

Greške u rešavanju matematičkih zadataka

Moto: Errare humanum est.

Grešiti je ljudski. (latinska izreka)

B. Varga Jožef

Temerin

bjv@parabolanet.com

Cilj proučavanja grešaka: Smanjiti greške u rešavanju matematičkih zadataka, ili, uopšteno, smanjiti greške. U ovom radu traži se odgovor na pitanja:

Kakva greška je načinjena?

Zbog čega je došlo do te greške?

Kako ubuduće smanjiti broj tih grešaka / kako eliminisati takve greške?

Prvi deo

Primeri iz istorije

Sedam primera iz istorije je tek onako da ukažemo na pojavu grešaka u davna vremena. Primeri navedenih grešaka iz istorije potiču uglavnom od kompetentnih ljudi, matematičara, astronoma ili inženjera.

Egipćani su računali površinu četvorougla na sledeći način: polovinu zbira dve naspramne stranice množili su sa polovinom zbira druge dve stranice. Formula je, međutim, pogrešna. Pogrešnu formulu su simali i za zapreminu piramide, a možda i za još puno stvari.

I danas ljudi (učenici) često kažu da je $\pi = 3,14$. Neki znaju da je to približno, a neki misle da je to tačno. No nedak u kini je to bilo i zakonom regulisano, a naravno tačnu vrednost nisu znali.

Euklidov peti postulat su dugo vremena smatrali suvišnim u sistem aksioma geometrije, naime mislili su da je ta tvrdnja dokaziva iz drugih aksioma.

Zašto su prozori aviona ovalni, skoro okrugli. Nije reč o grešci, ali greška, koja je načinjena u početku proizvodnje mlaznih aviona (prozori su tad bili ćoškastii) koštala je dosta života.

Dešava se da se sruši neka građevina. Razlozi mogu biti raznorazni. No nekad se to desi i zbog matematičkih grešaka.

Pravno ili fizičko lice može imati finansijski gubitak i bez srušenja zgrade. Dva interesantna primera dokazuju to.

Klasifikacija grešaka

Za greške kažemo da su: bitne, manje bitne, nebitne, formalne, sintaksne, semantičke, sadržajne, skrivene, itd.

Postavljaju se pitanja:

Kakva greška je učinjena?

Zog čega je učinjena ta greška?

Šta je posledica te greške?

Da bi se bolje snašli, napravljena je klasifikacija grešaka, tačnije pojavljivanja grešaka po više principa, odnosno osobina. Dve od tih osobina pokazuju vremensku dimenziju. Naime, poreklo greške pokazuje na prošlost u odnosu na vreme pravljenja greške, a značaj greške je posledica, tj. može se oceniti tek posle, nakon što se greška pojavila.

Klasifikacija po značaju

Klasifikacija po vrsti grešaka

Klasifikacija po poreklu grešaka

Klasifikacija po primetljivosti

Umesto samih grešaka, klasifikuje se pojavljivanje greške: naime, ista greška u različitim situacijama može se staviti u razne klase.

Na primer, greška $6 \cdot 9 = 48$, može biti posledica toga:

- da neko ne zna tablicu množenja;
- da neko u 20% slučajeva umesto $6 \cdot 9 = 54$ računa $6 \cdot 9 = 48$;
- da je neko zbog odvlačenja pažnje slučajno pogrešio
- da neko $6 \cdot 9$ nije mogao pročitati ispravno, pa je pročitao kao $6 \cdot 8$

Ovi su ujedno primeri klasifikacije po poreklu grešaka.

Kroz oko dvadesetak primera biće pokazane greške uz raznih klasa, počev od lako prometljivih omaški, do smišljeno skrivenih grešaka, za čije otkrivanje treba dosta truda i napora. Posebna pažnja će biti posvećena posledicama tih grešaka, što može biti bezznačajna, a može biti i veliki finansijski gubitak, ili gubitak ljudskih života.

Grške se mogu vezati i za oblast, matematike, pa čak i do pojedinih tematskih jedinica iz programa školovanja. Primerima će i to biti ilustrovano, a biće i radionica na tu temu.

Najčešće greške (vrste grešaka) vezano za gradivo osnovne škole
(deo iz popisa)

Oblast	vrsta	
kvadrat brojeva	operacija	Kvadrat broja jednak duplom broju.
kvadratni koreni brojeva	operacija	Kvadratni koren zbira jednak je zbiru kvadratnog korena.
Pitagorina teorema	operacija	$a^2 + b^2 = c^2$ čak i ako je hipotenuza a ili b.
primena Pitagorine teoreme	operacija	Korišćenje neodgovarajuće formule.
stepeni	operacija	$a^b = a \cdot b$

	operacija	$(a+b)^c = a^c + b^c$
polinomi	rasuđivanje	Pogrešno određivanje monoma u polinomu (zagrada, znak množenja).
	rasuđivanje	Sabiranje (oduzimanje) monoma koji nisu slični.
	operacija	Sabiranje (oduzimanje) izložioaca prilikom sabiranja (oduzimanja) monoma.
	rasuđivanje	Množenje svakog monoma iz jednog zbira sa svakim iz drugog zbira pri sređivanju složenijih izraza.
	rasuđivanje	$-a(b+c) = -ab+ac$ i slične greške
	rasuđivanje	$a^2 - b^2 = (a-b)^2$
	rasuđivanje	$(a\pm b)^2 = a^2 \pm b^2$

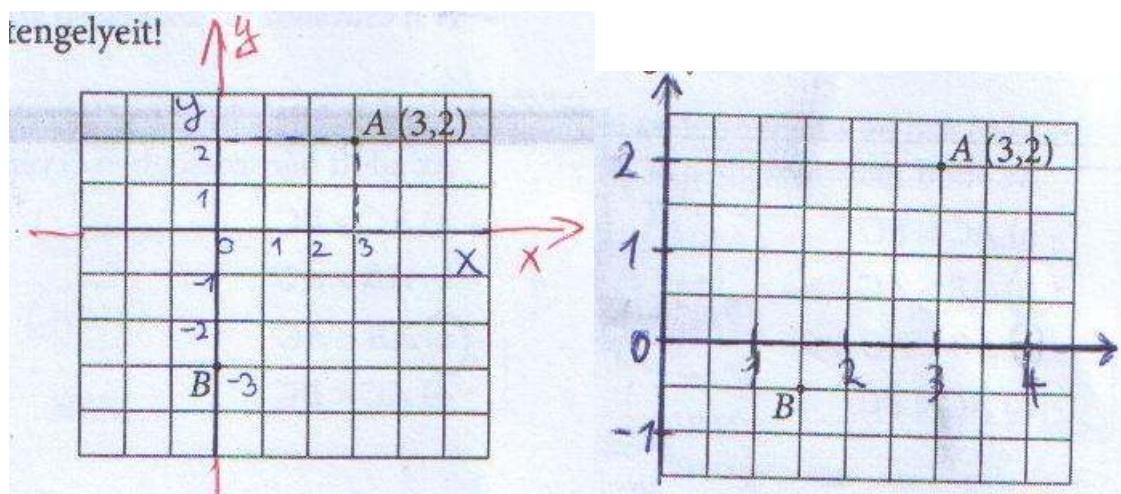
Drugi deo

Analize i ocene nekih grešaka

Kroz nekoliko primera

Oko dvadesetak grešaka je pripremljeno za analizu od starnje slušalaca. Najčešća pitanja su: Koje je vrste greška?, Kako je doslo do grešaka? Kako bodovati (oceniti) izradu zadataka u kome se pojavila ta greška?

Tri interesantna primera:



18. Vasa je za svoj rođendan kupio nekoliko čokoladica i nekoliko krem-banana. Jedna krem-banana je koštala 10 dinara, a čokoladica 15 dinara. Vasa je ukupno potrošio 450 dinara i za te pare je kupio ukupno 35 slatkiša. Koliko komada čokoladice i koliko komada krem-banane je kupio Vasa?

Napiši postupak.

Írd le a számolás folyamatát! 420, 400, 310, 300, 200, 110, 100, 10, 0

15 dinara čokoladice: 2, 6, 6, 6

10 dinara krem-banane: 2, 1, 10, 1, 1

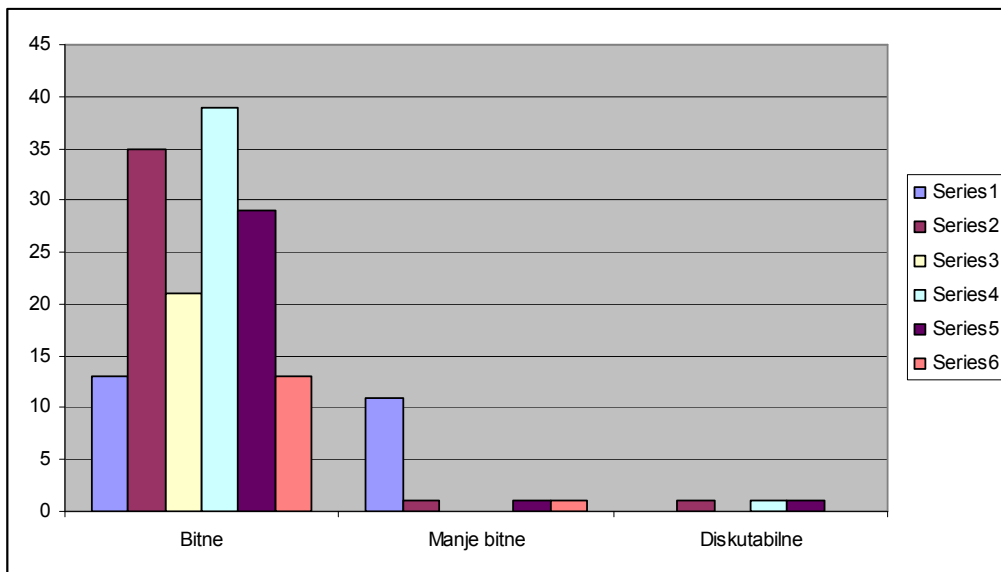
Vasa je kupio ukupno 15 krem-banana i 20 čokoladica.

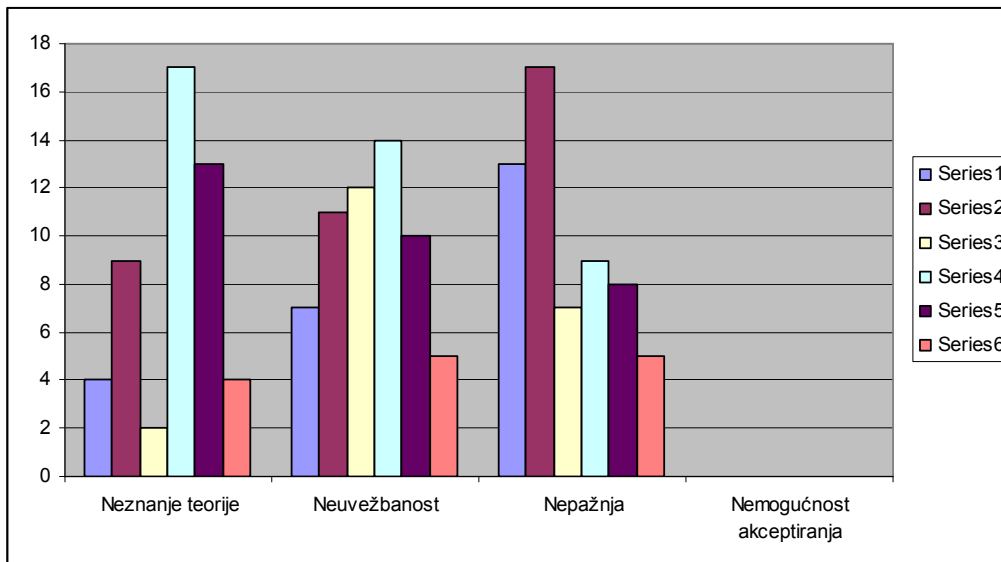
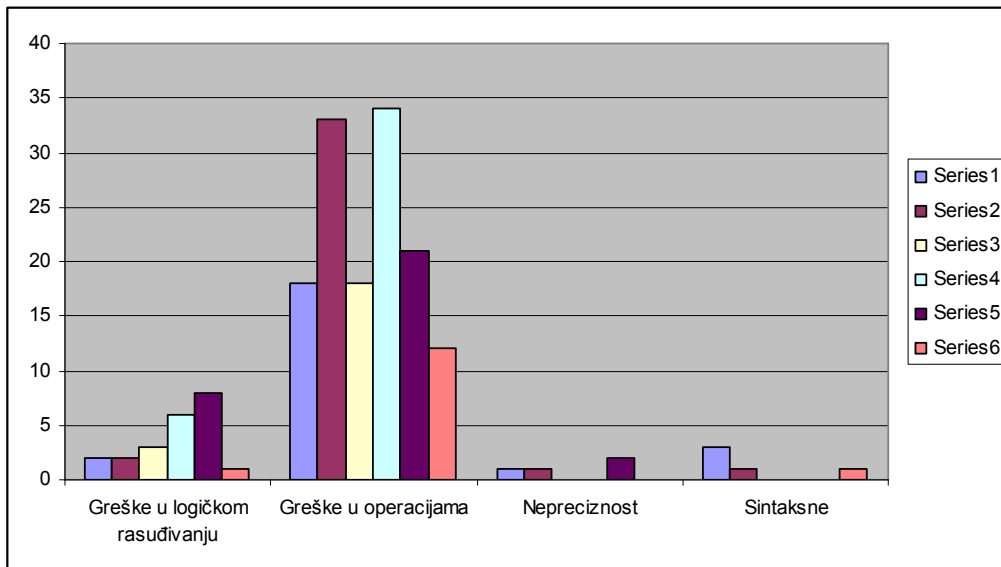
1

Treći deo

Statistike

Raspodele pojavljivanja grešaka po klasama:





Greške kod studenata tehničkog fakulteta:

Jedan profesor jednog tehničkog fakulteta (informatika) evropskog univerziteta (zamolio je me da ostane anonimn) primetio je na jednom decembarskom ispitu da studenti imaju problema uglavnom sa osnovnim operacijama celih brojeva.

No ipak najdrastičnije je bilo, kada je jedan student zbir ralomaka je računao tako što je sabrao brojiocce i imenioce. Posle ovoga su studenti treće godine su dobili sledeći list uz redovnih ispitnih pitanja:

1. Sledeće razlomke poredati po rastućem redosledu: (0,25 p)

$$\frac{7}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{3}{4} \quad \text{7\%}$$

2. Izvršiti naznačene operacije: (0,75 p)

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{11}{3} = \text{0\%} \quad \frac{7}{8} - \frac{11}{3} = \text{15\%} \quad \frac{7}{8} : \frac{11}{3} = \text{4\%}$$

3. Skratiti sledeće razlomke: (0,75 p)

$$\frac{1300}{300} = \text{5\%} \quad \frac{125}{100} = \text{13\%} \quad \frac{18}{12} = \text{7\%}$$

4. Prevesti u decimalni oblik: (1 p)

$$\frac{5}{4} = \text{10\%} \quad \frac{8}{3} = \text{12\%} \quad \frac{54}{100} = \text{4\%} \quad \frac{-9}{2} = \text{3\%}$$

5. Izvršiti sledeće operacije: (0,75 p)

$$2318 + 979 = \text{3\%} \quad 615 \cdot 83 = \text{33\%} \quad 1127 : 23 = \text{39\%}$$

6. 20% od 70 je = 7% (0,75 p)

Koliko procenata je 4 od 5? 9%

75% broja a je 30. a=? 20%

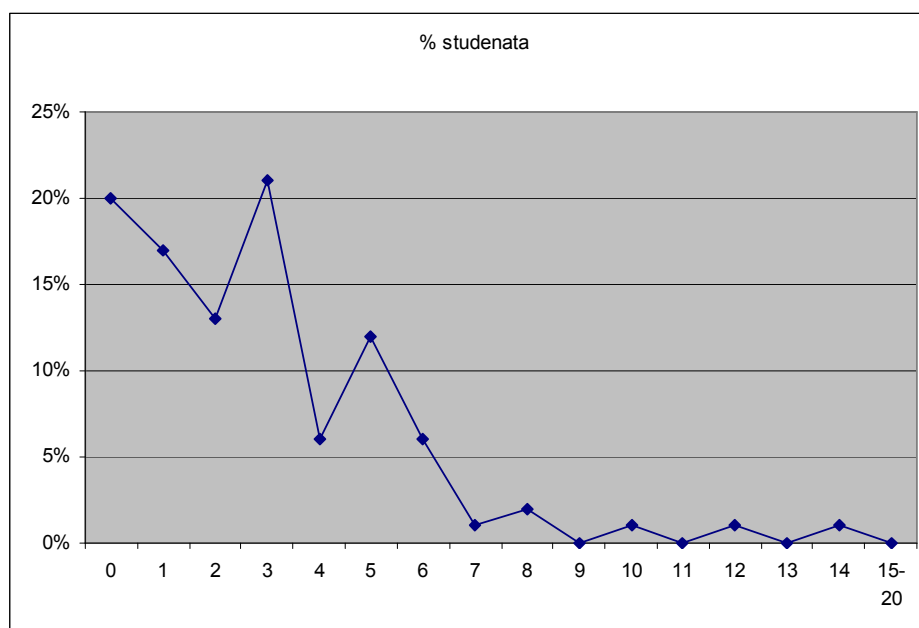
7. Pretvoriti u drugi brojevni sistem: (0,75 p)

Decimalni	Heksadecimalni
23	33%
27%	A2
31%	1B

Crvenom bojom su napisani procenti negativnih odgovora po zadatku (preko 100 studenata)

Procenat studenata sa određenom greškom

greška	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15-20
% studenata	20%	17%	13%	21%	6%	12%	6%	1%	2%	0%	1%	0%	1%	0%	1%	0%



Četvrti deo

Radionica

Slušaoci predlažu (nabrajaju) teme iz nastavnog gradiva osnovne škole, za koje se mogu vezati nekoliko tipičnih grešaka. Potom se formiraju grupe od četiri do sedam slušalaca koji biraju za sebe temu iz predloženog spiska, zatim popišu karakteristične greške (do tri – četiri) i za svaku grešku formiraju po jedan zadatak u čijem rešavanju se može pojaviti ta greška i jedan zadatak u čijem rešavanju se dotična greška ne može pojaviti.

Izlaganje po grupama, a zavisno od vremena moguće je izlaganje ili dopuna i predavača.

Peti deo

Greške nastavnika

Šta treba raditi kad neki učenik primeti nastavnikovu grešku?

Šta treba raditi kad niko, sem nastavnika, ne primeti nastavnikovu grešku?

Greške u tekstovima zadataka i u predloženim rešenjima zadataka sa takmičenja.

Jedan primer:

У пекари су, у једном тренутку, од пецива остале само переце и погачице. Ученици оближње школе купили су укупно 81 комад пецива.

Ако је њих 37 купило само по перецу, а њих 36 је купило само погачицу, колико ученика је купило и перецу и погачицу?

Školsko takmičenje 31.01.2015, 5. razred

Oficijelno rešenje:

2. (MJ 49/1)

$$(81 - 37 - 36) : 2 = 4.$$

Дакле, 4 ученика

(20 бодова).

A šta ako je jedan učenik kupio tri perece i dve pogačice?

I još nekoliko primera na predavanju.

Na kraju će se pokazati tela Časar - poliedri bez dijagonale, koji su otkriveni nakon jednog srednjoškolskog takmičenja, gde je bi jedan zadatak pogrešno formulisan.

Literatura

- [1] B.L. van der Waerden, Egy tudomány ébredése, Budapest, Gondolat, 1977 (strane 53 i 54)
- [2] http://hu.wikipedia.org/wiki/Pi_%28sz%C3%A1m%29
- [3] D. Lopandić, GEOMETRIJA
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/De_Havilland_Comet

- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_%281940%29
- [6] Vladimir Jakovljević, Matematičke greške i njihove posledice, Tangenta, časopis za matematiku i računarstvo Društva matematičara Srbije, broj 80/4, 2014/15
- [7] http://www.nytimes.com/2014/07/27/magazine/why-do-americans-stink-at-math.html?_r=2#story-continues-7
- [8] <http://adventuresinfrugal.com/one-time-13-pound-burgers-failed-america-couldnt-figure-meat-quarter-pounder/>
- [9] <https://www.youtube.com/watch?v=uYSt8K8VP6k>
- [10] Vladimir Devide, Matematička logika, Beograd, Matematički institut, 1972.
- [11] Slaviša B. Prešić, Elementi matematičke logike, Beograd, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, 1974.
- [12] Marica i Slaviša Prešić, Uvod u matematičku logiku, Beograd, Matematički institut, 1979.
- [13] M. Krajnović, Gde je pogreška?, Zagreb, Školska knjiga, 1962.
- [14] <http://www.urbanlegends.hu/2004/08/6465/>
- [15] http://www.invatasingur.ro/logica/index.php/Orice_triunghi_este_isoscel
- [16] https://en.wikipedia.org/wiki/Cs%C3%A1sz%C3%A1r_polyhedron