоје природни бројеви x и y такви да је $1! + ... + x! = y^2$.

Претпоставимо да се тражи скуп свих решења проблема $P(x, y, z, \ldots)$, где су $x, y, z, \ldots$ промењиве које су присутне у оквиру датог проблема P.

Нека је S непразан скуп који представља област дефинисаности датог проблема $P(x, y, z...)$, тј. скуп могућих решења проблема P.

Метод разликовања случајева заснива се на разлагању скупа S на неколико, али коначно много, коначних или бесконачних подскупова $S_1, S_2 \ldots S_k$ таквих да је $S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k = S$. Добро је ако су ти скупови дисјунктни, тј. $S_i \cap S_j = \varnothing$ за свако $i \neq j$ ($i, j \in$ N). Скупови S_1 , $S_2 \ldots S_k$ могу бити и недисјунктни, али је и тада најважније да они у потпуности прекривају скуп могућих решења S.

Метод разликовања случајева, решавање проблема $P(x, y, z, \ldots)$ своди на решавање проблема $P(x, y, z, \ldots)$ у сваком од скупова $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Нека су $R_1, R_2 \ldots R_k$ скупови решења проблема $P(x, y, z, \ldots)$, редом у скуповима $S_1, S_2 \ldots S_k$ (при чему неки од скупова $R_1, R_2 \ldots R_k$ могу бити и празни). Тада је скуп решења R проблема $P(x, y, z, \ldots)$ унија скупова решења $R_1, R_2, \ldots, R_k$, тј. $R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_k$.

То је можда дуготрајнији, али методолошки лакши посао, јер се скупови $S_1, S_2 \ldots S_k$ могу бирати тако да решавање проблема $P(x, y, z, \ldots)$ у њима буде што једноставније.

Метод разликовања случајева је погодан метод за решавање скоро свих врста математичких проблема, али моћ методе не би требало прецењивати, јер и она попут других метода садржи извесне креативне потезе, тј. кретања у правцу решења која су резултат математичке интуиције, сагледавања проблема на сасвим други начин и често производње нових и оригиналних идеја.

Конкретно, поставља се питање: "Како раздвојити случајеве?"

Раздвајање случајева и јесте највећи проблем приликом примене методе разликовања случајева јер се не може унапред одредити како разбијати скуп S. Међутим, из приказаних примера и досадашњег разматрања, искуствено се могу формулисати следећи методолошки принципи:

1. При раздвајању случајева, скуп потенцијалних решења, тј. скуп S у потпуности се прекрива са коначно много, коначних или бесконачних (по могућности дисјунктних)

подскупова S_1, S_2, … , $S_к$ таквих да је $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_к = S$ (принцип потпуности). На тај начин се избегава могућност да било које потенцијално решење буде изостављено.

2. За метод разликовања случајева нарочито су повољне две могућности:

(а) Када је $R_i = \varnothing$, тј. када у одабраном подскупу S_i ($1 \le i \le к$) домена S дати проблем $P(x, y, z, \ldots) = 0$ нема ниједно решење и

(б) Када је $R_j = S_j$, тј у одабраном подскупу S_j ($1 \le j \le к$) домена S дати проблем $P(x, y, \ldots)$ увек има решења.

Зато при разликовању случајева треба уочити што више подскупова који задовољавају услове (а) или (б), а у осталим подскуповима тражити најпродуктивнији поступак за решавање датог проблема P.

3. Приликом разликовања случајева и прекривања скупа потенцијалних решења дисјунктним подскуповима (кад год је то плодотворно) користити логична разбијања скупа S. У теорији бројева најчешће се скуп целих бројева или неки његов подскуп, разбија: на парне и непарне; на негативне, нулу и позитивне; на класе еквиваленција по одређеном модулу, … У геометрији се посматра скуп тачака унутар и изван круга, колинеаран и неколинеаран положај тачака ... (принцип природности).

4. Метод разликовања случајева заснива се на примени већ познатих математичких тврђења (Питагорине теореме, познатих неједнакости, …) које се као случајеви јављају у решавању проблема P (принцип примене).

Метод разликовања случајева није свемогућ, нити универзалан, али може бити веома користан у решавању многих проблема без обзира да ли су они алгебарски, геометријски, комбинаторни ....

При том, принцип 2(а) је од нарочитог значаја, јер он служи за елиминацију случајева када проблем нема решења, те се на тај начин скуп потенцијалних решења своди на неку од својих рестрикција. Ово је и примарно методолошко упутство које указује на први корак у раздвајању случајева, а он је свођење скупа могућих решења на што мање подскупова.

4. Дат јер једнакокраки троугао троугао ABC ($AC = BC$) и тачка М на страници BC. Дуж AM дели дати једнакокраки троугао на два једанкокрака троугла. Одредити углове троугла ABC.

5. Одредити све двоцифрене бројеве који су једнаки збиру квадрата своје цифре десетица и кубу цифре јединица.

6. Одредити колико има парова (p, m), где је p прост, а m цео број таквих да је и разломак $\dfrac{m^3 - pm + 1}{m^2 + pm + 2}$ цео број.

7. На семинару математичара у Новом Саду има n учесника. Доказати да постоје бар два учесника семинара који међу учесницима скупа имају исти број познаника.

8. Нека су A, B и C тачке у равни такве да за сваку тачку M те равни испуњен бар један од два услова: $AM \le BM$ или $AM \le CM$. Одредити међусобни положај тачака A, B и C.

9. Ако су a и b мерни бројеви катета, а c мерни број хипотенузе правоуглог троугла, одредити све вредности природног броја n тако да је $a^n + b^n < c^n$.

5.5. МЕТОД СМЕНЕ

Метод смене у решавању математичких проблема састоји се у томе да се неке математичке величине или објекти замене себи идентичним али у једноставнијем запису. Код решавања система једначина метод смене се састоји у томе да се вредност једне непознате израчуна у функцији друге непознате из једне једначине и потом замени у другу једначину и на тај начин систем једначина сведе на решавање једне линеарне једначине са једном непознатом.

Наводимо већ поменуте примере и неке нове који илуструју како се метод смене може користити у основној школи, с обзиром да је у средњој школи метод смене много значајнији и много се чешће користи:

1. Решити систем једначина: $x = 2y + 3$, $3x - 2y = 13$.

2. Решити једначину: $\frac{x+1}{2010} + \frac{x+2}{2011} + \frac{x+3}{2012} = \frac{x+4}{2013} + \frac{x+5}{2014} + \frac{x+6}{2015}$.

3. За коју вредност реалног броја x израз $A = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ има најмању вредност и колика је та вредност?

4. Доказати неједнакост: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

5. Одредити све целе бројеве x и y тако да задовољавају једначину $x^4 + y^4 = 6x^2 + 14y^2 - 53$.

****

РАДИОНИЦА 2.

1. У просторији постоји 2015 неупаљених сијалица и 2015 прекидача нумерисаних бројевима од 1 до 2015. Први дечак притисне сваки прекидач. Други дечак притисне сваки други прекидач, дакле прекидаче 2, 4, 6, ... 2012, 2014. Трећи дечак притисне сваки трећи прекида, дакле прекидаче 3, 6, 9, ... 2010, 2013. Четврти дечак притисне сваки четврти прекидач, дакле прекидаче 4, 8, 12, ... 2008, 2012. И тако редом. Предпоследњи дечак притисне само прекидач број 2014, а последњи дечак само прекидач 2015. Које сијалице су после овако изведених „операција“ остале упаљене, а које угашене?

2. Решити једначину: $\frac{x+1}{2010} + \frac{x+2}{2011} + \frac{x+3}{2012} = \frac{x+4}{2013} + \frac{x+5}{2014} + \frac{x+6}{2015}$.

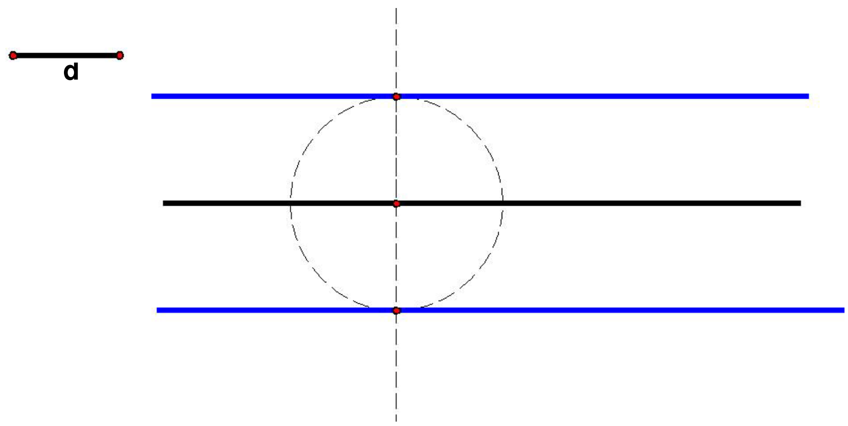
3. На табли је редом написано првих 2015 природних бројева. У сваком кораку бришу се два произвољна броја, а уписује се апсолутна вредност њихове разлике. Да ли је могуће да после 2014 корака на табли остане написан број 1?

5.6. МЕТОД ГЕОМЕТРИЈСКИХ МЕСТА ТАЧАКА

Геометријско место тачака је скуп свих тачака равни које задовољавају неки услов.

Основна ГМТ:

- o Геометријско место тачака једнако удаљених од две дате тачке A и B
- o Геометријско место тачака удаљених за константну даљину d од дате тачке
- O o Геометријско место тачака удљених за d од дате праве



- o Геометријско место тачака удаљених за d од дате кружнице k (O , r)
- o Геометријско место тачака подједнако удаљених од две дате праве
- o Геометријско место тачака под којим се дата дуж види под правим углом
- o Геометријско место тачака под којим се дата дуж види под углом α
- o Геометријско место тачака из којих се кружница види под углом α

Коришћењем *метода геометријских места тачака* или *методе пресека* може се решити велика група проблема који се односе на конструкције неких геометријских фигура са задатим својствима.

Задаци

1. Конструисати тругао *ABC* ако су познати његови елементи: a , b , h_c .

2. Конструисати троугао *ABC* ако је дата његова страница a и висине h_a и h_b . 3.

Конструисати троугао *ABC* ако су дати следећи елементи: .

4. У унутрашњости датог троугла конструисати тачку из које се свака његова страница види под подударним углом.

5. Конструисати троугао *ABC* ако су дати следећи елементи: , ,

5.7. МЕТОД ПОМОЋНИХ ФИГУРА

Приликом решавања планиметријских задатака, када нацртамо скицу са свим задатим елементима, често имамо утисак да није задат довољан број елемената за налажење решења. У овим ситуацијама покушавамо да доцртавањем на нових фигура, дужи, троуглова, четвороуглова, ..., уочимо нове везе и односе који ће нас довести до крајњег решења.

Помоћна фигура се конструише на основу познатих елемената, продужавањем или скраћивањем неке дужи, повлачењем паралелних или нормалних правих, или доцртавањем других помоћних геометријских објеката.

У наредним примерима до решења задатка се долази доцртавањем помоћних фигура. Други задатак - предложен на Савезном такмичењу за ученике I разреда редњих школа (1985), и VII разреда основних школа (1994), пример је задатка који се може решити на неколико различитих начина методом помоћних фигура.

1. Нека су a, b и c дужине страница троугла и t_c дужина тежишне дужи повучене из темена C.

   Доказати да важи неједнакост: $tc < \frac{a+b}{2}$.

2. Нека је у унутрашњости квадрата *ABCD* дата тачка *P* таква да је угао *PAB* једнак углу *ABP* и оба имају меру 15˚. Доказати да је троугао *PCD* једнакостраничан.

3. Нека је четвороугао *ABCD* паралелограм. Тачка *M* је средиште странице *BC*, а тачка *P* је подножје нормале из темена *D* на праву *AM*. Доказати да је *CP*=*AB*.

4. У једнакокраком троуглу *ABC* углови на основици *AB* су једнаки 40˚. Симетрала угла *BAC* сече страницу *BC* у тачки *D*. Доказати да је *AD*+*DC*=*AB*.

5. Нека тачка *E* припада страници *AB* квадрата *ABCD*. Симетрала угла *CDE* сече страницу *BC* у тачки *K*. Доказати да важи једнакост *AE*+*KC*=*DE*.

6. Ако је *CD* висина над хипотенузом *AB* правоуглог троугла *ABC* и *M* и *N* средишта дужи *CD* и *BD*, доказати да је AM $\perp$ CN.

7. У једнакокраком троуглу *ABC* углови на основици *AB* су једнаки 40˚. У троуглу је изабрана тачка *M*, таква да је угао *MAB* једнак 10˚, а угао *MBA* је једнак 20˚. Одреди величину угла *CMB*.

8. У квадрату *ABCD* је дата тачка *P*, таква да је *AP* : *BP* : *CP* = 1 : 2 : 3. Одреди угао *APB*.

9. У једнакокраком троуглу *ABC* са основицом *AB*, угао при врху је једнак 106˚. На осбовици *AB* је дата тачка *D* таква да је угао *CAD* једнак 21˚. Доказати да је

5.8. МЕТОД СЛИЧНОСТИ

Овај метод користи особине сличности равних ликова. Често се примењује у геометрији у доказним задацима, али не треба занемарити ни његову улогу у конструкцијама, где може дати решење у слуqајевима где друге методе не помажу или може дати једноставније решење у случајевима где друге методе дају компликовано решење.

Следе задаци који илуструју примену сличности у конструктивним задацима.

1. Конструисати троугао ABC ако су дати $\angle BAC$, $\angle CBA$ и дужна висине из темена C.
2. Конструисати троугао ABC ако су дати $\angle BAC$, однос $AC : AB = 3 : 4$ и дужина тежишне линије из темена A.
3. Конструисати квадрат ако је дата дужина растојања од темена до средишта наспрамне странице.
4. Ван датог круга k дата је тачка M. Кроз тачку M конструисати сечицу s, ако она сече круг k у тачкама A и B тако да је $MA = AB$.
5. Ван датог круга k дата је тачка M. Конструисати сечицу s кроз тачку M, тако да она сече круг к у тачкама A и B и при том је $MA : AB = 2 : 3$.
6. Кроз пресек двају кругова конструисати сечицу, тако да она са једним кругом одређује тетиву која је два пута дужа од тетиве коју одређује са другим кругом.
7. У дати троугао ABC уписати правоугаоник $KLMN$ такав да $K, L \in AB$, $M \in BC$, $N \in AC$ и да је дужина дијагонале тог правоугаоника једнака d.

5.9. МЕТОД ПЛАНИМЕТРИЈСКО – РАЧУНСКЕ АНАЛИЗЕ

1.Дате су дужи a, *b* и *c*. Конструисати дужи *a*) $x = a^2 \sqrt{}$; *b*) $y = \sqrt{}$

c) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; *b*) $y = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ *a*) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; *b*) $y = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2. Конструисати квадрат чија површина једнака збиру (разлици): а) површина два дата квадрата; b) три дата квадрата.

3. Конструисати једнакостранични троугао чија је површина једнака разлици површина два дата једнакостранична троугла.

4. Над страницама једнакостраничног троугла странице а конструисани су са спољне стране квадрати и добијена слободна темена повезана у многоугао. Израчунати обим и површину тако добијеног многоугла.

5. Над страницама правилног шестоугла странице *a* конструисани су са спољње стране квадрати и добијена слободна темена повезана у многоугао. Израчунати обим и површину тако добијеног многоугла.

6. Ако су *m, n* и *r* мерни бројеви дужина трију датих дужи , конструисати једнакокрако-правоугли троугао коме је хипотенуза дуж $x = \sqrt{m^2 + n^2 - r^2}$.

7. Дат је правоугаоник чије су странице *a* и *b*. Конструиши једнакостранични троугао чија је површина једнака површини датог правоугаоника.

8. Над страницама правоуглог троугла чије су катете *a* и *b* конструисани су са спољње стране квадрати и добијена слободна темена повезана у шестоугао. Израчунати површину тако добијеног шестоугла у функцији од *a* и *b* ?

9. Хипотенузина висина дели хипотенузу на два одсечка чије су дужине *p* и *q*. Доказати да је дужина хипотенузине висине једнака $\sqrt{pq}$.

10. Дат је правоугаоник чије су странице *a* и *b*. Конструисати квадрат који има површину једнаку површини датог правоугаоника.

11. Конструиши квадрат чија је површина једнака површини једнакостраничног троугла странице *a* и конструиши једнакостранични троугао чија је површина једнака површини квадрата дате странице *x*.

12. Конструисати једнакокрако-правоугли троугао чија је површина једнаке збиру површинама два дата: а) једнакокрако правоугла троугла ; b) квадрата ; c) једнакостранична троугла.

13. Дат је петоугао ABCDE и четвороугао MNPQ. Конструисати једнакостранични троугао чија је површина једнака збиру површина петоугла и четвороугла.

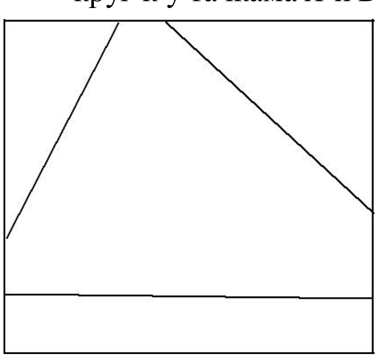
5.10. НЕСТАНДАРДНЕ ГЕОМЕТРИЈСКЕ КОНСТРУКЦИЈЕ

1. Дати су тачка A и праве *m* и *n* које се секу ван цртежа у тачки (B) (тачку B зовемо недостижна тачка). Конструисати праву A(B).
2. Кроз дату недостижну тачку (M) конструисати праву нормалну на дату праву p.
3. Кроз дату недостижну тачку (M) конструисати праву паралелну датој правој p.
4. Конструисати симетралу датог угла p(O)q.
5. Конструисати средиште дате дужи A(B).
6. Конструисати значајне тачке троугла AB(C).
7. Конструисати средиште странице (B)(C) датог троугла A(B)(C).
8. Конструисати тежиште датог троугла (A)(B)C.
9. Конструисати ортоцентар датог троугла (A)(B)C.
10. Конструисати круг уписан у дати троугао (A)(B)C.
11. Конструисати круг описан око троугла A(B)(C), ако је средиште странице (B)(Ц) на цртежу.
12. Конструисати ортоцентар и центар уписаног круга датог троугла (A)(B)(C).
13. Конструисати троугао ако су задата два његова темена A и B и: а) тежиште T; б) ортоцентар H; в) центар уписаног круга S.
14. Конструисти троугао ABC, ако су дате тачке A', B', C' подножја висина из темена A, B и C.
15. Конструисати троугао ABC, ако су дате тачке A и C и тачка M у којој симетрала угла ACB сече круг описан око троугла ABC.
16. Тачке P, Q, R и S су редом тачке на страницама AB, BC, CD и DA квадрата ABCD. Реконструиши квадрат ABCD ако су дате тачке P, Q, R и S.

****

РАДИОНИЦА 3.

1. Ван датог круга *k* дата је тачка *M*. Конструисати сечицу *s* кроз тачку *M*, тако да она сече круг к у тачкама *A* и *B* и при том је $MA : AB = 2 : 3$.

(A) 

2. Хипотенузина висина дели хипотенузу на одсечке дужина *p* и *q*. Израчунати обим и површину правоуглог троугла у функцији *p* и *q*.
3. Сва три темена троугла ABC у недостижна. Одредити тежиште троугла (A)(B)(C).
4. Тачке P, Q, R и S су редом тачке на страницама AB, BC, CD и DA квадрата ABCD. Реконструиши квадрат ABCD ако су дате тачке P, Q, R и S.

5.11. КОМБИНАТОРНИ МЕТОДИ

Комбинаторика је математичка дисциплина која се бави распоредима елемената неких скупова и пребројавањем тих распореда, као и проблемима постојања и конструкције одређених објеката са задатим особинама.

Најчешћа питања која нас асоцирају на комбинаторику, а врло су присутна и у свакодневној комуникацији су: Колико има бројева са неким својством? На колико начина може? Колико различитих могућности постоји за неки процес? Да ли је могуће? Итд.

Презентујемо четири основна комбинаторна принципа на којима почивају пребројавања:

- **Принцип једнакости**

Нека су A и B два непразна скупа. Ако постоји бијекција $f: A \to B$, онда је $|A| = |B|$

Пример 1. Дат је низ бројева 5, 9, 13, 17, ..., 2013, 2017. Колико чланова има овај низ?

- **Принцип производа**

Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ непразни и коначни скупови тада је

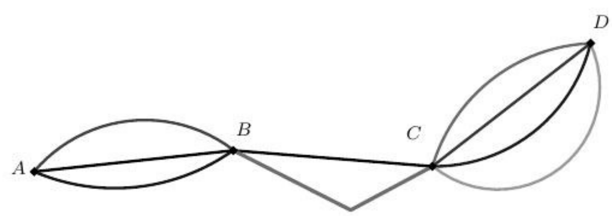
$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

Пример 2. Из града A у град B воде 3 пута, из града B у град C воде два пута и из града C у град D воде 4 пута. На колико разлучитих начина се може стићи:

а) из града A у град B?

б) из града A у град C идући кроз град B;

ц) из града A у град D идући кроз градова B и C, и без враћања у град кроз којих се прошло?



- **Принцип збира**

Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ дисјунктни и коначни скупови, тада је

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Пример 3. Колико има четвороцифрених природних бројева дељивих са 5?

Пример 4. Колико има четвороцифрених природних бројева који у свом декадном запису садрже бар једну цифру 0?

- **Принцип укључења – искључења**

Нека су A, B и $A \cap B$ непразни скупови. Тада је $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Уопштено, за p скупова $A_1, A_2, \dots, A_p$ је:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p| =$$

$$= \sum_{1 \le i \le p} |A_i| - \sum_{1 \le i_1, i_2 \le p} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \ldots + (-1)^{p-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p|$$

Пример 5. Колико има природних бројева мањих или једнаких 1000 који нису дељиви ни са 2, ни са 3 ни са 5?

Задаци

1. Колико има шестоцифрених природних бројева код којих је производ цифара непаран број?
2. На једној правој је дато 10 тачака, а на другој паралелној са њом дато је 11 тачака. Колико је: а) одређено троуглова;

   б) одређено четвороуглова, са теменима у тим тачкама?
2. Колико има природних бројева чије су све цифре различите и чији је збир цифара једнак 45?
3. На колико различитих начина може тећи ток одбојкашке утакмице, ако је познато да она траје докле један од два тима не освоји 3 сета?

5.12. ДИРИХЛЕОВ МЕТОД

У својој оригиналној верзији Дирихлеов принцип разматра следећи проблем: претпоставимо да је јато голубова долетело у голубарник, ако има више голубова него кућица у голубарнику, тада ће се бар у једној кућици наћи бар два голуба. Због овога се на енглеском говорном подручју Дирихлеов принцип назива *The Pigeonhole Principle*. Наравно, овај принцип је шире примењљив.

Сматра се да је Дирихле (G. L. Dirichlet (1805 – 1859) – немачки математичар) први користио ову идеју у неким проблемима из теорије бројева.

Са решавањем задатака применом Дирихлеовог принципа ученици се сусрећу веома рано, већ на часовима додатне наставе у петом разреду основне школе. Сам принцип је доста јасан и разумљив, било да се ради о слабој форми Дирихлеовог принципа, (ако је предмета распоређено у кутија онда ће бар једна кутија садржати бар два предмета) или о јакој форми (ако је предмета распоређено у кутија, тада бар једна кутија саджи бар предмета)

Суштина проблема јесте како дефинисати „кутије“ у које ћемо распоређивати „предмете“.
Следи неколико примера задатака који се решавају помоћу Дирихлеовог принципа.

1. Нека је X скуп од особа. Доказати да постоје бар двије особе из X које имају исти број познаника у X. (Претпоставља се да је познанство симетрична релација.)
2. Доказати да за сваки природан број постоји број облика 11 . . . 100 ... 0 који је дељив са .
3. Доказати да међу било којих 13 узастопних природних бројева постоји број чији је збир цифара дељив са 7. Доказати да тврђење не важи ако се број 13 замени бројем 12.
4. Доказати да сваки конвексни 21–угао има две дијагонале које заклапају угао не већи од 1°.
5. Унутар квадрата дужине странице 1 дате су 33 тачке, од којих никоје три нису колинеарне. Доказати да у датом скупу тачака постоје 3, тако да обим троугла који оне одређују није већи од 1.
6. Дат је скуп који садржи 7 природних бројева од којих сви дају различите остатке при дељењуса 20. Доказати да се међу тим бројевима могу изабрати четири броја и тако да је број дељив са 20.
7. Унутар квадрата дужине странице 1 дато је неколико кружница, тако да је збир обима тих кружница једнак 10 . Доказати да постоји права која сече бар четири од тих кружница.
8. У кругу полупречника 1 повучено је неколико тетива. Збир дужина свих тих тетива већи је од 7π. Доказати да постоји пречник тог круга који сече бар осам тетива.
9. Свака од 9 правих деели квадрат на два четвороугла чије се повшине односе као 2 : 3. Доказати да постоје три од тих девет правих које се секу у једној тачки.

5.13. МЕТОД ИНВАРИЈАНТНОСТИ

Особина (својство) математичког објекта која се не мења при некој трансформацији зове се **инваријанта** те трансформације. Обично се метод инваријантности користи за решавање задатака у којима се жели испитати може ли се вишеструком применом неке задате трансформације од математичког објекта (стања) X добити неки други математички објекат (стање) Y . Уколико се нађе пример који показује како се то може учинити, тј. колико пута и како применити задату тренсформацију, онда је одговор позитиван. Ако се пронађе инваријанта те трансформације која нема исте вредности за та два објекта, то значи да се применама те трансформације не може од X добити Y и одговор је негативан.

Метод инваријантности се илуструје следећим задацима:

1. Десет другара стоји у врсти. Дозвољ ено је да промене места она двојица која имају заједниqког суседа. Може ли се десити да се при тим премештањима сви пореађју у врсту у обрнутом редоследу?
2. Од бројева 1, 2, 3, 4, 5 и 7 бирају се три броја и повећавају за по 1. Може ли се понављањем те операције добити да сви бројеви буду једнаки?
3. Пера је разрезао лист папира на 7 делова, а затим је неке од тих делова разрезао на нових7, и тако редом. Да ли је могуће да је у неком тренутку имао испред себе 2015 делова папира?
4. Броју 2015 додат је његов збир цифара, затим је том броју додат његов збир цифара, и тако редом. Да ли ће се овим поступком добити број 201520152015?
5. У три кесе се редом налази 3, 13 и 37 кликера. Дозвољено је у било коју кесу додати или одузети онолико кликера колико се у збиру налази у друге две кесе. Може ли се постићи да у једној кеси не буде кликера?
6. На столу се налази 8 чаша. Њих 3 су окренуте дном навише. Дозвољено је истовременопревpнути било које 4 чаше. Може ли се постићи да све чаше буду правилно постављене?
7. Уређени пар целих бројева (m, n) можемо трансформисати у урени пар (n, m), $(m-n, n)$ или $(m + 2n, n)$. Може ли се од уређеног пара (21,15) добити уређени пар (12,20)?
8. Из квадрата 100 × 100 подељеног на 10000 јединичних квадратића „изрезан" је један квадратић. Може ли се преостали део квадрата прекрити са 9999 једнакокрако-правоуглих троуглова чије су хипотенузе дужине 2, тако да се хипотенузе троуглова поклапају са ивицама квадратића, а катете са дијагоналама квадратића?
9. Квадрат 10 × 10 подељен је на 100 јединичних квадратића. Бира се 9 квадратића и обоји неком бојом. Затим се у сваком кораку обоје сви квадратићи који имају бар по два суседна квадратића обојена. Да ли се може направити такав избор почетних 9 квадратића да након неколико корака цео квадрат буде обојен?

5.14. МЕТОДЕ „УОЧИ КРАЈЊЕГ“

Један број задатака у настави математике могуће је решити методом, у математичкој литературе, познатој као метода “уочи крајњег”. Метод “уочи кракњег” подразумева да се у датом скупу елемената одреди највећи или најмањи, најближи или најдаљи ... једном речју „крајњи елеменат“ (дуж, угао, број, ...) и да се полазећи од његових особина и коришћењем услова задатка конструише математички модел чија анализа недвосмислено потврдјује својство које се тражи или доказује.

Наводимо неколико карактеристичних примера који на најбољи могући начин илуструју необичну математичку методу „уочи крајњег“:

1. У равни је дато 2015 тачака таквих да за сваке три тачке X. Y и Z датог скупа важе неједнакости: $XY < 1$ или $YZ <1$ или $ZX < 1$. Доказати да постоји круг полупречника 1 који садржи бар 1008 датих тачака.
2. На бесконачној шаховској табли написани су природни бројеви. Познато је да је сваки број на табли једнак аритметичкој средини четири броја која су написана лево, десно, изнад и испод њега. Каква законитост влада међу написаним бројевима?
3. У равни је дато 2015 тачака, тако да је површина ма ког троугла чија су темена међу датим тачкама мања од 1. Да ли постоји правоугаоник површине 4, такав да у потпуности прекрива све дате тачке.
4. Да ли се ма који конвексан многоугао површине 1 може прекрити правоугаоником површине 2?
5. Све странице троугла мање од 1. Одредити најмањи реалан број a, тако да је површина троугла мања од a.
6. Поља квадратне мреже n x n обојена су црном и белом бојом тако да је испуњен следећи услов: ако је неко поље обојено белом онда на хоризонтали и вертикали тог поља има укупно бар n црних поља. Колико је најмање поља обојено у црно?
7. Могу ли се природни бројеви од 1 до 12 распоредити по кружници тако да се суседни бројеви увек разликују за 2 или 3?
8. Ани и Бојани су дата два узастопна природна броја. Оне знају да су им дати узастопни бројеви, свака зна број који је њој дат, али не зна број који је дат другој девојчици. Оне су водиле следећи разговор. Ана каже Бојани: „Ја не знам твој број.” Бојана каже Ани: „ Ја не знам твој број.” Онда Ана каже Бојани: „ Ја сада знам твој број! Он је делилац броја 20.” Које бројеве имају Ана и Бојана?
9. Доказати да најмање једно од подножја нормала конструисаних из унутрашње тачке конвексног многоугла на праве одређене његовим страницама припада одговарајућој страници.
10. У равни је дато n ($n \geq 3$) тачака са својством да ниједна права у тој равни не садржи тачно две од датих тачака. Доказати да су дате тачке колинеарне.

5.15. НЕКЕ МЕТОДЕ РЕШАВАЊА ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Диофантове једначине се решавају коришћењем различитих „алата“. Најчешће се изврше идентичне алгебарске трансформације тако да Диофантова једначина добије уобичајан облик $L = D$, при чему лева или десна страна једнакости има карактеристичну и релативно лако уочљиво својство. Једнакост има ту чаробну особину да сва својства леве стране једнакости има и десна страна једнакости (и обрнуто) и онда се раздвајањем случајева проблем разлаже на елементарне и решава коришћењем последње цифре, производа, количника, збира, неједнакости, (не)парности, дељивости, конгруенција ...

5.15.1. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПРОИЗВОДА

1. Доказати да ако су x и y природни бројеви и ако је $x \leq y$, онда једначина $xy + x + y = 2^{32}$ има само једно решење.
2. Одредити све природне бројеве n и све просте бројеве p такве да је $n^4 + n^2 + 1 = p$.
3. Ако су x, y и z цели бројеви онда једначина $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$ има бесконачно много решења. Доказати.
4. Одредити све природне бројеве који се не могу представити у облику збира неколико (најмање два) узастопна природна броја (Србија 1978.)

5.15.2. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ КОЛИЧНИКА

5. Одредити све целе бројеве x и y који задовољавају једначину $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$.
6. Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.
7. Да ли се првих 100 природних бројева могу поделити у три дисјунктне групе тако да је збир бројева прве групе дељив са 101, збир бројева друге групе дељив са 203, а збир бројева треће групе дељив са 304. (Србија 2001.)
8. Одредити све двоцифрене природне бројеве који су дељиви производом својих цифара.

5.15.3. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ЗБИРА

9. Одредити све целе бројеве x и y тако да задовољавају једначину $x^4 + y^4 = 6x^2 + 14y^2 - 53$.
10. Одредити све целе бројеве x и y тако да је: а) $x^2 - xy + y^2 = 1$.
    б) $x^2 - xy + y^2 = x + y$. (7. ММО 1941.)
11. Постоје ли цели бројеви a, b и c који задовољавају неједнакост $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$? (Мађарска 1965.)
12. У скупу природних бројева решити систем једначина $x + y = zt$, $z + t = xy$. (29. ММО 1966.)

5.15.4. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ НЕЈЕДНАКОСТИ

13. Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки збиру куба цифре десетица и квадрата цифре јединица.
14. Једначину $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ решити у скупу целих бројева.
15. Одредити све природне бројеве x и y који испуњавају једнакост $x^3 - y^3 = xy + 61$. (15. ССМО 1981.)
16. Одредити све природне бројеве који задовољавају једнакост $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$. (ДР Немачка 1974.)

5.15.5. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ

17. Одредити целе бројеве x и y такве да је $x^4 + y^4 = 333 \ldots 333$ (2015 тројки)
18. Марко је сабрао све природне бројеве од 1 до н и добио збир 1 234 567. Да ли је добијени збир тачан?
19. Постоји ли многоугао који има 9 876 дијагонала?
20. Одреди све целе бројеве x, y и z такве да је $4^x + 9^y = 11^z$.

5.15.6. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ (НЕ)ПАРНОСТИ

21. Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.
22. Доказати да једначина $x^2 - 4y^3 + 8z^4 = 3$ нема решења у скупу целих бројева.
23. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $19x^2 + 2 = y^2$?
24. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $2^x - 1 = y^2$.

5.15.7. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ДЕЉИВОСТИ

25. У скупу целих бројева решити једначину $3x^2 + 5y^2 = 345$.
26. Одредити све двоцифрене бројеве који су једнаки збиру квадрата цифре десетица и куба цифре јединица.
27. Да ли постоје цели бројеви x и y такви да је $x^3 + y^3 = 1977$? (Кијевска МО 1977.)
28. Производ природних бројева x и y је троцифрен број са једнаким цифрама, а њихов збир је двоцифрен број, такође са једнаким цифрама. Одредити све такве бројеве x и y.

5.15.8. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ КОНГРУЕНЦИЈА

29. Одредити све целе бројеве x и y, тако да је $2^x - 3^y = 7$.
30. Да ли једначина $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{14}^4 = 1599$ има решења у скупу целих бројева.
31. Одредити све просте бројеве p за које је $2p^4 - p^2 + 16$ потпун квадрат. (Србија 1992.)
32. Доказати да једначина $y^2 = x^5 - 4$ нема решења у скупу целих бројева. (БМО Кипар 1998.)

РАДИОНИЦА 4.

1. Уређени пар целих бројева (m, n) можемо трансформисати у урени пар (n, m), $(m-n, n)$ или $(m + 2n, n)$. Може ли се од уређеног пара (21,15) добити уређени пар (12,20)?

2. Свака од 9 правих деели квадрат на два четвороугла чије се повшине односе као 2 : 3. Доказати да постоје три од тих девет правих које се секу у једној тачки.

3. Ани и Бојани су дата два узастопна природна броја. Оне знају да су им дати узастопни бројеви, свака зна број који је њој дат, али не зна број који је дат другој девојчици. Оне су водиле следећи разговор. Ана каже Бојани: ,,Ја не знам твој број.'' Бојана каже Ани: ,, Ја не знам твој број.'' Онда Ана каже Бојани: ,, Ја сада знам твој број! Он је делилац броја 20.'' Које бројеве имају Ана и Бојана?

4. Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки збиру квадрата цифре јединица и куба цифре дестица.

6. ЛИТЕРАТУРА

[1.] Војислав Андрић, Решавање проблема методом разликовања случајева, Часопис "Математика" број 3/1981, Школска књига, Загреб, 1981.

[2.] Војислав Андрић, Диофантове једначине, Друштво математичара Србије, Ваљево, 2008.

[3.] Војислав Андрић, Математика X = 1236 Круг, Београд 2006

[4.] В.В. Прасолов , Задаци из планиметрије (2 део), Наука, Москва, 1986.

[5.] В.А. Гусев, А.И. Орлов, Д.Л. Розентал, Ваннаставне активности из математике, Просвешение, Москва, 1984.

[6.] Д.Л. Розентал, Правило крајњег // Квант 9/1988, Наука, Москва, 1988

[7.] Задаци са претходних такмичења „ Кенгур без граница”

[8.] Марица Прешић, Метода доказивања разликовањем случајева, Часопис "Математика" број 3/1979, Школска књига, Загреб, 1979.

[9.] Шефкет Арсланагић, Математика за надарене,Ријеч, Сарајево, 2004.

[10.] Здравко Курник, Посебне методе рјешавања математичких проблема, Елемент, Загреб, 2010.

[11.] Ђерђ Пољa, Како ћу ријешити математички задатак, Школска књига, Загреб 1966.

[12.] Ђерђ Пољa, Математичко откриће, Хрватско математичко друштво, Загреб 2003.

[13.] Ратко Тошић, Инваријанте; варијације на тему, Алеф, Нови Сад 1996.