



Malo matematike

1 Poznatiji algoritmi

Problem 1. [Najveći zajednički delilac] Data su dva prirodna broja a i b . Naći najveći prirodni broj d koji deli oba broja.

Ulaz	Izlaz
$a = 12$ $b = 18$	6

Problem 2. [Eratostenovo sito] Dat je prirodni broj n . Naći sve proste brojeve manje od n .

Ulaz	Izlaz
$a = 8$	2357

Problem 3. [Aritmetika velikih brojeva] Data su dva prirodna broja a i b nizom svojih cifara. Izračunati njihov zbir i proizvod.

Šta u slučaju da je jedan broj veliki a drugi ne?

Ulaz	Izlaz
11	22
11	121

Problem 4. [Površina konveksnog mnogougla] Dat je konveksan mnogougao nizom koordinata temena, dužine n , u smeru kazaljke na satu. Izračunati površinu mnogougla.

Ulaz	Izlaz
$a = 3$	1.00
0 0	
0 1	
1 1	
1 0	

Problem 5. [Brzo stepenovanje] Dati su prirodni brojevi n i k . Izračunati n^k .

Ulaz	Izlaz
$n = 2$ $k = 10$	1024

Problem 6. [Konverzija baza] Dat je prirodni broj n u decimalnom sistemu. Konvertovati broj n u binarni sistem.

Kako ovde možemo iskoristiti logičke operacije?

Ulaz	Izlaz
$n = 6$	110

2 Razni zadaci

Zadatak 1. Formiramo niz 123456789101112131415161718192021 . . . , dopisivajući prirodne brojeve jedan za drugim. Odrediti cifru koja se nalazi na n -tom mestu.

Ulaz	Izlaz
20	1

Zadatak 2. Dat je niz prirodnih brojeva dužine $n \leq 10^3$. Nad njim možete izvršiti samo jednu akciju: da zamenite dva sukcesivna elementa u nizu. Vas zadatak je da nadjete najveću leksikografsku permutaciju koju možete dobiti primenom navedene akcije najviše $k \leq 10^6$ puta.

Ulaz	Izlaz
$n = 5$ $k = 3$	5 3 1 4 2
3 1 4 5 2	

Zadatak 3. Dato je $n \leq 10^6$ domina dimenzija 2×1 , popunjene brojevima od 0 do 6. Treba ih rasporediti jednu do druge, tako da ako se posmatraju kao dva broja, zbir ta dva broja bude maksimalan.

Ulaz	Izlaz
$n = 3$	012
1 2	541
5 0	
4 1	

Zadatak 4. Naći broj brojeva iz segmenta $[A, B]$ čiji je zbir cifara paran.

Ulaz	Izlaz
5 15	5

Zadatak 5. Fibonačijev niz je definisan sa $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ i $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za svako $n > 2$. Odrediti n -ti član Fibonačijevog niza po modulu m ($n \leq 10^9$, $m \leq 10^3$).

Ulaz	Izlaz
$n = 7$ $m = 10$	3

Zadatak 6. [Izborne Pripreme 2002, Hrvatska] Brava na sefu se sastoji od $n \leq 10^5$ jednakih diskova podeljenih na $k \leq 10^7$ segmenta - kao burek :), koji se nalaze jedan na drugom. Na svakom disku postoji segment sa rupom. Da bi se sef otvorio potrebno je da se sve rupe nalaze jedna iznad druge. U jednom koraku možemo zarotirati jedan disk za jedan segment u neku od strana. Naći minimalan broj koraka da bi se sef otvorio.

Ulaz	Izlaz
3 3	1
1 1 2	

Zadatak 7. [TopCoder, SRM 408] Mali Perica je dobio $N \leq 1000$ svećica za rođendan. Odlučio je da na sledeći način proslavi: prvog dana će upaliti jednu sveću da gori sat vremena; drugog dana će upaliti dve sveće u periodu od sat vremena; i tako dalje; k -tog dana će upaliti k sveća. Svakog dana upaljena sveća se smanji tačno za 1 cm. Kada sveća dostigne visinu 0, ne može se više upotrebljavati. Odrediti maksimalni broj dana tokom kojih Perica može da slavi rođendan.

Ulaz	Izlaz
2 2 2 4	4
5 2 2 1	3

Zadatak 8. Napraviti permutaciju prirodnih brojeva od n do m ($1 < n < m \leq 100.000$) tako da zbir svaka dva susedna broja u toj permutaciji bude složen broj.

Ulaz	Izlaz
3 8	3 5 7 8 6 4

Zadatak 9. [ACM PKU] Date su dve binarne matrice a i b, dimenzija $n \times m$ ($1 \leq n, m \leq 100$). Nad matricom je dozvoljena operacija koja se sastoji u menjanju vrednosti elemenata u podmatrici dimenije 3×3

(0 u 1, 1 u 0). Napisati program koji za datu binarnu matricu a vraća najmanji broj potrebnih operacija da se ona prevede u matricu b . Ukoliko to nije moguće, vratiti -1 .

Ulaz	Izlaz
$n = 3$ $m = 4$	2
0 0 0 0 1 0 0 1	
0 0 1 0 1 0 1 1	
0 0 0 0 1 0 0 1	

Zadatak 10. [Problem meseca, DMS] Dat je niz od $n \leq 1000$ karata na kojima se nalaze brojevi od 1 do m , gde je $m \leq 10^6$. Pored navedenih karata imate na raspolaganju k džokera. Od navedenih karata napravite najduži mogući uzastopni podniz, pri čemu džoker zamenjuje proizvoljnu kartu.

Ulaz	Izlaz
5 2	3 4 5 6 7
6 5 10 3 11	

Zadatak 11. Data je n intervala na realnoj pravoj. Naći maksimalni podskup intervala, tako da se nikoja dva ne seku. Šta ako tražimo maksimalni broj ugnježenih intervala?

Ulaz	Izlaz
3	2
0 2	
1 4	
3 5	

Zadatak 12. Dat je lista brojeva sa $n \leq 100.000$ elemenata i niz upita tipa: kolika je suma brojeva na pozicijama od L_i do R_i u datoj listi. Za svaki upit stampati odgovarajuću sumu.

Ulaz	Izlaz
5 3	33
5 11 22 10 50	82
2 3	98
3 5	
1 5	

Zadatak 13. [Problem meseca, DMS] Dat je niz celih brojeva dužine n . Svaki elemenata niza treba ili upariti sa nekim drugim elementom ili ga ostaviti neuparenog. Nakon toga sumi proizvoda elemenata parova dodati vrednosti neuparenih elemenata. Potrebno je naći onu podelu koja maksimizira opisanu sumu.

Ulaz	Izlaz
6	27
0 1 2 3 4 5 6	

Zadatak 14. [TopCoder, SRM 369] String s sastavljen od karaktera 'A' i 'B' je lep ukoliko važe sledeća četiri uslova:

- broj slova 'A' nije veći od $countA$
- broj slova 'B' nije veći od $countB$
- broj uzastopnih slova 'A' nije veći od $maxA$
- broj uzastopnih slova 'B' nije veći od $maxB$

Za date brojeve $countA$, $countB$, $maxA$ i $maxB$ naći najduži mogući lep string.

Ulaz	Izlaz
3517	BABABAB

Zadatak 15. [Regionalno 2006, Hrvatska] Osmosmerka je popularna enigmatska razbibriga koja se sastoji od slova poredjanih u matricu dimenzije $n \times n$ i liste riječi koje se traže. Osmosmerka se rješava tako da se za svaku reč iz liste pronadju sva pojavljivanja u osmosmerci i prekriže sva odgovarajuća slova koja čine tu reč. Reč može početi bilo gde i pružati se u bilo kojem od osam smerova. Rešenje osmosmerke je reč koju dobijemo kada spojimo sva neprekrižena slova, redom od prve do zadnje vrste i u svakoj vrsti s leva nadesno. Napisati program koji će pronaći rješenje zadane osmosmerke.

Ulaz
 $n = 2$ $m = 1$
ab
cd
ad

Izlaz
bc

Zadatak 16. [Regionalno 2009, Srbija] Mirko i Slavko su dobili na poklon nekoliko kutija rafelo kuglica. Da se ne bi posvajali oko raspodele, Mirko je predložio sledeće: naizmenično će uzimati (i jesti) po jednu rafaelo kuglicu iz proizvoljne kutije, i onaj ko uzme poslednju kuglicu iz neke kutije dobija kao nagradu sve preostale kuglice. Pošto je Mirko predložio način raspodele, Slavko ima prednost da bira da li će prvi početi da uzima, ili će to zadovoljstvo prepustiti Mirku. Naravno, Slavko želi da pojede što više kuglica, pa je na vama da mu došapnete šta da radi (da li da uzima prvi ili drugi). Pretpostavlja se da i Mirko i Slavko uzimaju tako da pojedju što je više moguće kuglica.

Ulaz
 $n = 3$
321

Izlaz
PRVI

Zadatak 17. Data su dva sortirana niza dužina m i n ($m, n \leq 10^5$) u kojima se nalaze celi brojevi čija apsolutna vrednost ne prelazi 10^9 . Da li je moguće odabrati po jedan broj iz svake liste tako da im zbir bude k ($|k| \leq 10^9$)? Šta ako je $m, n \leq 10^6$?

Ulaz
 $n = 4$ $m = 4$ $k = 45$
-100 50 78 400
-20 -5 11 100000

Izlaz
Da

Zadatak 18. Dat je niz prirodnih brojeva dužine $n \leq 10000$. Naći broj podnizova (suksecivnih elemenata) datog niza čija je suma elemenata paran broj.

Ulaz
 $n = 4$
1 2 3 4

Izlaz
4

Zadatak 19. Odrediti sa koliko se nula završava broj $n!$. Sta u slučaju da se traži najmanji prirodan broj n takav da se $n!$ završava sa k nula.

Ulaz
30

Izlaz
7

Zadatak 20. Na početku su svi prirodni brojevi od 1 do n ($n \leq 100$) poređani u niz tako da se na i -tom mestu nalazi broj i . Zatim se u svakoj sekundi broj sa pozicije i premešta na poziciju a_i gde je (dati) niz a permutacija brojeva od 1 do n . Odrediti posle koliko najmanje sekundi će raspored brojeva biti kao na početku (garantuje se da rezultat neće biti veći od 10^9).

Ulaz
 $n = 5$
3 5 4 1 2

Izlaz
6