Решавање проблема на математичким такмичењима ученика основних и средњих школа - најчешћи приступи, технике и принципи

Тема овог предавања представља тему једног од програма сталног стручног усавршавања наставника, акредитованих за школску 2016/17. и 2017/18. годину, а који је предложен од стране Подружнице Ниш Друштва математичара Србије. Циљ предавања је провести учеснике кроз процес реализације модерне додатне наставе математике, при томе одговарајући на следећа питања: како одабрати литературу; како одабрати проблеме чија ће се решења презентовати ученицима, а како оне за самосталну вежбу; који је исправан начин презентовања решења; како оценити парцијална решења ученика; како навести ученика да комплетира решење; и др.

Учесници би по завршетку овог програма унапредили знање из оних области које су недовољно заступљене у редовној настави, али ипак неизоставне у раду са талентованим ученицима, као и вештине о ефикасном начину за преношење тих знања. Током овог предавања решаваћемо математичке проблеме, константно се трудећи да дамо одговоре на следећа питања: како и зашто је посматрани проблем настао; који су кораци били преломни у његовом решавању; које још проблеме можемо решити приказаном техником; итд. Размишљање о оваквим питањима, и проналажење њихових одговора, представља кључ за ефикасно савладавање нових метода решавања проблема, што ученике који похађају додатну наставу орјентисану на тај начин додатно мотивише за самосталан рад.

Аутори и реализатори ове теме имају огромно искуство у раду са талентованим ученицима и у учествовању у математичким такмичењима у сваком смислу. Поред тога, чланови су Државне Комисије за математичка такмичења средњошколаца.

На овом предавању биће заступљене две области: теорија бројева и алгебра. У овом резимеу предавања дајемо примере задатака, као и неколико решења, који би требало да демонстрирају манир обраде задатака на предавању. Коначан материјал садржи око сто задатака са детаљним решењима писаним у овом стилу.

НАЈЧЕШЋЕ МЕТОДЕ И ТЕХНИКЕ ПРИ РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

1. Ако је $n > 4$ сложен број, онда $n \mid (n-1)!$. Доказати.

2. Нека је $n > 3$ природан број. Доказати да постоје два проста броја која су већа од n, а мања од $n!$.

3. (**Лежандрова формула**) Нека је p прост број и n природан. Доказати да је највећи степен броја p који дели $n!$ једнак
$$[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \ldots .$$

4. Да ли постоји природан број n такав да се број $n!$ завршава са тачно 2011 нула?

5. Нека је $n > 1$ природан број и p прост број. Доказати да је број $n^{p^p} + p^p$ сложен број.

6. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n, таквих да је $50^n + (50n+1)^{50}$ сложен број.

7. Доказати да је $[4n+7, 3n+5] = 12n^2 + 41n + 35$ за сваки природан број n.

8. Одредити све природне бројеве n за које је разломак $\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}$ нескратив.

9. Колико најмање делилаца може имати број $p^2 + 11$, где је p прост број већи од 2?

10. Доказати да се међу произвољних $2n-1$ целих бројева увек може одабрати њих n, тако да им је збир дељив са n, ако је (a) $n = 3$, (b) $n = 6$.

11. Одредити остатак при дељењу броја $\underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}_{2014}$ са 31.

12. Доказати да $n^2 + n + 1 \mid n^{3a+2} + n^{3b+1} + n^{3c}$ за сваки природан број n и $a, b, c \in \mathbb{N}_0$.

13. Доказати да је број $19 \cdot 8^n + 17$ сложен за сваки природан број n.

14. Нека су n и k природни бројеви за које важи $n > k$. Доказати да су бројеви $2^{2^n} + 1$ и $2^{2^k} + 1$ узајамно прости.

15. Одредити двоцифрени завршетак броја 2013!! .

16. Нека је n природан број дељив са 99^2. Колико најмање може бити збир цифара броја n?

17. На табли је записан број који има 2015 цифара и чије су све цифре из скупа $\{1, 2\}$. Доказати да је могуће обрисати једну цифру тако да новодобијени број буде дељив са 11.

18. Млади математичар Перица тврди да је пронашао занимљив критеријум помоћу кога може да утврди да ли је неки природан број n дељив са 19. Ево његовог алгоритма (тренутни број у почетку је n):

(1) Тренутном броју одбацимо последњу цифру

(2) Новодобијеном броју додамо двоструку вредност одбачене цифре

(3) Са добијеним бројем проводимо кораке (1) и (2) све до тренутка добијања броја који је не већи од 19

(нпр. ако имамо $n = 24817$ алгоритмом добијамо низ бројева 2481, 2495, 249, 259, 25, 43, 4, 10). Перица тврди да $19 \mid n$ ако и само ако је последњи добијени број једнак 19. Да ли је Перица у праву?

19. Нека је $p = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$ прост број и x и y цели бројеви за које важи $p \mid x^2 + y^2$. Доказати да $p \mid x$ и $p \mid y$.

20. Нека је p прост број. Доказати да број $3^p + 7p - 4$ није потпун квадрат.

СТАНДАРДНИ ПРОБЛЕМИ И ТЕХНИКЕ У ВЕЗИ СА ТРАНСФОРМАЦИЈАМА АЛГЕБАРСКИХ ИЗРАЗА

1. Вредност израза: $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ је 2014. Колико чинилаца има у датом производу?

2. Млади математичар Перица је био несташан на часу математике, па му је наставник дао задатак да пронађе неколико разломака из скупа: $\{\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, ..., \frac{1}{n \cdot (n+1)}, ...\}$ чији ће збир премашити јединицу. Перица је, "као из топа", одговорио да је то немогуће. Да ли је Перица у праву?

3. Пошто није успео да умири несташног Перицу, наставник математике дао му је задатак да одреди који је израз већи: $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 6} + ... + \frac{1}{2010 \cdot 2014}$ или $1 - \frac{1}{2014}$. Перица је поново одговорио без размишљања да је леви израз већи. Да ли је Перица у праву?

4. Доказати једнакост: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2013\cdot 2014}=\frac{1}{1008}+\frac{1}{1009}+...+\frac{1}{2014}$.

5. Доказати да је: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{2013}{2014}<\frac{1}{\sqrt{2015}}$.

6. Број облика $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$, где су a и b ненула цели бројеви такви да је $a+b\sqrt{2}\geq 0$, називамо *бели број.* Број облика $\sqrt{c+d\sqrt{7}}$, где су c и d ненула цели бројеви такви да је $c+d\sqrt{7}\geq 0$, називамо *црни број.* Може ли један црни број бити једнак белом, или збиру неколико белих бројева?

7. Доказати да је следећи број рационалан: $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

8. Ослободити се корена у имениоцима разломка: $\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

9. Одредити све уређене четворке природних бројева (x,y,z,t) за које је: $x+y=zt$, $z+t=xy$.

10. За реалне бројеве x,y и z важи: $x+y+z-2(xy+yz+zx)+4xyz=\frac{1}{2}$. Доказати да је барем један од ова три броја једнак $\frac{1}{2}$.

11. Нека су a,b и c различити цели бројеви. Доказати да је број: $\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$, такође цео.

12. Нека су x,y и z реални бројеви за које важи $x+y+z=0$. Доказати да је онда $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Да ли важи обрат?

13. Одредити остатак при дељењу броја $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+2013\cdot 2013!+2014$ бројем $2014!$.

14. Одредити све парове природних бројева n и m за које важи $n^4(n+1)=7^m-1$.

15. Доказати да се број 5^n+5^m може приказати као збир два квадрата целих бројева ако и само ако су n и m исте парности.

16. Уколико је n збир квадрата три природна броја, доказати да је n^2 такође збир квадрата три природна броја.

17. Доказати да се сваки природан број n може изразити на следећи начин: $n=\pm 1^2\pm 2^2\pm 3^2\pm ...\pm k^2$, за погодан избор броја k и знакова $+$ или $-$.

18. Доказати да се сваки цео број може изразити као збир кубова различитих целих бројева.

19. Да ли постоје цели бројеви a,b и c за које важи $a+b+c=13$ и $a^3+b^3+c^3=2023$?

20. Доказати да једначина $x^2+y^3=z^2$ има бесконачно много решења у скупу природних бројева.

ОДАБРАНА РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

НАЈЧЕШЋЕ МЕТОДЕ И ТЕХНИКЕ ПРИ РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

1. Како је n сложен број, то је он дељив неким простим бројем p, где је $1<p<n$. Број $\frac{n}{p}$ је природан и такође важи $1<\frac{n}{p}<n$. Зато се међу чиниоцима $1,2,...,n-1$ јављају p и $\frac{n}{p}$. Производ та два броја једнак је n, па је и цео производ $1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1)$ дељив са n, што је и требало доказати. Да ли смо користили услов $n>4$? Нисмо, што би значило да тврђење важи и за $n=4$. Међутим, приметимо да за $n=4$ имамо $4\nmid 3!$. Дакле, претходни доказ је климав! Зашто? Упарили смо бројеве p и $\frac{n}{p}$ (који у производу дају n). Да ли то увек можемо да урадимо? Не, то се не може учинити ако су они међусобно једнаки! Дакле претходни доказ није добар не само за $n = 4$, већ за све бројеве код којих важи $p = \frac{n}{p}$, односно $n = p^2$. Размотримо посебно тај случај, нека је сада $n = p^2$. Тада међу бројевима $1, 2, ..., n-1$ имамо бројеве p и $2p$ (који су различити), чији је производ дељив са n, па је такав и цео производ. Сада је готово. Заправо и није, опет ситна непрецизност (да је нема тврђење би важило и за $n = 4$, што није случај). Треба искоментарисати да за $p > 2$ важи $2p < p^2$, па се зато број $2p$ налази у посматраном низу. Сад је стварно готов.

2. Користићемо идеју која прожима доказ да простих бројева има бесконачно много. Уочимо број $n! - 1$. Како је он већи од 1, то он има неки прост делилац p. Ако би било $p \in \{2, 3, ..., n\}$ онда би важило $0 \equiv_p n! - 1 \equiv_p 0 - 1$, па би $p \mid 1$, што није тачно. Дакле, број p је један прост број који је већи од n, а мањи од $n!$. Проналажење другог простог броја из задатак интервала је нешто теже, али опет са сличном мотивацијом. Посматрајмо број $n! - 2$. Дати број има прост делилац 2, али $2^2 \nmid n! - 2$ (пошто $2^2 \mid n!$, због $n > 3$). Како је непаран број $\frac{n!-2}{2}$ већи од 1, то он има неки прост делилац q. Када би било $q \in \{3, 4, ..., n\}$, то би значило (слично као за број p) да $q \mid 2$. Контрадикција. Дакле, број q је прост, већи од n и мањи од $n!$. Да ли смо овим завршили задатак (пронашли смо просте бројеве p и q који су већи од n и мањи од $n!$)? Скоро да јесмо, али не баш сасвим - зашто? Можда су бројеви p и q међусобно једнаки! Да ли је ово могуће? Пошто су бројеви $n! - 1$ и $n! - 2$ узастопни бројеви, то су они узајамно прости. Зато су и ма који фактор првог броја и ма који фактор другог броја узајамно прости. Отуда су бројеви p и q узајамно прости, што заправо значи да су различити.

Напомена: Постоји теорема Чебишева која тврди да у интервалу $(n, 2n)$, за $n > 1$, постоји прост број. Доказ овог тврђења није наиван, а помоћу њега изузетно лако решавамо разматрани проблем.

5. Који су механизми (стратегије) да докажемо да је неки број сложен? Један начин је да докажемо да је дељив неким конкретним бројем (са 2, 3, 2011,...). Други начин (нарочито када су изрази који имају променљиву у питању) је да тај израз раставимо на производ два природна броја, при чему је сваки од њих већи од 1. Овде ћемо то учинити. Приметимо да ови сабирци имају степене који су дељиви са p. Да ли нам то нешто значи? Подсетимо се - ако је n непаран природан број онда је

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + ... + x^2y^{n-3} - x^1y^{n-2} + y^{n-1}).$$

Ако су x и y природни бројеви, ово растављење нам гарантује да је збир $x^n + y^n$ (за непарно n) дељив са $x + y$. Сада, како је $n^{p^p} + p^p = (n^{p^{p-1}})^p + p^p$, добијамо

$$n^{p^p} + p^p = (n^{p^{p-1}})^p + p^p = (n^{p^{p-1}} + p)((n^{p^{p-1}})^{p-1} - (n^{p^{p-1}})^{p-2}p^1 + ... - (n^{p^{p-1}})^1p^{p-2} + p^{p-1}).$$

Дакле, овим смо доказали да је $n^{p^p} + p^p$ производ два природна броја. Треба искоментарисати да су већи од 1, што је овде очигледно. Тиме смо доказали да је $n^{p^p} + p^p$, што је и требало доказати. Да ли? Шта смо користили? Оно растављање, које важи за непарне експотенете. Зато ово није решење за парне просте бројеве, односно за $p = 2$. Ово морамо посебно да урадимо. За $p = 2$ треба доказати да је $n^4 + 4$, за $n > 1$, сложен број. Сабирци су потпуни квадрати, па је овде природно "мување" додам-одузмем. Мотивисани квадратом бинома додамо (двоструки) $4n^2$ и одузмемо. Лепо је што је последњи израз такође квадрат. Дакле, $n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. Други умножак је већи од првог, а како је $n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1 > 1$ (јер је $n > 1$) то је $n^4 + 4$ сложен. Овим проблемом ($n^4 + 4$, за $n > 1$, је сложен) прва се позабавила француска математичарка из друге половине 18. века, по имену Софи Жермен. У литератури овај проблем назван је по њој.

6. Прво решење: Какви су експоненти? Да ли имају заједнички непаран делилац (већи од 1)? Могу да имају, ако узмемо да је n дељиво са 5. Дакле, ако је $n = 5k$, $k \in \mathbb{N}$, онда је

$$50^n + (50n + 1)^{50} = 50^{5k} + (50n + 1)^50 = (50^k)^5 + ((50n + 1)^{10})^5,$$

па $50^k + (50n+1)^{10} \mid 50^n + (50n+1)^{50}$. Очигледно је $50^k + (50n+1)^{10} > 1$ и $50^k + (50n+1)^{10} < 50^n + (50n+1)^{50}$. Зато је посматрани број сложен за овакав одабир броја n. Ово је крај пошто има бесконачно много бројева n који су дељиви са 5.

Друго решење: Покушајмо да наместимо број n тако да дати израз буде дељив неком константом. Та константа очигледно не може бити 2. Хајде да пробамо са 3. За произвољан цео број x важи $x^{50} \equiv_3 0$ или $x^{50} \equiv_3 1$ (пошто је $x \equiv_3 0$ или $x \equiv_3 \pm 1$). За први сабирак имамо $50^n \equiv_3 (-1)^n$. Зато жељу да је збир дељив са 3 једино можемо постићи ако истовремено важи $50^n \equiv_3 -1$ и $(50n+1)^{50} \equiv_3 1$. За задовољење првог услова бирамо n непарно, а други услов је задовољен за бројеве n који су дељиви са 3 (као и за оне који при дељењу са 3 дају остатак 1 - мада ово у овом тренутку више није важно). Како непарних бројева који су дељиви са 3 има бесконачно много (то су бројеви облика $n = 6k+3,\ k \in \mathbb{N}_0$), то смо доказали оно што се од нас тражило.

8. За свака два природна броја a и b важи $(a,b)[a,b] = ab$. Како је $(4n+7)(3n+5) = 12n^2 + 41n + 35$, заправо треба доказати да је $(4n+7, 3n+5) = 1$. Дакле, ако је $d = (4n+7, 3n+5)$, треба доказати да је $d = 1$. Подсетимо се да d дели ма коју линеарну комбинацију (са целобројним коефицијентима) бројева $4n+7$ и $3n+5$, односно $d \mid \alpha(4n+7) + \beta(3n+5)$, за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Сада коефицијенте α и β одаберимо тако (ако је то могуће) да резултат не зависи од n (тиме би добили да d дели конкретну бројку-константу). Један од начина да то постигнемо ("убијемо" n) је $d \mid 3 \cdot (4n+7) - 4 \cdot (3n+5) = 1$. Дакле, $d \mid 1$, па је $d = 1$.

15. Који критеријуми дељивости имају везе за двоцифреним завршетком? Један такав је модуо 4. Да ли постоји још неки? Постоји, модуо 25. Оба критеријума "исто" гласе: Природан број и његов двоцифрени завршетак дају исти остатак при дељењу са 25 (и са 4)! Како је 25 један од умножака у 2013!!, то је $2013!! \equiv_{25} 0$. Ово значи, према критеријуму дељивости са 25, да је двоцифрени завршетак броја 2013!! један од $00, 25, 50$ или 75. Пошто је број 2013!! непаран, претходне могућности се редукују само на 25 или 75. Која је од ове две? Искористимо и критеријум дељивости са 4. Имамо да је

$$2013!! \equiv_4 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2013 \equiv_4 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot 1 \equiv_4 (-1)^{503} \equiv_4 -1.$$

Како је $25 \equiv_4 1$, а $75 \equiv_4 -1$, то је двоцифрени завршетак броја 2013!! једнак 75.

18. Докажимо најпре да се Перицин алгоритам завршава у коначно много корака. Ако је n цифра мања од 5 то је очигледно, а ако је n цифра већа од 4, онда редом имамо бројеве $0, 2n, 1, 1 + 2(2n-10) = 4n - 19$, што је крај алгоритма, пошто је $4n - 19 \leq 4 \cdot 9 - 19 = 17$. Докажимо да се након корака (1) и (2) сваки број $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1},\ k > 1$, осим броја $\overline{a_2 a_1} = 19$, смањио. Након корака (1) и (2) од броја $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ добијамо број $\overline{a_k \ldots a_2} + 2a_1$, па је разлика броја од кога смо кренули и броја након корака (1) и (2) једнака $9 \cdot \overline{a_k \ldots a_2} - a_1$. За последњи израз важи неједнакост $9 \cdot \overline{a_k \ldots a_2} - a_1 \geq 9 \cdot 1 - 9 = 0$, при чему знак једнакости важи акко је $k = 2,\ a_k = 1$ и $a_1 = 9$, односно ако је полазни број једнак 19. Како се природан број на који вршимо кораке (1) и (2) стално смањује, до евентуалног добијања броја 19, то ће се на крају доћи до броја не већег од 19 (када применимо кораке (1) и (2) на број 19, добијамо 19). Овим смо доказали да се Перицин алгоритам заиста завршава помоћу коначно много корака. Испитајмо сада да ли је Перица у праву.

Доказаћемо да је полазни број дељив са 19 акко је број који се добије након једне примене корака (1) и (2) дељив са 19. Полазни број можемо записати као $10a + b$, где је b цифра, а a је заправо број након корака (1) (може бити и $a = 0$). Број добијен након једне примене (1) и (2) је $a + 2b$. Тврдимо да је $10a + b \equiv_{19} 0$ акко $a + 2b \equiv_{19} 0$. Уколико другу конгруенцију помножимо са 10, добијамо еквиваленту (пошто су 10 и 19 узајамно прости) $10a + 20b \equiv_{19} 0$, односно $10a + b \equiv_{19} 0$. Овим смо доказали да је $10a + b \equiv_{19} 0$ еквивалентно са $a + 2b \equiv_{19} 0$. То заправо значи да се корацима (1) и (2) са броја који је дељив са 19 прелази на број који је дељив са 19, као и да се са броја који није дељив са 19 прелази такође на број који није дељив са 19. Зато је полазни број дељив са 19 акко је и последњи добијени број (када се алгоритам завршава) дељив са 19 (пошто се увек након примене корака (1) и (2) број од ког се кренуло и новодобијени "исто понашају" по питању дељивости са 19 - или су оба дељива или оба нису). Дакле, полазни број је дељив са 19 акко је и број добијен када се алгоритам завршио дељив са 19. Како се алгоритам завршава неким од бројева $1, 2, ..., 19$, то је полазни број дељив са 19 акко се алгоритам завршио бројем 19 (пошто је он једини у наведеном опсегу који је дељив са 19). На ован начин смо доказали да је Перица у праву.

Напомена: Слични алгоритми могу се направити за дељивост сваким бројем n облика $n = 10k \pm 1$! Покушајте, по угледу на наведени алгоритам, да направите алгоритам за дељивост са 29.

19. Претпоставимо да $p \nmid x$. Тада из $p \mid x^2 + y^2$ имамо да $p \nmid y$. Зато су бројеви x и y узајамно прости са p, па по Малој Фермаовој теореми важи $x^{p-1} \equiv_p y^{p-1} \equiv_p 1$. Дељивост $p \mid x^2 + y^2$ можемо записати у облику $x^2 \equiv_p -y^2$. Уколико последњу једнакост степенујемо на степен $2k+1$, добијамо $x^{p-1} \equiv_p -y^{p-1}$. Одавде, пошто је $x^{p-1} \equiv_p y^{p-1} \equiv_p 1$, добијамо $1 \equiv_p -1$, односно $p \mid 2$. Контрадикција.

СТАНДАРДНИ ПРОБЛЕМИ И ТЕХНИКЕ У ВЕЗИ СА ТРАНСФОРМАЦИЈАМА АЛГЕБАРСКИХ ИЗРАЗА

1. Сваки чинилац запишемо у облику разломка: $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$. На тај начин, цео израз постаје:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Као што видимо, у овом изразу многи бројеви се скрате, а да би увидели шта остаје на крају, потребно је да будемо пажљиви. Једини бројеви који се не скрате су 2 и $n+1$. Према томе, важи: $\frac{n+1}{2} = 2014$, па је $n = 4027$. Обратимо пажњу да се тражи број чинилаца, а не број n. Ако посматрамо имениоце разломака који се јављају, уочавамо да у овом изразу заправо имамо $n-1$ чиниоца. Зато је тражени број 4026.

3. Перица није био у праву. Користимо исти трик као у задатку 2, само што се овог пута бројеви, који су помножени у имениоцу разломка, не разликују за 1, па неће важити једностано: $\frac{1}{1\cdot 5} = \frac{1}{1} - \frac{1}{5}$. Пошто се бројеви у имениоцу разликују за 4, важи заправо: $\frac{4}{1\cdot 5} = \frac{1}{1} - \frac{1}{5}$, тј. $\frac{1}{1\cdot 5} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right)$. Зато је:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 6} + ... + \frac{1}{2010\cdot 2014} &= \frac{1}{4}(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}) + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) + ... + \frac{1}{4}(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2014}) \\ &= \frac{1}{4}(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2014}).\end{aligned}$$

Сада треба бити још пажљивији него у 1. и 2. задатку да би увидели шта све остаје након потирања сабирака. Остају само сабирци који се јављају по једном, а потиру се они који се јављају два пута. Сабирци који се јављају по једном су $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{2011}, -\frac{1}{2012}, -\frac{1}{2013}, -\frac{1}{2014}$. За бројеве $k = 5, 6, ..., 2010$, у овом изразу имамо и $\frac{1}{(k-4)\cdot k}$ и $\frac{1}{k\cdot(k+4)}$, па се јавља и $\frac{1}{k}$ и $-\frac{1}{k}$. Зато је:

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 6} + ... + \frac{1}{2010\cdot 2014} = \frac{1}{4}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}).$$

Да би комплетирали решење, треба упоредити бројеве:

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}) \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{2014}.$$

Овај део решења не захтева никакво размишљање. Да би га успешно разрешили, довољно је само средити дате изразе, измножити све са $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014$ и упоредити два природна броја. Ово је заморан посао, али се све заврши за око пет минута.

Ипак, уз мало размишљања, овај део задатка може да се реши и на следећи начин. Како је:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2014})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2013})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{2012})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{2011}),$$

а у овом збиру, највећи је први сабирак: $\frac{1}{1}-\frac{1}{2014}$, јер смо ту од највећег броја: $\frac{1}{1}$ одузели најмањи: $\frac{1}{2014}$, имамо да је:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\ \ (\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014})\\
=&\ \ \frac{1}{4}((\frac{1}{1}-\frac{1}{2014})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2013})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{2012})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{2011}))\\
<&\ \ \frac{1}{4}((\frac{1}{1}-\frac{1}{2014})+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2014})+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2014})+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2014}))\\
=&\ \ 1-\frac{1}{2014}.
\end{aligned}$$

Као што видимо, важи:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 6}+...+\frac{1}{2010\cdot 2014}<1-\frac{1}{2014}.$$

Напомена: Већ и сами уочавамо како можемо записати другачије разломак облика $\frac{1}{n(n+k)}$. Наиме важи:

$$\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k},\qquad \text{тј.}\qquad \frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}).$$

Приметимо да бројеви n и k не морају бити природни.

11. Претпостављамо већ да се овај задатак решава тако што раставимо израз из бројиоца на чиниоце и видимо да је један од чиниоца израз из имениоца. Било би заиста чудно показати на неки директнији начин да је број из бројиоца увек дељив бројем из имениоца, па је зато њихов количник цео број.

Пробајмо зато да раставимо ове изразе. У имениоцу имамо израз:

$$a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b.$$

Желимо да израз у бројиоцу буде производ овог израза и још једног. То не проверавамо неуким набадањем, већ нам нека запажања много олакшавају растављање израза. Рецимо, пошто је у бројиоцу израз петог степена, тај израз би био производ израза

$$a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b$$

и неког израза другог степена, који ће (вероватно) бити симетричан по a, b и c. Дакле, или ће бити $const\cdot(ab+bc+ca)$ или $const\cdot(a^2+b^2+c^2)$, или њихова комбинација. Потоњи израз не долази у обзир, јер се у производу:

$$(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b)(a^2+b^2+c^2)$$

јавља a^4, што немамо у бројиоцу. Зато проверимо да ли је

$$(a^2b+b^2c+c^2a-a^2c-b^2a-c^2b)(ab+bc+ca)=a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2).$$

Након сређивања леве и десне стране, видимо да су ове две стране заправо идентичне. Дакле:

$$\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=ab+bc+ca\in\mathbb{Z}.$$

Напомена: Растављање разних израза не мора да буде само набадање. Нека запажања нам могу много олакшати растављање. Примера ради, ако уочимо да се израз анулира за $a=b$, треба пробати да у растављању израза добијемо фактор $(a-b)$, а ако се рецимо анулира за $a=-b$, онда извлачимо $(a+b)$ испред заграде. Наравно, умногоме помаже и уочавање да је израз симетричан, цикличан, итд. Рецимо, израз из имениоца:

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$

једнак је нули када је $a=b$, али исто тако и када је $b=c$ и $c=a$. Да ли је он можда једнак са: $(a-b)(b-c)(c-a)$? Ако све измножимо добијамо:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=(ab-ac-b^2+bc)(c-a)=abc-ac^2-b^2c+bc^2-a^2b-a^2b+a^2c+ab^2-abc=$$

$$=ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a.$$

Према томе дати израз није једнак са $(a-b)(b-c)(c-a)$, већ са $-(a-b)(b-c)(c-a)=(b-a)(c-b)(a-c)$, тј. у имениоцу разломка из задатка јавља се израз $(b-a)(c-b)(a-c)$, а у бројиоцу је израз $(b-a)(c-b)(a-c)(ab+bc+ca)$.

17. Замислимо за тренутак да нису у питању квдрати, већ да сваки природан број n морамо представити у наредном облику:

$$n=\pm 1\pm 2\pm ...\pm k.$$

То би било врло једноставно, јер је $-m+(m+1)=1$, па само "додамо" јединицу колико год да треба. Рецимо: $5=-1+2-3+4-5+6-7+8-8+10$. Било би одлично пронаћи и за квадрате сличну везу, али $-m^2+(m+1)^2=2m+1$, што није константа. Али са првим степенима знамо шта ћемо: када одузмемо два суседна добијамо константу. То нас мотивише да урадимо следеће: $-m^2+(m+1)^2=2m+1$ и $-(m+2)^2+(m+3)^2=2m+5$, па је онда:

$$(-(m+2)^2+(m+3)^2)-(-m^2+(m+1)^2)=m^2-(m+1)^2-(m+2)^2+(m+3)^2=4.$$

Дакле, помоћу четири узастопна квадрата можемо добити константу 4. Наравно, претходни идентитет не важи само за природне бројеве m, већ за произвољне бројеве m. Према томе, ако умемо да представимо број n на описан начин, онда свакако умемо да представимо и $n+4$: додавањем још четири узастопна квадрата, при и последњи са предзнаком $+$, а други и трећи са предзнаком $-$. Да би комплетирали решење, треба само наћи начин да представимо $1,2,3$ и 4. Јер, ако можемо да представимо 1 на описан начин, онда можемо и сваки број облика $4l+1$; такође, ако можемо да представимо 2 на овај начин, можемо и сваки број облика $4l+2$, итд. Најзад, приметимо да је: $1=1^2$, $2=-1^2-2^2-3^2+4^2$, затим $3=-1^2+2^2$ и $4=1^2-2^2-3^2+4^2$. Према томе, сваки природан број n се може представити у овом облику.

20. Овакви задаци решавају се пажљивим штеловањем облика бројева x,y,z за које ће важити дата једнакост, које је често далеко од пуког набадања. Обратимо пажњу да се не тражи од нас да пронађемо сва решења ове једначине, већ само да докажемо да постоји бесконачно много њих, па можемо неким условима да себи олакшамо посао.Рецимо, нађимо овакве бројеве за које је $x=y$. Све што треба да важи тада је: $x^2+x^3=z^2$, тј. $x^2(x+1)=z^2$. За свако x такво да је $x+1$ квадрат природног броја, постојаће z за које важи оваква једнакост. Дакле, свака тројка $(x,y,z)=(k^2-1,k^2-1,k(k^2-1))$, за $k>1$, представља тројку природних бројева који испуњавају овај услов.