ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА
У ОСНОВНИМ И СРЕДЊИМ ШКОЛАМА

др Милан Јовановић
Вељко Ћировић

Тема:

Комбинаторика у настави математике у основној и средњој школи

Београд, 11. 02. 2017.

Увод

Решавање комбинаторних и логичко-комбинаторних задатака у настави математике значајно утиче на развој стваралачког мишљења, креативности, систематичности и правилног логичког закључивања код ученика.

Теме из комбинаторике се експлицитно скоро и не изучавају у програму редовне наставе математике у основним школама, док су у наставним програмима математике у средњим школама заступљене. У програмима додатне наставе у основној и средњој школи комбинаторне теме заузимају значајно место.

Настава математике, бар кроз квалитетан додатни рад, може значајно да помогне да се код ученика подстакне развој вештина прављења квалитетних логичких анализа које су неопходне за живот у савременом друштву.

На овом семинару биће представљене неке значајне класе комбинаторних и логичко-комбинаторних проблема, као и методи за њихово решавање.

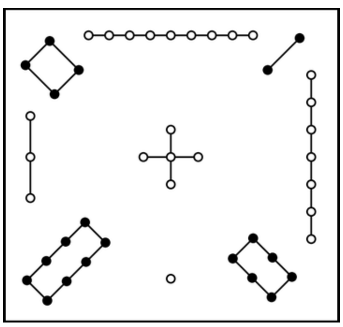
Историјски осврт о комбинаторици и комбинаторним идејама

Може се рећи да се комбинаторика, као грана математике, развија од седамнаестог века нове ере. Све до појаве рачунарских машина чинило се да се комбинаторика не развија у ритму осталих математичких дисциплина. Од тада она добија на значају, а комбинаторне методе данас имају веома озбиљне примене у статистици, теорији случајних процеса, математичком програмирању, информатици и уопште у прављењу планова за разне експерименте. А ту су и читава друга ,,пространства", каква је на пример, комбинаторна геометрија у којој је комбинаторика веома значајан фактор. Такође, представљања група, коначних геометрија, неасоцијативних алгебри, незамислива су без метода комбинаторике.

Ако би желели да се на кратко вратимо на почетак, једноставно је закључити да је све у математици почело бројањем неких објеката јер је људима постајало важно да нађу начин како да некој групи предмета придруже нешто што ће одсликавати неко њено квантитативно својство. У неким каснијим сегментима развоја поред бројања било је важно групе објеката и класификовати или на одређени начин комбиновати објекте из различитих група у неке пожељне конфигурације. Управо такви задаци временом су постали предмет комбинаторике.

Познато је да су међу предметима који су пре више од 3500 година остављени у пирамиди у Египту, у којој је сахрањен фараон Тутанкамон, нађени остаци табле са фигурама за стару игру *сенет*. Извесно је да се у то време ова игра играла правилима која ми не можемо прецизно знати, али за нас је корисно сазнање колико далеко историјски сежу подаци о томе када су људи први пут почели користити неке логичке, мисаоне, а самим тим и логичко-комбинаторне игре.

Један од првих фрагмената блиских комбинаторици, а који је забележен у кинеским изворима од пре 4000 година, говори да је њихов цар *Ју* запазио, на брегу поред реке *Лу*, свету корњачу на чијем оклопу су били насликани симболи са белим и црним кружићима за које се тврдило да представљају једноцифрене бројеве.



Одатле је настала табела бројева: $\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$.

Ако се детаљније позабавимо овом бројевном мрежом запазићемо да је збир бројева у сваком реду, свакој колони или дијагонали једнак 15. Стари Кинези су оваквим квадратима бројева придавали мистична и натприродна својства, па се тако данас свака квадратна мрежа бројева за чије чланове важи да је њихов збир у сваком реду, колони или дијагонали једнак, назива *магичним квадратом*.

Из старогрчке математике, због уништавања чувене александријске библиотеке и књига које би биле значајне за овај период, нема много конкретних података о њиховом бављењу комбинаториком, али неки исечци у виду изолованих података постоје и доприносе закључцима да су и стари Грци у свом бављењу математиком имали одређених комбинаторних идеја које су веома значајне у историјском контексту. Наиме, филозоф Ксенократ из 4. века пре н.е. бавио се пребројавањем слогова у речима. Стоик Крисип из 3. века пре н.е. веровао је да се из система од десет аксиома може извести више од милион закључака. А по Хипарховом мишљењу потврдних закључака се може извести 103 049 а одричних 310 952. Потпуно је непознато како су они долазили до ових бројева, а нејасна су и правила по којима су они вршили ова комбинаторна пребрајања, а која су по свему судећи била погрешна. Међутим, неке конкретне комбинаторне проблеме Грци су решавали без грешака. Аристотел је прецизно пребројао све трочлане силогизме, а његов ученик Аристоксен је прецизно бројао различите комбинације дугих и кратких слогове у песмама.

Негде од другог века пре н.е. почиње опадање науке у хеленистичким државама, а са њиме и криза самога друштва. Многи радови из тог времена били су заокупљени углавном мистичким својствима бројева. А после победе хришћанства ова идеја се задржала у примеру повезивања јеретика са бројем 666, који је сматран симболом Антихриста. Међутим, чак и тако бескорисне идеје и студије ипак су давале смернице даљег развоја математике.

У кризним временима комбинаториком су се занимали и астролози, које су занимали распореди и комбинације планета како би на основу знања о томе закључивали о људским судбинама. Астролог бен Езра је 1140. године пребројао комбинације од по 2, 3, итд. планета од њих 7. Он је тада знао да је број комбинација 3 планете од 7 једнак броју комбинација 4 планете од 7, што би ми савременим симболима записали са

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{4}.$$

Формулу за биномне коефицијенте увео је и доказао јеврејски математичар Леви бен Гершон (14. век).

$$C_k^n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Али пошто је рад остао непримећен у уском кругу образованих људи тог времена, формулу је у истом облику, почетком 17. века објавио француски математичар Пјер Херигон. Наравно, нотација обележавања није била иста као данас. Она се временом мењала и ,,осавремењавала”.

Ни у старим азијским цивилизацијама није се седело ,,скрштених руку”. У осмом веку наше ере почео је процват арапске науке. Они су превели на свој језик многа грчка достигнућа и из њих учили, и на основу тога у многим областима и надмашили саме Грке. Посебне резултате Арабљани су постизали у алгебри. Решавајући питања о корену дошли су до формуле за степен збира два броја. Постоје назнаке да је ту формулу знао и велики арапски математичар и песник Омар Хајам, који је живео у 11. и 12. веку наше ере. Арапски научници су знали и за важну особину биномних коефицијената

$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$$

Упоредо са Арапима рачунањем биномних коефицијената бавили су се и кинески математичари. Они су у 13. веку саставили једну од таблица са биномним коефицијентима. Комбинацијама су нарочито били заинтересовани и у Индији. Они су још у 2. веку пре н.е. знали бројеве C_k^n и то да им је сума једнака 2^n. У 12. веку индијски математичар Бхаскара, написао је књигу ,,Сиданта Широмани” у чијем је делу ,,Лилавати” писао и о проблемима комбинаторике. Писао је о пермутацијама и варијацијама и њиховој вези при рачунању. Дао је и правила за рачунање пермутација и комбинација неколико објеката, као и пермутација са понављањима. Арапска знања су касније продирала и у Европу, када су ови освојили Шпанију. Европа је била упозната са арапским достигнућима у алгебри и десетичним системом за рачунање. Знања која су нудили Арапи користио је и Фибоначи. Његова ангажовања за математику у том периоду била су јако значајна. Фибоначијев рекурентни запис којим се следећи члан низа изражава збиром претходна два био је важан замајац у развоју комбинаторике. Нешто касније је *метод рекурентних формула* добио место једног од најмоћнијих апарата за решавање неких комбинаторних проблема.

Морамо напоменути да комбинаторика, а са њом и вероватноћа, велику захвалност за своје постојање дугују коцкарским играма на срећу. Наравно, не само њима, већ и радовима великих математичара Паскала и Ферма, који су свако на свој начин учествовали у ударању савремених темеља ових дисциплина. Паскалов троугао се први пут појављеује у том облику у раду „*Трактат о аритметичком троуглу*" објављеном 1665. након његове смрти. Можда највећи посао, за то раздобље, урадио је Лајбниц својим делом „*Dissertatio de Artta Combinatoria*" из 1666. године. У њој се први пут подробно излаже о принципима комбинаторике и одговарајућим формулама. Лајбниц је истицао да жели да створи општи метод помоћу кога ће све истине до којих се долази размишљањем моћи да се добију и некаквим рачуном. Касније је комбинаторика била занимљива и Бернулију и Ојлеру, чијим је радовима и доприносима она само могла постајати све заокруженија и кориснија наука.

Формуле које комбинаторика данас користи уз целу савремену нотацију добила је у 19. веку, са формализацијом алгебарске симболике.

Комбинаторне и логичко-комбинаторне теме у наставним програмима

Задаци наставе математике, наведени у прописима који дефинишу наше образовање, су да ученици:

- **развијају логичко и апстрактно мишљење**;
- развијају способности јасног и прецизног изражавања и **коришћења основног математичко-логичког језика**;
- развијају способности одређивања и процене квантитативних величина и њиховог односа;
- разликују геометријске објекате и њихове узајамне односе и трансформације;
- разумеју функционалне зависности, њихово представљање и примену;
- **развијају систематичност, уредност, прецизност, темељност, истрајност, критичност у раду, креативност**;
- развијају радне навике и способности за самостални и групни рад; формирају систем вредности;
- стичу знања и вештине корисне за трансфер у друге предмете и развијају способности за правилно коришћење стручне литературе;
- **формирају свест о универзалности и примени математичког начина мишљења**;
- буду подстакнути за стручни развој и усавршавање у складу са индивидуалним способностима и потребама друштва;
- **развијају способности потребне за решавање проблема и нових ситуација у процесу рада и свакодневном животу**.

Наведени циљеви недвосмислено потврђују да су значајно стајалиште управо развој правилног логичког мишљења и закључивања, комбинаторних способности, систематичности и функционалног мишљења.

С тим у вези сматрамо да у постојећим наставним програмима посебно редовне наставе, није довољно места посвећено комбинаторници и сродним темама.

НАСТАВНИ ПРОГРАМ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ - ДОДАТНА НАСТАВА

- ТРЕЋИ РАЗРЕД

  Логичко-комбинаторни задаци. Пребројавање скупова бројева. Ребуси.

- ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

  Магични квадрати. Пребројавање скупова тачака, фигура и бројевних скупова. Проблеми пресипања. Задаци нумерације.

- ПЕТИ РАЗРЕД

  Пребројавање скупова тачака, фигура и бројевних скупова.

- ШЕСТИ РАЗРЕД

  Дирихлеов принцип. Логичко-комбинаторни проблеми.

- СЕДМИ РАЗРЕД

  Логичко-комбинаторни задаци. Пребројавања. Графови.

- ОСМИ РАЗРЕД

  Логичко-комбинаторни задаци. Графови. Комбинаторика на шаховској табли. Инваријанте.

НАСТАВНИ ПРОГРАМ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ - РЕДОВНА НАСТАВА

- ПРВИ РАЗРЕД

  Логика и скупови. Елементи комбинаторике (пребројавање коначних скупова: правило збира и производа).

- ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

  Основна правила комбинаторике. Варијације, пермутације; комбинације (без понављања). Биномни образац. Вероватноћа и статистика.

НАСТАВНИ ПРОГРАМ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ - ДОДАТНА НАСТАВА

- ПРВИ РАЗРЕД

  Елементи топологије. Графови и неке њихове примене. Тополошке инваријанте. Род површи. Ојлерова формула и неке њене примене. Историјски осврт. Логички и комбинаторни задаци. Разни начини решавања логичких задатака (укључујући и апарат исказне алгебре). Пребројавање коначних скупова.

- ДРУГИ РАЗРЕД

  Логичко-комбинаторни и слични нестандардни задаци (Дирихлеов принцип, комбинаторна геометрија и др.).

- ТРЕЋИ РАЗРЕД

  Логичко-комбинаторни задаци. Разни нестандардни и "главоломни" задаци (проблеми куглица, математичко-шаховске "главоломије", разне математичке игре, криптографија и др.). Математичка индукција, рекурентне формуле и примене.

- ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

  Елементи комбинаторике и вероватноће. Основна правила комбинаторике. Варијације, пермутације, комбинације. Биномни образац и неке његове примене. Простије функције генератрисе у комбинаторици. Вероватноћа и њено израчунавање, условна вероватноћа, геометријска вероватноћа. Бернулијева шема и др. Елементи теорије игара. Појам игре и стратегије игре. Цена игре, матрица игре. Основна теорема теорије игара.

Варијације, пермутације, комбинације

Варијације без понављања

Дефиниција 1. *k-варијација без понављања елемената скупа A је уређена k-торка различитих елемената скупа A.*

Пример 1. *Написати све 2-варијације без понављања елемената скупа $\{a, b, c\}$.*

Теорема 1. *Број k-варијација без понављања елемената скупа који има n елемената једнак је $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$.*

Варијације са понављањем

Дефиниција 2. *k-варијација са понављањем елемената скупа A је уређена k-торка елемената скупа A.*

Пример 2. *Написати све 3-варијације са понављањем елемената скупа $\{a, b\}$.*

Теорема 2. *Број k-варијација са понављањем елемената скупа који има n елемената једнак је n^k.*

Пермутације

Дефиниција 3. *Пермутација скупа A који има n елемената је n-варијација без понављања елемената скупа A.*

Пример 3. *Написати све пермутације скупа $\{a, b, c\}$.*

Теорема 3. *Број пермутација скупа који има n елемената једнак је $n!$.*

Пермутације са понављањем

Дефиниција 4. *Дат је скуп $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и на њему строги линеарни поредак $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Нека су $k_1, k_2, \dots, k_n$ природни бројеви и $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$. Пермутација са понављањем скупа A типа $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ је уређена m-торка елемената скупа A, у којој се сваки елемент a_j појављују тачно k_j пута.*

Пример 4. *Написати све пермутације са понављањем скупа $\{a, b, c\}$ типа $(1, 2, 1)$.*

Теорема 4. *Број пермутација са понављањем типа $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ скупа који има n елемената једнак је $\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}$.*

Комбинације

Дефиниција 5. *k-комбинација елемената скупа A који има n елемената, где је $k \leq n$, је подскуп скупа A који има k елемената.*

Пример 5. *Написати све 2-комбинације елемената скупа $\{a, b, c, d\}$.*

Теорема 5. *Број k-комбинација елемената скупа који има n елемената једнак је $\binom{n}{k}$.*

Комбинације са понављањем

Дефиниција 6. *Дат је скуп $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и на њему строги линеарни поредак $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. k-комбинација са понављањем елемената скупа A је уређена k-торка $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ елемената скупа A, за које важи да је $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k$.*

Пример 6. *Написати све 3-комбинације са понављањем елемената скупа* $\{a, b, c\}$.

Теорема 6. *Број k-комбинација са понављањем елемената скупа који има n елемената једнак је* $\binom{k+n-1}{k}$.

Теорема 7. *Број k-комбинација са понављањем елемената скупа који има n елемената, а у којима се сваки елемент тог скупа појављује бар једном, једнак је* $\binom{k-1}{n-1}$.

Задаци

1. На колико начина може 10 особа да седне у позоришту у један ред који има 20 седишта?
2. У једној земљи не постоје два становника са истим распоредом зуба. Колико највише становника живи у тој земљи?
3. На колико начина може бити оцењен ученик ако се оцењује из 12 предмета?
4. Списак чланова оркестра може да се направи на 5040 начина. Колико чланова има тај оркестар?
5. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ у којима је цифра 3 испред цифре 2?
6. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ у којима су цифре 2 и 3 једна поред друге?
7. Краљ се налази у доњем левом углу шаховске табле. На колико начина он може стићи до горњег десног угла ако може да се креће само удесно и нагоре?
8. На колико начина четири особе могу да поделе 20 различитих књига, тако да особа А добије 3, особа Б 4, особа Ц 6, а особа Д 7 књига?
9. На колико начина четири особе могу да поделе 20 различитих књига, тако да једна добије 3, друга 4, трећа 6, а четврта 7 књига?
10. Колико има четвороцифрених бројева чије цифре гледано слева на десно чине растући низ?
11. Колико има четвороцифрених бројева чије цифре гледано слева на десно чине неопадајући низ?
12. На колико начина од 8 врста разгледница туриста може купити 3 не обавезно различите разгледнице?

Принципи пребројавања

Принцип једнакости

Нека су A и B два непразна скупа. Ако постоји бијекција (обострано једнозначно придруживање) $f : A \to B$, онда је $\mid A \mid = \mid B \mid$.

Пример 7. *Дат је низ бројева 5, 9, 13, 17, ..., 2013, 2017. Колико чланова има овај низ?*

Принцип производа

Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ непразни и коначни скупови тада је

$$\mid A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \mid = \mid A_1 \mid \cdot \mid A_2 \mid \cdot \ldots \cdot \mid A_n \mid .$$

Пример 8. *Из града A у град B воде 3 пута, из града B у град C два пута, а из града C у град D 4 пута. На колико разлучитих начина се може стићи:*
а) из града A у град B?
б) из града A у град C идући кроз град B?
ц) из града A у град D идући кроз градове B и C, и без враћања у град кроз који се прошло?

Принцип збира

Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дисјунктни и коначни скупови, тада је

$$\mid A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \mid = \mid A_1 \mid + \mid A_2 \mid + \ldots + \mid A_n \mid .$$

Пример 9. *Колико има четвороцифрених природних бројева дељивих са 5?*

Пример 10. *Колико има четвороцифрених природних бројева који у свом декадном запису садрже бар једну цифру 0?*

Задаци

1. Колико има петоцифрених природних бројева код којих су бар две цифре једнаке?
2. На једној правој је дато m тачака, а на другој паралелној са њом дато је n тачака. Колико је
   а) одређено троуглова;
   б) одређено четвороуглова;

   са теменима у тим тачкама?
3. Извести формулу за број делилаца произвољног природног броја n представљеног у канонској факторизацији.
4. Три девојчице треба да поделе 4 лутке, 9 машница и 10 оловки, тако да свака од њих добије бар по један предмет од сваког. На колико различитих начина то могу урадити?
5. На колико начина се могу поређати у низ бројеви $1, 2, \ldots, 3n$ тако да се сваки број налази на месту чији редни број при дељењу са 3 даје исти остатак као и сам тај број.
6. Свака страница квадрата подељена је тачкама на n дужи. Колико има троуглова чија су темена деоне тачке, ако темена квадрата нису деоне тачке?

Принцип укључивања и искључивања

За коначне скупове $A_1, A_2, \ldots, A_n$ важи да је

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Осим за израчунавање броја елемената уније коначних скупова, ова формула се може искористити и за израчунавање броја елемената пресека коначних скупова.

Задаци

1. Колико има природних бројева мањих или једнаких 1000 који нису дељиви ни са 2, ни са 3, ни са 5?
2. Колико има шестоцифрених бројева у чијем запису учествују три различите цифре?
3. Колико има пермутација $a_1 a_2 \ldots a_n$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да за сваки број $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи $a_j \neq j$?
4. Пијани поштар треба да однесе 10 писама на 10 адреса. Не гледајући која је адреса на којој коверти он је разделио сва писма. На колико начина је он то могао урадити, тако да бар једно писмо стигне на адресу на коју је послато?А на колико начина је он то могао урадити, тако да тачно 4 писма стигну на адресе на које су послате?
5. У једном реду биоскопске сале има 12 седишта. На колико начина у тај ред може да седне 6 брачних парова, тако да ниједна жена не седне до свог мужа?
6. У једној улици налазе се једна поред друге две вулканизерске радње: Левогумић и Десногумић. Вулканизерска радња Левогумић мења гуме само са леве стране аута, а вулканизерска радња Десногумић само са десне стране аута. Промена обе гуме са леве стране аута, исто као и са десне стране аута, траје 10 минута. Због почетка зимске сезоне возачи су дужни да промене све четири гуме. Једно јутро пред вулканизерским радњама се нашло 8 возача који желе да промене гуме. Због специфичности рада вулканизерских радњи прави се списак по којем возачи иду у једну или другу радњу које раде истовремено (наравно, са различитим колима). На колико начина се може направити тај списак, тако да време за које ће се завршити сав посао буде најмање могуће?
7. На колико начина се поља шаховске табле могу обојити са 8 различитих боја, тако да се у свакој врсти појављује свака боја и да у свакој колони никоја два суседна поља нису обојена истом бојом?
8. У воз који има m вагона пење се n $(n \ge m)$ путника. На колико начина они то могу да ураде, тако да у сваки вагон уђе бар један путник?

Биномна формула и биномни коефицијенти

Ако је n природан број и x и y реални бројеви тада формулу

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

зовемо биномна формула или биномни образац. Бројеви $\binom{n}{k}$ су биномни коефицијенти. Важи $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Наводимо неке важне особине биномних коефицијената:

1° $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2° $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

3° $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

4° $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

5° $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

6° $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$

7° $\sum\limits_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

8° $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$

9° $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Пример 11. *У развоју бинома* $\left(x\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ *биномни коефицијенти петог и десетог члана су једнаки. Да ли постоји члан у развоју овог бинома који не садржи* x*?*

Пример 12. *Познато је да сет у стонотениском мечу траје до тренутка док један од играча не освоји 11 поена, а други играч нема више од 9 поена. Уколико није тако, игра се док један од играча не оствари предност од 2 поена разлике. Претпоставимо да је сет завршен резултатом* $11 : x$*, где је* $x \leq 9$*. Колико има могућих различитих токова резултата у току сета?*

Задаци

1. Ако је збир коефицијената прва три члана у развоју бинома $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{x}\right)^n$ једнак 46, одредити члан тог развоја који не садржи x.

2. Доказати да за произвољан скуп A код кога је $|A| = n$ важи $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, где је $\mathcal{P}(A)$ партитивни скуп скупа A.

3. Одредити збир свих коефицијената полинома $(3x^2 + 2x^3)^5$.

4. Одредити чланове развоја бинома $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2})^{11}$ који нису ирационални.

5. Колики је коефицијент уз трећи члан у развоју $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right)^{12}$?

6. Доказати да за природне бројеве m и n, такве да је $m \leq n$, важи

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}.$$

Проблеми разбијања броја

Комбинаторни проблеми овог типа заправо се своде на одређивање броја природних или ненегативних целих решења једначине

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n.$$

Број решења у скупу природних бројева је $\binom{n-1}{k-1}$.
Број решења у скупу ненегативних целих бројева је $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Задаци

1. Мама је испекла 20 палачинки. На колико начина њено четворо деце могу да их поделе међу собом, али тако да свако дете добије бар по једну палачинку?

2. Мама је испекла 20 палачинки. На колико начина њено четворо деце могу да их поделе међу собом?

3. Три друга Аца, Пера и Мика су продавали старе стрипове и тако зарадили 8500 динара. На колико начина они могу да поделе тај новац, ако сваки мора да добије бар 2000 динара?

4. На колико начина се 100 куглица може распоредити у шест кутија тако да у свакој кутији буде непаран број куглица?

5. Одредити број целобројних решења једначине $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ која задовољавају следеће услове: $2 \le x_1 \le 6$, $-2 \le x_2 \le 1$, $0 \le x_3 \le 6$, $3 \le x_4 \le 8$.

Математички ребуси

У проблемима са математичким ребусима циљ је дешифровати назначене операције и то тако да сваком слову одговара по једна цифра и да различитим словима одговарају различите цифре.

Задаци

1. Дешифровати:

$$\begin{array}{cccccc} & & & T & E & N \\ + & & & T & E & N \\ & F & O & R & T & Y \\ \hline & S & I & X & T & Y \end{array}$$

2. Дешифровати:

$$\begin{array}{ccccc} AB & - & C & = & D \\ + & & : & & + \\ A & + & E & = & F \\ \hline AA & - & E & = & G \end{array}$$

3. Дешифровати: $M : A = T - E = M \cdot A = T : I = K - A.$

4. Дешифровати:

$$\begin{array}{ccccc} ATU & + & IAZ & = & IITE \\ - & & - & & : \\ NEH & : & IOH & = & E \\ \hline PAU & - & NZ & = & PPA \end{array}$$

5. Дешифровати:

$$\begin{array}{cccccccc} O & V & E & I & \cdot & E & V & O \\ \hline & & & & E & N & A & E \\ + & & & I & S & E & L & \\ & & A & V & J & J & & \\ \hline & L & S & L & V & A & S & E \end{array}$$

6. Реконструисати множење:

$$\begin{array}{ccccccc} * & * & * & \cdot & * & * & * \\ \hline & & & * & 0 & * & * \\ + & & & * & * & 5 & \\ & * & 3 & * & * & & \\ \hline & * & * & * & * & * & 8 \end{array}$$

7. Реконструисати дељење:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & * & * & * & * & * & * & : & * & * & * & = & * \; 8 \; * \\ - & * & * & * & * & & & & & & & & \\ \hline & & & * & * & * & & & & & & & \\ & & - & * & * & * & & & & & & & \\ \hline & & & * & * & * & * & & & & & & \\ & & - & * & * & * & * & & & & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & & & & & \end{array}$$

8. Одредити највећи број сабирака за који је једнакост

$$\overline{PI} + \overline{PI} + \ldots + \overline{PI} = \overline{PILE}$$

тачна.

Магични квадрат

Дефиниција 7. *Квадратна таблица димензија $n \times n$ која садржи природне бројеве од 1 до n^2, распоређене тако да је збир бројева у свакој врсти, свакој колони и на свакој дијагонали константан, назива се магични квадрат реда n.*

Тај константни збир зовемо *карактеристичним збиром* магичног квадрата и он је једнак

$$K = \frac{1}{n}(1 + 2 + \ldots + n^2) = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Магични квадрат не мора бити састављен само од бројева од 1 до n^2 већ му елементи могу бити и чланови неког растућег аритметичког низа. Нека је a почетни члан, а d разлика тог низа, тада је карактеристични збир једнак

$$K = \frac{1}{2}n(a + d(n^2 - 1)).$$

Магични квадрати реда 3 били су познати још пре нове ере, али се квадрати вишег реда појављују у новијем добу. Магични квадрат реда 4 помиње се у 12. веку нове ере у индијској, кинеској и грчкој литератури.

Операције са магичним квадратима

Ако се магични квадрат заротира за угао који је умножак од 90° или му се елементи ,,пресликају" у односу на неку од четири осе симетрије, добија се магични квадрат са истим елементима у другачијем редоследу.

Занимљивије је да се од сваког магичног квадрата може добити нови магични квадрат примењујући неке од следечих операција:

1. Ако свим члановима магичног квадрата додамо (или одузмемо) исти број, добија се магични квадрат.
2. Ако све чланове магичног квадрата са карактеристичним збиром K помножимо истим бројем k, добија се магични квадрат са карактеристичним збиром $k \cdot K$.
3. Збир или разлика двају магичних квадрата истог реда је магични квадрат истог реда.

Још нека својства магичних квадрата

Ако је збир сваког пара централно симетричних елемената магичног квадрата једнак $n^2 + 1$, за такав магични квадрат се каже да је *симетричан.*

Ако се сваки елемент магичног квадрата одузме од $n^2 + 1$, добија се нови магични квадрат, који се назива *комплементом* полазног магичног квадрата.

Ако један или оба збира елемената на дијагоналама нису једнаки карактеристичном збиру такав квадрат је *полумагичан.*

Магична коцка

Магична коцка је 3-димензионални еквивалент магичног квадрата, такав да су цели бројеви распоређени у облику $n \times n \times n$. Збир бројева у свим редовима, колонама и четири главне дијагонале је константан и назива се карактеристични збир магичне коцке. Изузетак од правила су дијагонале слојева. Карактеристични збир магичне коцке је $\dfrac{n(n^3+1)}{2}$.

Ако је и на дијагоналама слојева збир елемената једнак карактеристичном збиру, онда се ради о савршеној магичној коцки. Савршене магичне коцке реда 2, 3 и 4 не постоје, док су такве коцке реда 7 и 9 познате од краја 19. века. Од 2003. године познате су и савршене магичне коцке редова 5 и 6.

Задаци

1. **Шпанска тамница**. *Затвор у близини шпанског града Кадиза је у облику квадрата са 16 ћелија. Гувернер је затвореницима нумерисаним бројевима од 1 до 15 дао задатак да се распореде тако да њихови бројеви чине магични квадрат, али да ни у једном тренутку у ћелији не може бити више од једног затвореника. У случају позитивног решења обећано им је ослобађање. На слици је дат распоред затвореника. Затвореник може прећи само у празну ћелију из ћелије која је суседна празној ћелији. Да ли је то могуће?*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

2. *Доказати да не постоји савршена магична коцка реда 3.*

Латински квадрат

Дефиниција 8. *Квадратна таблица димензија $n \times n$ чије је свако поље попуњено једним од n различитих елемената распоређених тако да се у свакој врсти и свакој колони појављује сваки од тих елемената назива се латински квадрат реда n.*

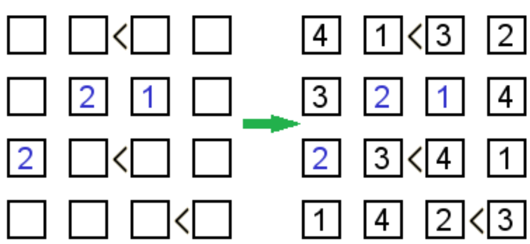
За елементе латинских квадрата се најчешће узимају елементи скупа $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ или слова абецеде.

Пример 13. *Судоку је латински квадрат.*

Футошики

Латински квадрат у чијим пољима су уписани природни бројеви од 1 до n који задовољавају још и неке дате неједнакости назива се футошики. Задаци базирани на футошикију обично су дати тако да се тражи да се дата бројевна мрежа допуни, ако је неколико поља попуњено, или су дате само неједнакости. Ова логичка загонетка потиче из Јапана.

Пример 14. *Представљено је решење једног футошики проблема*



Дирихлеов принцип

Основна верзија овог принципа гласи: *Ако скуп од $nk+1$ елемената треба да поделимо на k дисјунктних подскупова, тада бар један од тих подскупова садржи не мање од $n+1$ елемената.*

Задаци

1. На шаховском турниру учествује 8 играча. Игра свако са сваким. Доказати да се у сваком тренутку турнира могу наћи два играча са једнаким бројем до тада одиграних партија.
2. У равни је дато 25 тачака тако да за сваке три од тих тачака постоје две чије је растојање мање од 1 cm. Доказати да постоји круг полупречника 1 cm који садржи бар 13 од датих тачака.
3. У правилном десетоуглу одабрано је 5 темена. Доказати да постоји једнакокраки троугао са теменима у одабраним тачкама.
4. Доказати да за сваки природан број n, који није дељив ни са 2, ни са 5, постоји природан број чије су све цифре јединице и који је дељив са n.
5. Свака од 13 правих дели квадрат на два четвороугла чије се површине односе као 5:2. Доказати да бар 4 од тих 13 правих имају заједничку тачку.
6. У унутрашњости квадрата чија је дужина странице 1 cm нацртано је неколико кругова. Збир обима свих кругова једнак је 10 cm. Доказати да постоји права која сече бар 4 од тих кругова.

Свођење на противречност

Свођење на противречност или, по Аристотелу, свођење на немогуће (лат. *Reductio ad absurdum*) је један од чешће коришћених доказа у математици. Овде се имплицитно користи закон контрадикције (свођење на апсурд) који тврди да једна категорична изјава не може бити истовремено и истинита и неистинита.

Сам метод логички се базира на таутологији $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$.

Доказивање тврђења овим методом састоји се у следећем: *ако хоћемо да докажемо неку тврдњу, онда прво претпоставимо њену негацију. Ако ту негацију доведемо у противуречност (апсурд), онда смо тиме успели да докажемо саму почетну тврдњу.*

Овакав начин доказивања често се назива индиректним. Доказ се не изводи директно за тврдњу коју желимо да докажемо, већ доказујемо да је негација тврдње немогућа. Затим прихватамо саму тврдњу и закључујемо да поседујемо доказ за њу, до чега смо дошли индиректно.

Најстарији математички доказ изведен овом методом, а који се приписује Еуклиду, је доказ следећег тврђења

Пример 15. *Скуп простих бројева је бесконачан. Доказати.*

Доказ. Претпоставимо да постоји само коначно много простих бројева и да се они могу поређати у низ:

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_n.$$

Посматрајмо број $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

Како по претпоставци простих бројева има коначно много, овај број би морао бити сложен, што значи да би морао бити дељив неким од простих бројева из претходног низа. Међутим, при дељењу са било којим од ових простих бројева он даје остатак 1, па је то контрадикција. Следи да је скуп простих бројева бесконачан.

Задаци

1. Доказати да 10 ученика не може поделити 40 бомбона тако да сваки од њих добије различит број бомбона?

2. У врсти је 2014 особа. Свака особа је или лажљивац (који увек лаже) или краљ (који увек говори истину). Свака особа је рекла: "*Има више лажљиваца са моје леве стране него краљева са моје десне стране.*" Колико има лажљиваца у тој врсти? (*Кенгур без граница 2014.*)

3. Шестокраке, седмокраке и осмокраке хоботнице служе подводном краљу. Оне које имају 7 кракова увек лажу, док оне са 6 или 8 кракова увек говоре истину. Једног дана среле су се 4 хоботнице. Плава је рекла: ,,Заједно имамо 28 кракова", зелена: ,,Заједно имамо 27 кракова", жута: ,,Заједно имамо 26 кракова" и црвена: ,,Заједно имамо 25 кракова". Које боје је хоботница која говори истину? (*Кенгур без граница 2010.*)

Метод инваријанте

Особина (својство) математичког објекта која се не мења при некој трансформацији зове се **инваријанта** те трансформације. Обично се метод инваријанте користи за решавање задатака у којима се жели испитати може ли се вишеструком применом неке задате трансформације од математичког објекта (стања) X добити неки други математички објекат (стање) Y. Уколико се нађе пример који показује како се то може учинити, тј. колико пута и како применити задату тренсформацију, онда је одговор позитиван. Ако се пронађе инваријанта те трансформације која нема исте вредности за та два објекта, то значи да се применама те трансформације не може од X добити Y и одговор је негативан.

Задаци

1. Од бројева 1, 2, 3, 4, 5 и 7 бирају се три броја и повећавају за по 1. Може ли се понављањем те операције добити да сви бројеви буду једнаки?

2. Пера је разрезао лист папира на 7 делова, а затим је неке од тих делова разрезао на нових 7, и тако редом. Да ли је могуће да је у неком тренутку имао испред себе 5285 делова папира?

3. Уређени пар целих бројева (m, n) можемо трансформисати у уређени пар (n, m), $(m-n, n)$ или $(m+2n, n)$. Може ли се од уређеног пара (21,15) добити уређени пар (12,20)?

4. У једној врсти исписана су три цела броја m, n и p. Испод ње, у другој врсти, исписане су разлике бројева из претходне врсте $m-n$, $n-p$ и $p-m$. По истом правилу исписани су бројеви у трећој врсти, итд. Постоје ли бројеви m, n и p, такви да се у некој врсти после седме може добити број а) 30103; б) 40104?

5. На столу се налази 8 чаша. Њих 3 су окренуте дном навише. Дозвољено је истовремено превврнути било које 4 чаше. Може ли се постићи да све чаше буду правилно постављене?

6. Пера је на папиру написао 4514 нула и 4515 јединица. Он брише по два броја и ако су исти уместо њих уписује јединицу, а ако су различити онда нулу. Који ће број остати последњи написан на папиру?

7. На табли је редом написано првих 3747 природних бројева. У сваком кораку бришу се два произвољна броја, а уписује се апсолутна вредност њихове разлике. Да ли је могуће да после 3746 корака на табли остане написан број 1?

8. Из квадрата 100×100 подељеног на 10000 јединичних квадратића ,,изрезан" је један квадратић. Може ли се преостали део квадрата прекрити са 9999 једнакокрако-правоуглих троуглова чије су хипотенузе дужине 2, тако да се хипотенузе троуглова поклапају са ивицама квадратића, а катете са дијагоналама квадратића?

9. Квадрат 10×10 подељен је на 100 јединичних квадратића. Бира се 9 квадратића и обоји неком бојом. Затим се у сваком кораку обоје сви квадратићи који имају бар по два суседна квадратића обојена. Да ли се може направити такав избор почетних 9 квадратића да након неколико корака цео квадрат буде обојен?