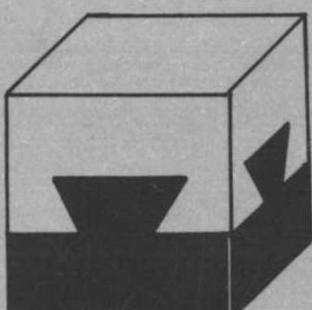
XXVII 3 YU ISSN–714X

МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ

ЗА УЧЕНИКЕ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

3



БЕОГРАД, 1992.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ

за ученике основне школе

Година XXVII, број 3 (1992)

Излази шест пута годишње

ИЗДАЈЕ ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд, Кнез-Михаилова 35/IV, п.п. 728

Обрада на рачунару: *др Павле Младеновић*

Ослобођено плаћања пореза на промет на основу решења Републичког секретаријата за културу СР Србије бр. 413-186-03 од 11.1.1973. године

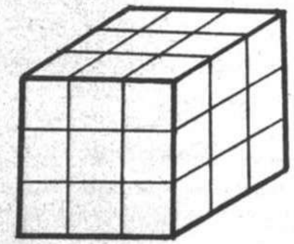
Штампа: „ПРИВРЕДНИ ПРЕГЛЕД", Маршала Бирјузова, 3–5, Београд

Платон Димић

О ПРЕСЕЦАЊУ И ОБЛАГАЊУ КОЦКЕ[1]

1. Претпоставимо да имамо коцку чија је свака ивица дуга $n\,cm$ и да желимо да је изделимо на n^3 јединичних коцкица. Ми то можемо лако постићи пресецајући коцку са укупно $3(n-1)$ равни, онако као што је то, за случај $n = 3$, приказано на сл. 1. Треба, наиме, најпре само помоћу $n-1$ паралелних равни поделити на по n једнаких делова сваку од њених било којих 4 паралелних ивица, па онда – не раздвајајући добијене делове – то исто учинити и са другом, односно трећом четворком њених паралелних ивица. Тако ће коцка, после прве овакве деобе, бити подељена – да тако кажемо – на n слојева, после друге деобе на n^2 стубчића и после треће деобе на n^3 јединичних коцкица.

Но, може се поставити питање: може ли се, можда, поменута деоба извршити и помоћу мањег броја пресецања, ако се после сваког пресецања добијени делови коцке раздвоје и на неки други начин распореде?



Сл. 1

Кад су у питању коцке димензије $2 \times 2 \times 2$ и $3 \times 3 \times 3$, лако се увиђа да то није могуће. Код коцке $2 \times 2 \times 2$, тј. за $n = 2$, свака јединична коцкица је са три своје стране спојена са осталим коцкицама. Зато, да би била одвојена од осталих коцкица, потребно је извршити најмање три пресецања. Кад је у питању коцка $3 \times 3 \times 3$, тј. кад је $n = 3$, онда је од 27 једнаких коцкица, на које је треба раставити, средишна коцкица са свих страна спојена са осталим коцкицама. Зато је у овом случају неопходно извршити најмање шест пресецања да би се она одвојила од осталих коцкица. Али кад је $n > 3$, онда може да се прође и са мање пресецања.

[1] Текст је прештампан из Математичког листа XVI-3, стр. 71–73.

Размотримо, на пример, случај кад је у питању коцка чије су димензије $4 \times 4 \times 4$. Ту коцку можемо прво са два сечења поделити на четири квадра димензије $2 \times 2 \times 4$. Ако затим те делове поставимо тако да добијемо квадар димензије $2 \times 2 \times 16$, онда са још два сечења можемо добити 16 ступчића димензије $1 \times 1 \times 4$. Ако сада те ступчиће поређамо један на други, тако да се два суседна додирују по страни која представља правоугаоник 1×4, онда са још једним сечењем сваки од њих делимо на два подударна дела димензије $1 \times 1 \times 2$. И на крају једним резањем можемо сваки од тих делова поделити на две јединичне коцкице, тј. добити укупно 64 јединичних коцкица.

Према томе, коцку $4 \times 4 \times 4$ можемо са 6 резања поделити на 64 јединичних коцкица. А опште правило за одређивање најмањег броја пресецања, путем којих се коцка димензије $n \times n \times n$ може поделити на n^3 једнаких коцкица, гласи:

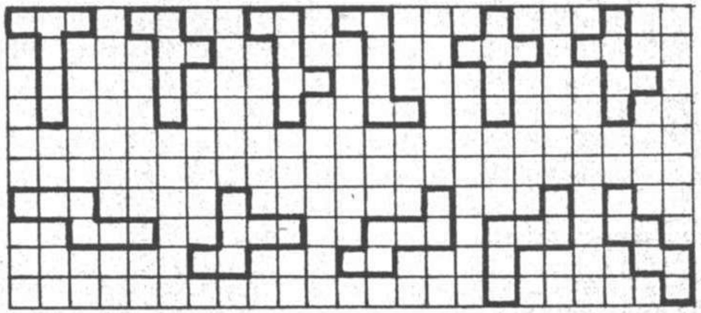
Најмањи број пресецања путем којих се коцка димензије $n \times n \times n$ може поделити на n^3 јединичних коцкица једнак је $3k$, где је k природан број за који важе неједнакости:

$$2^{k-1} < n \leq 2^k. \tag{1}$$

Извођење доказа овог става доста је тешко, и ми га овде нећемо изнети. Показаћемо само како се помоћу неједнакости (1) може одредити, на пример, најмањи број нужних пресецања да би се коцка $9 \times 9 \times 9$ поделила на 729 једнаких коцкица.

Ради тога треба имати у виду само да је $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$. Одавде се већ види да је $2^3 < 9 < 2^4$. Према томе, у овом случају неопходно је извршити $3 \cdot 4 = 12$ пресецања.

2. Претпоставимо сад да коцку треба да обложимо, на пример, шареним папиром. Ми то можемо постићи најлакше ако од тог папира направимо одговарајућу мрежу коцке, па коцку њоме једноставно обложимо. Али зна се да се мрежа коцке може начинити на 11 различитих начина, онако као што је то показано на сл. 2. Зато се може поставити питање: ког облика треба да буде мрежа, па да се из листа папира димензије $m \times n$ може исећи што већи број мрежа за коцку димензије $a \times a \times a$? Другим речима, да се прође са што мање отпадака.



Сл. 2

Но, слично оном што је било учињено на крају претходног дела овог чланка, ни на ово питање неће овде бити дат одговор, и то не зато што би исти био претежак за наше читаоце, него што га и они сами могу потражити. Зато је, наиме, потребно само да имају лист ситно карираног папира и да почну самостално комбиновати и цртати.

Октобра месеца 1992. године преминуо је професор Платон Димић, дугогодишњи главни и одговорни уредник Математичког листа, истакнути активиста и заслужни члан Друштва математичара Србије. Био је професор математике у гимназијама у Панчеву и Београду и професор математике на Техничком факултету у Скопљу. Поред успешне каријере гимназијског и универзитетског професора математике велики део своје активности је посветио раду на откривању и неговању обдарених младих математичара. Био је организатор првог такмичења младих математичара на просторима Југославије, одржаног 1948. године у Скопљу. Аутор је бројних писаних материјала (чланака и књига) намењених младим математичарима из основних и средњих школа и њиховим наставницима. Пуних петнаест година био је главни и одговорни уредник нашег Математичког листа и активан члан многих стручних радних тела у Друштву математичара, претежно у оквиру издавачке делатности. Дао је значајан допринос усавршавању Математичког листа, његовом приближавању читаоцима и наставној пракси у основним школама. Његови ученици и студенти, колеге и сарадници сећају га се као пасионираног љубитеља, поштоваоца и познаваоца књиге, занесеног професора и неуморног, преданог прегаоца на пољу популаризације математике и подизања општег нивоа математичких знања бројних генерација. Нека му је слава и хвала.

Милан Петковић (Краљево)

ПРЕДСТАВЉАЊЕ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА ПОМОЋУ РАЗЛИКЕ ИЛИ ЗБИРА КВАДРАТА ДВА ПРИРОДНА БРОЈА

Потреба представљања природног броја помоћу разлике или збира квадрата два природна броја јавља се код конструкције дужи применом Питагорине теореме. Овај чланак посвећен је том питању.

1. Непаран број као разлика квадрата

Сваки непаран број може се представити као разлика квадрата два суседна природна броја, јер је $2n+1 = n^2+2n+1-n^2 = (n+1)^2-n^2$, односно $2n-1 = n^2+2n-1-n^2 = n^2-(n^2-2n+1) = n^2-(n-1)^2$.

Пример 1. $15 = 2\cdot 7+1 = (7+1)^2-7^2 = 8^2-7^2$.

Овакво представљање помоћу суседних бројева је јединствено, јер су разлике квадрата различити бројеви за различите парове суседних бројева. Ако би разлике биле једнаке, онда и парови суседних бројева морају бити једнаки. Заиста, из $(m+1)^2-m^2 = (m_1+1)^2-m_1^2$ следи $2m+1 = 2m_1+1$, тј. $m = m_1$.

Непаран број који није прост може се представити и помоћу разлике квадрата несуседних бројева.

Пример 2. $15 = 16-1 = 4^2-1^2$.

Међутим, *прост број се не може представити помоћу разлике квадрата два несуседна природна броја.* Познато је да је прост број облика $6n+1$ или $6n-1$. Нека је прост број облика $6n+1$ и нека је $6n+1 = (n+k)^2-n^2$, где су n и k природни бројеви и $k>1$. Тада је $6n+1 = (n+k-n)(n+k+n) = k(2n+k)$, што је немогуће јер је $6n+1$ прост број.

Пример 3. Прост број облика $6n+1$ представити у облику разлике квадрата два природна броја.

Решење. $6n+1 = 9n^2+6n+1-9n^2 = (3n+1)^2-(3n)^2$.

Да се сваки непаран број може представити у облику разлике квадрата показује се и помоћу система линеарних једначина. Ако је $2n+1 = a^2-b^2$, где су a и b природни бројеви, онда је $2n+1 =$

$(a-b)(a+b)$. Једна могућност је $a-b=1$, $a+b=2n+1$, одакле решавањем добијамо $a=n+1$, $b=n$.

Пример 4. Одредити све могућности представљања броја 105 помоћу разлике кавдрата.

Решење. Из услова $105 = 3\cdot 5\cdot 7 = a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ добијамо $a-b=1$, $a+b=105$ или $a-b=3$, $a+b=35$ или $a-b=5$, $a+b=21$ или $a-b=7$, $a+b=15$. Решавањем ова четири система једначина добијамо следећа решења:

$$105 = 53^2-52^2 = 19^2-16^2 = 13^2-8^2 = 11^2-4^2.$$

2. Непаран број као збир квадрата

У обзир долази само могућност збира квадрата парног и непарног броја, тј. $2n+1 = (2m)^2+(2k+1)^2$. У том случају је $n = 2(m^2+k^2+k)$. Према томе, неопходан услов да се број $2n+1$ може представити у облику збира квадрата два природна броја је да је број n паран.

Пример 5. Број $19 = 2\cdot 9+1$ не може се написати у облику збира квадрата два природна броја.

Пример 6. Број $21 = 2\cdot 10+1$ се не може написати у облику збира квадрата два природна броја иако је $n=10$ паран број, јер једначина $m^2+k^2+k=5$ нема решења у скупу природних бројева.

Пример 7. Број $29 = 2\cdot 14+1$ може се написати као збир квадрата два природна броја, јер је 14 паран број и једначина $m^2+k^2+k=7$ има решење $m=1$, $k=2$, па је $29 = 2^2+5^2$.

3. Паран број као разлика квадрата

Размотримо питање представљања парног броја $2n$ у облику разлике a^2-b^2, где су a и b природни бројеви. При томе, могућна су следећа два случаја:

(a) Бројеви a и b су парни. У том случају је:

$$2n = (2m)^2-(2k)^2 = 4(m-k)(m+k), \quad \text{тј.} \quad n = 2(m-k)(m+k).$$

Пример 8. Број 24 се не може написати као разлика квадрата два парна броја, јер једначина $(m-k)(m+k)=6$ нема решења у скупу природних бројева.

Пример 9. Број $20 = 2 \cdot 10$ се може написати као разлика квадрата два парна броја, јер је $2 \mid 10$ и решење једначине $(m-k)(m+k) = 5$ је $m = 3$, $k = 2$, па је $20 = 6^4 - 4^2$.

Лако се види да важи следеће тврђење: *ако је $\frac{n}{2}$ непаран број, онда се број $2n$ може написати у облику разлике квадрата два природна броја, а ако је $\frac{n}{2}$ паран број, онда се број $2n$ не може представити у том облику.*

(б) Бројеви a и b су непарни. У овом случају је:

$$2n = (2m+1)^2 - (2k+1)^2, \quad \text{тј.} \quad n = 2m(m+1) - 2k(k+1).$$

Одавде следи да је дељивост броја n са 4 неопходан услов да се број $2n$ може представити у облику разлике квадрата два непарна броја.

Пример 10. Број $24 = 2 \cdot 12$ може се изразити као разлика квадрата два непарна броја, јер је $4 \mid 12$ и једначина $m(m+1) - k(k+1) = 6$ има два решења $m = 3$, $k = 2$, односно $m = 2$, $k = 0$. Заиста, $24 = 7^2 - 5^2 = 5^2 - 1^2$.

Пример 11. Број $28 = 2 \cdot 14$ не може се представити као разлика квадрата два непарна броја. (Зашто?)

4. Паран број као збир квадрата

На крају, размотримо питање представљања парног броја $2n$ у облику збира $a^2 + b^2$, где су a и b природни бројеви. Могућна су следећа два случаја:

(а) Бројеви a и b су парни. У овом случају је:

$$2n = (2m)^2 + (2k)^2, \quad \text{тј.} \quad n = 2(m^2 + k^2).$$

Пример 12. Број $52 = 2 \cdot 26$ се може изразити као збир квадрата два парна броја јер $2 \mid 26$ и једначина $m^2 + k^2 = 13$ има решења $m = 3$, $k = 2$, односно $m = 2$, $k = 3$. При томе је $52 = 6^2 + 4^2$.

Пример 13. Број 30 не може се изразити као збир квадрата два парна броја. (Зашто?)

(б) Бројеви a и b су непарни. У овом случају важи једнакост

$$2n = (2m+1)^2 + (2k+1)^2, \quad \text{тј.} \quad n = 2m(m+1) + 2k(k+1) + 1.$$

Према томе, неопходан услов да се број $2n$ може представити у облику збира квадрата два непарна броја је да је n непаран број. Међутим, слично као у неким од претходно размотрених случајева, тај услов није и довољан, што показују следећи примери:

Пример 14. Број 40 не може се написати као збир квадрата два непарна броја. (Зашто?)

Пример 15. Број 38 не може се изразити као збир квадрата два непарна броја иако је $n = 19$ непаран број, јер одговарајућа једначина $m(m+1) + k(k+1) = 9$ нема решења у скупу природних бројева (лева страна је паран број, а десна непаран број).

Пример 16. Број 74 може се написати као збир квадрата два непарна броја, јер је $n = 37$ непаран број, а одговарајућа једначина $m(m+1) + k(k+1) = 18$ има решења у скупу природних бројева, и то $m = 3$, $k = 2$, односно $m = 2$, $k = 3$, па је $74 = 7^2 + 5^2$.

Задаци

1. Доказати да се сваки број дељив са 4 може изразити као разлика квадрата два природна броја.

2. Доказати да се број облика $4n+2$ не може изразити као разлика квадрата два природна броја.

3. Доказати да се број облика $4n+2$ не може изразити као збир квадрата два парна броја.

4. Под којим условима се број облика $4n+2$ може изразити као збир квадрата два непарна броја?

5. Одредити сва представљања броја 45 у облику разлике квадрата два природна броја.

6. Испитати могућност представљања броја 45 у облику збира квадрата два природна броја.

7. Доказати да се паран број може најмање на један начин изразити у облику разлике квадрата два рационална броја облика $\frac{k}{2}$, где је k природан број.

RAČUNARI

U ovoj rubrici objavljuju se: (1) konkursni zadaci iz računarstva u kojima se traži od čitalaca da napišu programe za njihovo rešavanje, kao i rešenja tih zadataka; (2) najuspeliji programi naših čitalaca koji se odnose na neki slobodno izabrani zadatak; (3) zadaci sa takmičenja i druge zanimljivosti iz računarstva.

U poslednjem broju ML za ovu školsku godinu biće objavljena imena rešavalaca konkursnih zadataka, a za prvih pet koji budu poslali najveći broj programa predviđene su nagrade.

Rešenja treba slati u posebnom kovertu na adresu ML (na kovertu treba da bude napisano RAČUNARSTVO). U potpisu obavezno navesti **ime i prezime, razred, školu i mesto sa poštanskim brojem**. Rešenje konkursnog zadatka iz ovog broja treba poslati najkasnije do 31.12.1992. godine.

KONKURSNI ZADATAK IZ RAČUNARSTVA BR. 38

Odrediti koliko ima prirodnih brojeva koji nisu veći od 1000 i koji se mogu bar na jedan način predstaviti u obliku zbira kvadrata dva prirodna broja.

REŠENJE KONKURSNOG ZADATKA IZ RAČUNARSTVA BR. 37

```
10 INPUT "ISPITATI BROJ X (KOJI JE VECI OD 1)"; X
20 N = 1
30 N = N + 1
40 A = X ↑ (1/N)
50 B = (INT(A)) ↑ N
60 IF INT(B) = X THEN 100
70 IF INT(B) = 1 THEN 110
80 GOTO 30
100 PRINT A;"↑";N;"=";X : END
110 PRINT X; "NIJE STEPEN PRIRODNOG BROJA SA CELIM
              EKSPONENTOM VECIM OD 1"
110 END
```

Milovanović David, V_4 OŠ "Svetozar Marković", Lapovo

```
5 REM DRUGO REŠENJE
10 INPUT "UNESI BROJ VECI OD JEDINICE; N
20 FOR A = 2 TO INT(SQR(N))
30 X = log(N)/log(A)
40 IF INT(X) = X THEN 100
50 NEXT A
60 PRINT N; "NIJE STEPEN PRIRODNOG BROJA SA CELIM
              EKSPONENTOM VECIM OD 1"
70 END
100 PRINT A;"↑";X;"="N
```

Miljanić Veljko, VII_4 OŠ "Braća Ječmenica", Užice

ТЕСТОВИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ЗА ПРОВЕРАВАЊЕ СТЕЧЕНОГ ЗНАЊА И ПРИПРЕМАЊЕ ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ЗА УПИС У СРЕДЊУ ШКОЛУ

Питања и задаци су распоређени у две групе **А** и **Б**. Ученици који тачно одговоре на сва питања и реше све задатке из групе **А** заслужују добру оцену из дате области. Питања и задаци из групе **Б** су нешто тежи.

Верујемо да ће ови тестови помоћи ученицима да се систематски припреме за успешно полагање пријемног испита за упис у средњу школу.

IV РАЗРЕД

МНОЖЕЊЕ И ДЕЉЕЊЕ У СКУПУ N.

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ФИГУРЕ.

А

1. Израчунај:
(а) $252 \cdot 10$, $20 \cdot 132$, $100 \cdot 425$, $372 \cdot 400$, $18 \cdot 250$;
(б) $3250 : 10$, $35400 : 300$, $37704 : 12$, $5566 : 46$, $17544 : 34$.
Забележи правило како се множи и дели декадном јединицом.

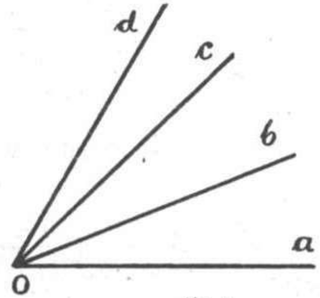
2. Израчунај вредност израза:
(а) $725 \cdot 0 + 429 \cdot 10$, (б) $829 \cdot 1000 - 252 \cdot 1000$,
(в) $123 \cdot 18 + 111 \cdot 122$, (г) $254 \cdot 10 - 72 \cdot 0 \cdot 495$,
(д) $328 + 121 \cdot 10$, (ђ) $735 - 1280 : 40$.
Наведи која од операција има приоритет у израчунавању.

3. Израчунај тако да само једном помножиш или поделиш:
(а) $259 \cdot 28 + 839 \cdot 28$, (б) $857 \cdot 49 - 357 \cdot 49$,
(в) $3350 : 25 + 650 : 25 - 125 : 25$, (г) $6771 : 37 - 851 : 37 + 296 : 37$.

4. (а) Десетоструку вредност збира бројева 678 и 193 подели са 5.
(б) Петоструку вредност збира бројева 123 и 37 умањи за двоструку вредност разлике бројева 328 и 143.

5. Упореди изразе:
(а) $32 \cdot 68$ и $4 \cdot 7 \cdot 68$;
(б) $3448 : 4$ и $54 \cdot 16$;
(в) $43 \cdot 39$ и $1667 : 13$.

6. Дате су полуправе Oa, Ob, Oc и Od са заједничком почетном тачком. Колико углова одређују те полуправе?



Сл. 3

7. Дата је права p и тачке A, B, C, D и E које јој припадају и тачка M која не припада тој правој. Колико има троуглова чија су темена тачке A, B, C, D, E и M?

Б

1. Стави заграде тако да написане једнакости буду тачне:
(а) $320:4+4\cdot 8-6=106$; (б) $320:4+4\cdot 8-6=666$.

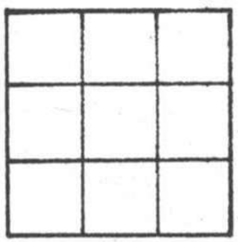
2. Два друга имају заједно 1440 динара. Колико има свако од њих, ако један има пет пута више од другог? Задатак реши на два начина.

3. Сања је записала четири броја. Одреди те бројеве ако се зна да је њихов збир 324, а један од другог се разликује за 42.

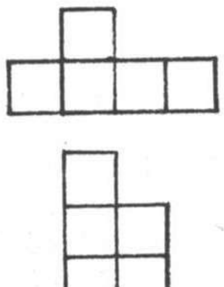
4. Замислио сам број, умањио га за 12, тако добијени број увећао 6 пута и добио број 48. Који сам број замислио?

5. Растојање два града је $400\,km$. Из оба града су истовремено, један другом у сусрет, кренула два аутомобила. Колико је растојање између њих после три часа вожње, ако је брзина првог $60\,km$ на час, а другог $70\,km$ на час?

6. Колико дужи и квадрата уочаваш на слици 4.



Сл. 4



Сл. 5

7. Обим правоугаоника је $16\,cm$, а дужине страница су природни бројеви.
(а) Колико правоугаоника има то својство?
(б) Који од тих правоугаоника има највећу површину и колика је она?
(в) Како се зове правоугаоник са највећом површином?

8. Сваку фигуру на сл. 5 подели на три дела, тако да се од њих може саставити један квадрат.

V РАЗРЕД

ПРИМЕНА НЗС И НЗД. ПОЈАМ РАЗЛОМКА

А

1. Одреди најмањи број који је дељив са:
(а) 12, 15 и 20; (б) 48, 24 и 96; (в) 11, 12 и 13.
Која си правила користио?

2. Неки бројеви при дељењу са 12 и 25 дају остатак 3.

(а) Одреди најмањи број који има то својство.
(б) Одреди највећи троцифрени број са тим својством.

3. Драгана, Мира и Сања корачају улицом. Дужине њихових корака су $75\,cm$, $45\,cm$ и $60\,cm$. Ако су започеле корачање левом ногом и крећу се истом брзином, колико ће корака начинити свака од њих до првог тренутка када опет све три започну корак левом ногом?

4. У једној посуди се налазе 54 бомбоне, а у другој 63 кекса. Колико ће деце моћи да поделе бомбоне и кекс, тако да свако дете добије једнак број бомбона и кекса?

5. Израчунај:

(а) $\frac{3}{4}$ броја 200; (б) $\frac{7}{8}$ броја 120;
(в) $\frac{9}{11}$ броја 605; (г) $\frac{5}{12}$ од дужине $936\,m$;
(д) $\frac{4}{15}$ од запремине $3600\,l$; (г) $\frac{3}{8}$ од дужине $5\,km\,32\,m$.

6. Брат има $\frac{5}{12}$, а сестра $\frac{4}{9}$ мајчиних година. Ко је старији: брат или сестра?

7. Дат је скуп разломака:

$$S=\left\{\frac{2}{5},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{2}{7},\frac{9}{9},\frac{3}{8},\frac{13}{11},\frac{27}{53},\frac{75}{75}\right\}.$$

Који од ових разломака су:
(а) мањи од 1; (б) једнаки 1; (в) већи од 1.
Разломке мање од 1 изрази децималним бројем, а веће од 1 мешовитим бројем.

8. Дечак је прочитао $\frac{1}{4}$ књиге и до половине му је остало 80 страница. Колико страница има цела књига?

Б

1. (а) Ако важи да је $S(3\cdot 56, 3\cdot 64)=3\cdot S(56,64)$, израчунај $S(5\cdot 24, 5\cdot 60, 5\cdot 96)$. Да ли важи једнакост $S(na,nb,nc)=n\cdot S(a,b,c)$?
(б) Користећи релацију $S(a,b)=\dfrac{a\cdot b}{D(a,b)}$ израчунај $S(20,45)$.

2. Којим бројем треба помножити 1200 да се добије:
(а) квадрат природног броја, (б) куб природног броја?
Који је то број?

3. Производ квадрата три узастопна природна броја је 3600. Који су то бројеви? Одреди НЗС за те бројеве. Да ли су ти бројеви узајамно прости?

4. Којим највећим природним бројем можемо поделити бројеве 57, 78 и 111 да остаци по реду буду 7, 3 и 11?

5. Скрати разломке:

(а) $\dfrac{21\cdot 15}{10\cdot 14}$, (б) $\dfrac{14\cdot 7\cdot 16}{64\cdot 28\cdot 21}$, (в) $\dfrac{2^2\cdot 3^3\cdot 32}{64\cdot 2^3\cdot 3^4}$.

6. Разломак $\dfrac{30}{75}$ скрати са $D(30,75)$. Скраћеном разломку одреди једнак разломак такав да је:

(а) збир бројиоца и имениоца једнак 84;
(б) разлика имениоца и бројиоца једнака 84.

7. Одреди два броја чији је производ 150, а њихов највећи делилац је 50.

8. Бициклиста је прешао $\frac{3}{8}$ предвиђеног пута и до циља му је преостало још $25\,km$. Колики је пут планирао да пређе тог дана?

VI РАЗРЕД

ПОЗИТИВНИ И НЕГАТИВНИ БРОЈЕВИ. ТРОУГАО.

А

1. Ако је $a=-\frac{2}{3}$, $b=2\frac{1}{3}$ и $c=-\frac{3}{5}$, израчунај вредност израза:

(а) $a+b-c$, (б) $(a-b)+(a+c)$,

2. Дати су рационални бројеви: $-\frac{2}{5}$, 0.7, $-\frac{1}{4}$, -3, 2.5. Израчунај:

(а) збир највећег и најмањег броја;
(б) разлику збира позитивних и збира негативних бројева.

3. Од броја -10 одузми разлику броја $7\frac{2}{3}$ и $-12\frac{1}{6}$.

4. Реши једначине:

(а) $-2-x+\frac{3}{5}=-0.8$; (б) $2\frac{3}{8}-(-6.5+x)=+1$.

5. Конструиши троугао ABC, ако му је $|AB|=5\,cm$, $\sphericalangle B=45°$ и $h_{AB}=3\,cm$, па му опиши кружницу.

6. Ако су странице троугла три узастопна природна броја, а обим му је $18\,cm$, конструиши тај троугао и упиши му кружницу.

7. Конструиши правоугли троугао, ако је тежишна дуж која одговара хипотенузи $3.5\,cm$, а угао $\alpha=60°$. Одреди тежиште тог троугла.

8. Које тврђење није тачно:

(а) Ортоцентар је пресек висина троугла.
(б) Тежиште правоуглог троугла припада хипотенузи.
(в) Код тупоуглог троугла центар описаног круга припада спољашњој области троугла.
(г) Код једнакокраког троугла висина крака је и симетрала угла на основици.

Б

1. Попуни празна поља магичних квадрата на сликама 6 и 7:

$4\frac{1}{5}$	3.7	$8\frac{2}{5}$
4.3		3.9

Сл. 6

$-\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{5}$	$-2\frac{4}{5}$
	$-\frac{3}{5}$	

Сл. 7

2. Збиру бројева $-\frac{7}{15}$, $\frac{7}{12}$ и $-\frac{4}{5}$ додај разлику бројева $-1\frac{5}{6}$ и -3, па цео израз одузми од броја -12. Запиши израз и израчунај његову вредност.

3. Колико ће се променити разлика ако:

(а) умањеник умањимо за -12.5, а умањилац увећамо за -8.25;
(б) умањеник увећамо за $1\frac{2}{3}$, а умањилац увећамо за 7.5.

4. Ако неки број увећамо за разлику бројева $-16\frac{3}{5}$ и $1\frac{5}{6}$ добијамо збир броја 8 и разлике бројева 2.8 и $-4\frac{3}{5}$. Одреди тај број.

5. Конструиши правоугли троугао хипотенузе $c=5\,cm$ и одговарајуће висине $h_c=2\,cm$. Да ли је решење јединствено?

6. Конструиши једнакокраки троугао ако је збир основице и крака $a+b=7\,cm$, а угао на основици је 75°.

7. Конструиши троугао ABC ако је $|AB|=5\,cm$, $h_a=4\,cm$ и $h_b=5\,cm$.

8. Докажи да је $2t_a<b+c$.

VII РАЗРЕД

ОБИМ И ПОВРШИНА МНОГОУГЛА.

ФУНКЦИЈА ДИРЕКТНЕ И ОБРНУТЕ ПРОПОРЦИОНАЛНОСТИ.

А

1. Нацртај произвољан седмоугао, па га дијагоналама из једног темена подели на троуглове. Сваком троуглу истакни основицу и одговарајућу висину, измери их и израчунај површину седмоугла као збир површина троуглова.

2. Нека је $A=\{4a,6a,8a,12a,3a\}$ скуп чији су елементи обими правилних многоуглова. Скупу A придружи скуп B чији ће елементи представљати површине датих многоуглова. (Користи уџбеник, стр. 94.)

3. Конструиши многоуглове из задатка 2 ако је $a=3\,cm$ и сваком израчунај обим и површину.

4. Израчунај обим и површину фигура:

(а) квадрата чији је полупречник описаног круга $8\sqrt{2}\,cm$.

(б) једнакостраничног троугла чија је висина $8\sqrt{3}\,cm$.

5. Обим правилног многоугла, чија је дужина странице $4\,cm$, је $24\,cm$. Израчунај површину и полупречник уписаног и описаног круга у тај многоугао.

6. Представи таблицом зависност пређеног пута и утрошеног времена, ако је брзина аутомобила $80\,km/h$, а кретао се од 7 до 14 часова. Да ли је та зависност директна или обрнута? Представи је графички у координатној равни.

7. (а) Представи формулом зависност функције директне и обрнуте пропорционалности.

(б) Користећи формулу наведену под (а) утврди која од таблица на сликама 8 и 9 представља функцију директне, а која функцију обрнуте пропорционалности.

x	1		3		-1	
y		6	9	-6		$\frac{1}{3}$

Сл. 8

a	1	-3	3	
b	3			$\frac{1}{3}$

Сл. 9

8. Цена једног килограма јабука је 350 динара.

(а) Колико стаје $15\,kg$ јабука?

(б) Колико се kg јабука може купити за 44450 динара?

Б

1. Израчунај површину правилног многоугла чији је обим $48\,cm$, а $S_n = 720°$.

2. Конструиши правилан осмоугао чији је полупречник описаног круга $r = 6\,cm$, а затим израчунај његов обим и површину.

3. Израчунај обим правилног многоугла чији је збир свих дијагонала и страница једнак $120\,cm$, а дужина једне странице је $2\,cm$.

4. Израчунај разлику површина правилног дванаестоугла који је уписан у круг полупречника $8\,cm$ и правилног шестоугла чија је краћа дијагонала $12\sqrt{3}\,cm$.

5. Шест радника уради посао за 5 часова. За колико часова ће бити завршен исти посао ако после 2 часа дође још 4 радника?

6. Цена робе је снижена 20% и она сада кошта 6000 динара. Колика је била цена робе пре снижења?

7. Радник је пребацио норму 22% и зарадио 178 120 динара. Колика је његова плата?

8. Суму од 40 140 динара су поделила три друга у размери 5 : 6 : 7. Колико је свако од њих добио?

VIII РАЗРЕД

ПРИЗМА. ФУНКЦИЈА.

А

1. Од комада плуте облика квадра чије су ивице $64\,cm$, $48\,cm$ и $80\,cm$ исечене су коцке. Колики је број коцки са највећом могућном ивицом? Одреди масу и површину једне од тих коцки ($\rho = 0.24\,g/cm^3$).

2. Попречни пресек једне шупе дуге $6\,m$ састоји се од квадрата странице $4\,m$ и једнакостраничног троугла. Колики простор заузима та шупа заједно са кровом?

3. Прикажи таблицом кретање пешака, чија је брзина $5\,km/h$, а кретао се од 13 до 18 часова. Прикажи формулом функционалну зависност времена и пута.

4. Ако један радник заврши посао за 8 сати, за колико ће сати тај исти посао завршити 2, 3, ..., 8 радника. Састави таблицу и нацртај график. У каквој су зависности број радника и време утрошено да се посао заврши.

5. Функције су задате формулама:

$$(а)\ f(x) = kx, \quad (б)\ y = kx + n, \quad (в)\ f(x) = \frac{k}{x}.$$

Која од тих функција је линеарна? Да ли је и функција $y = kx$ линеарна?

6. Који међусобни положај имају графици функција $f(x) = 2x - 1$ и $f(x) = 2x + 3$. Провери то цртањем графика сваке функције.

7. Нацртај график функције $f(x) = -x + 3$, па уочи:

(а) да је опадајућа;

(б) да је једнака нули за $x = 3$;

(в) да график сече y-осу у тачки 3.

8. За које вредности променљиве m је функција $f(x) = \left(m + \frac{1}{4}\right)x + 1$:

(а) растућа, (б) опадајућа.

Решење провери графички за две произвољне вредности x из области дефинисаности.

Б

1. Попречни пресек насипа је једнакокраки трапез димензија $a = 16\,m$, $b = 4\,m$ и $c = 10\,m$, а дужина насипа је $500\,m$. Колико m^3 земље има у њему? Колико је kg семена потребно, да се косе стране насипа засеју травом, ако је за $1\,m^2$ потребно $40\,g$ семена?

2. Мермерна полуга има облик правилне тростране призме основне ивице $a = 8\,cm$ и дужине $4\,dm$, а тешка је $692\,g$. Израчунај густину мермера.

3. Дијагонала бочне стране праве правилне тростране призме образује са основном ивицом угао од 60°. Изрази површину и запремину те призме у функцији те дијагонале.

4. Графички прикажи функције $f(x) = 2x + 3$ и $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, а затим функције $y = \frac{1}{3}x+2$ и $y = -3x-1$. Уочи међусобан положај графика ових функција. Наведи и ти две функције чији ће графици бити нормалне праве.

5. Одреди за коју вредност променљиве x функција

(а) $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$, (б) $f(x) = -0.5x + 1$,

прима вредност нула.

6. На слици 10 су дати графици двеју функција.

(а) Запиши координате пресека графика ових функција.

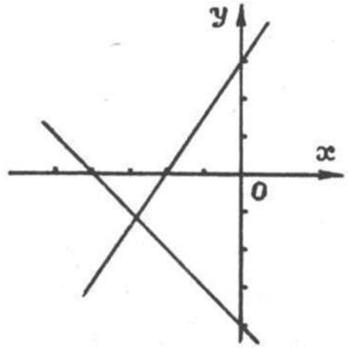
(б) Запиши експлицитни облик сваке од ових функција, па провери решење.

7. Дате су функције:

$$y_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)x + 1,$$

$$y_2 = \left(2m + \frac{3}{4}\right)x - 1.$$

Одредити вредност параметра m за коју ће графици функција бити паралелне праве.



Сл. 10

8. Нацртај графике функција:

(а) $y = |x| + 1$, (б) $y = |x| + x$.

У ком примеру изломљена линија образује туп угао? Да ли је Oy-оса – оса симетрије графика неке од ових функција.

Мира Поповић и Ружица Павлићевић

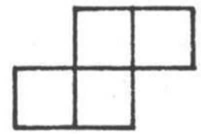
♣ МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА ♣

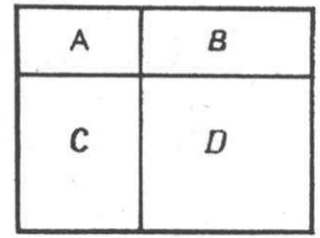
ЛЕЊИНГРАДСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА — 1991. ГОДИНЕ

У жељи да читаоцима МЛ пружи што већи број адекватних задатака за припреме за математичка такмичења Уредништво је одлучило да повремено на страницама МЛ објави и задатке који су били предлагани на такмичењима младих математичара и у другим земљама. У овом броју објављујемо текстове задатака који су били постављени ученицима VI, VII и VIII разреда на Лењинградској математичкој олимпијади 1991. године. Решења тих задатака биће објављена у следећем броју Математичког листа.

VI РАЗРЕД

1. За свој рођендан Маша је испекла велику торту. Познато је да су Саша и Маша заједно тешки колико Андреј и торта. Када су торту појели показало се да је Саша тежак колико Маша и Андреј заједно. Доказати да је Саша појео део торте чија је тежина једнака Машиној тежини пре него што је јела торту.
2. Могу ли се у поља квадратне мреже на листу папира распоредити бројеви 1, 2 и 3, тако да је збир бројева који се могу прекрити фигуром на слици 11 увек једнак 7?


Сл. 11



Сл. 12

3. Правоугаоник је подељен на четири мања правоугаоника A, B, C и D, као на слици 12. Површина A је $2\,cm^2$, површина B је $4\,cm^2$, а површина правоугаоника C је $6\,cm^2$. Колика је површина целог правоугаоника?
4. Могу ли се бројеви од 1 до 100 распоредити на кружници тако да се међу ма којих пет узастопних бројева налазе два броја који су дељиви са 3?

Напомена: Ако је у задацима 2 и 4 одговор потврдан, довољно је навести пример, а ако је одговор одречан, онда је неопходан доказ.

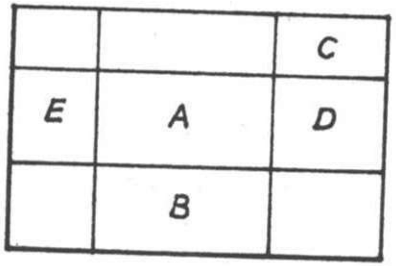
VII РАЗРЕД

1. Одредити најмањи природан број који је дељив са 11 и чији је збир цифара једнак 13.
2. Исти као задатак 1 за VI разред.
3. У једнакостраничном троуглу ABC на страници AB дата је тачка E и над дужи CE као основицом конструисан је једнакостраничан троугао CEK. Доказати да је права BK паралелна са AC.
4. На кружници је распоређено 100 тачака, 41 црвена и 59 плавих. Доказати да постоје две црвене тачке између којих се налази тачно 19 тачака.

VIII РАЗРЕД

1. Исти као задатак 1 за VII разред.
2. Дато је n целих бројева ($n > 1$). Познато је да је производ ма ког од њих са збиром преосталих увећаним за 1, дељив са збиром свих n бројева. Доказати да је збир квадрата свих бројева такође дељив њиховим збиром.
3. Исти као задатак 3 за VII разред.

4. Правоугаоник површине $100\,cm^2$ подељен је на девет мањих правоугаоника као на слици 13. Позната је површина четири од тих мањих правоугаоника: A има површину $4\,cm^2$, B — $14\,cm^2$, C — $3\,cm^2$ и D — $6\,cm^2$. Колика је површина правоугаоника E?



Сл. 13

ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ ЗА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

Математичка такмичења ученика основних школа из године у годину су све масовнија. Она су, поред осталог, права прилика за афирмацију најмлађих такмичара. Задаци из Математичког листа (одабрани, конкурсни, ...) доприносе бољој припреми ученика за такмичења. Разуме се, само ови задаци нису довољни.

Ради тога рубрику МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА смо проширили ПРИПРЕМНИМ ЗАДАЦИМА, о чијем избору брину чланови републичких комисија за такмичења ученика основних школа. Верујемо за су ови задаци од користи верним читаоцима МЛ.

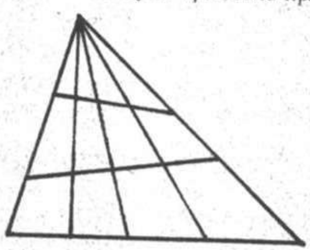
И ове школске године настављамо са објављивањем припремних задатака, као и њихових решења, али, разуме се, решења објављујемо намерно са закашњењем.

Ако имате неку сугестију или идеју за коју сматрате да би била од користи за младе математичаре, можете нам писати на адресу Редакције. Бићемо вам захвални.

IV–58. Дат је магичан квадрат на слици 14. Попуни преостала празна поља магичног квадрата.

19	15	
12	17	

Сл. 14



Сл. 15

IV–59. Колико дужи, а колико троуглова има на слици 15?

IV–60. Колико има четвороцифрених бројева чији је производ цифара једнак четири?

V–58. Дати су суплементни углови α и β, при чему је угао суплементан са α једнак углу комплементном са β. Израчунати углове α и β.

V–59. Распоредити 10 тачака на пет правих тако да на свакој буду по четири од тих тачака.

V–60. Дат је број 72 954 168. Прецртај две цифре тако да се добије:
(а) највећи могући број дељив са 3;
(б) најмањи могући број дељив са 4.

VI–58. У троуглу ABC дати су углови: $\sphericalangle ABC = 15^\circ$, $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. Права n садржи тачку A, нормална је на AB и сече страницу BC у тачки D. Доказати да је $BD = 2 \cdot AC$.

VI–59. Одредити све просте бројеве p, такве да је и број $p^3 + 3^p$ такође прост.

VI–60. У једнакостраничном троуглу ABC, чија је страница $2\,cm$, на случајан начин је распоређено 5 тачака. Доказати да постоје бар две од тих тачака чије је међусобно растојање мање од $1\,cm$.

VII–58. Доказати да је $\sqrt{3} + 1$ ирационалан број.

VII–59. Странице троугла су $13\,cm$, $14\,cm$ и $15\,cm$. Колике су његове висине?

VII–60. Који је број већи: 2^{1992} или 17^{499}?

VIII–58. Да ли постоје
(а) природни бројеви $x_1, x_2, \dots, x_{1992}$,
(б) реални бројеви, $x_1, x_2, \dots, x_{1992}$,
такви да важи једнакост

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1992}^2 = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{1992}) - 1993.$$

VIII–59. Одредити све реалне бројеве x такве да је

$$x + \sqrt{x^2 - 4x + 4} > |x + 5|.$$

VIII–60. На колико начина се 7 различитих куглица може распоредити у:
(а) пет кутија; (б) девет кутија?

Војислав Андрић

РЕШЕЊА ПРИПРЕМНИХ ЗАДАТАКА ЗА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА ИЗ МЛ XXVII-2

IV–55. (а) Највећи број који се може добити је 984 673.
(б) Најма[њи број који се може добити је 184 673.

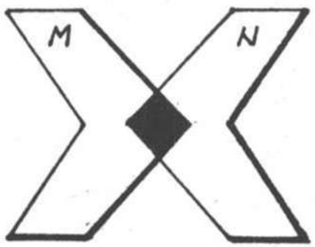
IV–56. $18 \cdot 100 + 18 \cdot 10 + 18 = 1800 + 180 + 18 = 1998 > 1992$.

IV–57. Нека је x број година колико ће имати Ненад кроз 4 године. Тада ће Предраг имати $2x$ година. Сада Ненад има $x - 4$ година, а Предраг $2x - 4$ године. Према услову задатка важи $(x - 4) + (2x - 4) = 13$, одакле добијамо $x = 7$. Дакле, Ненад сада има $7 - 4 = 3$ године, а Предраг $2 \cdot 7 - 4 = 10$ година.

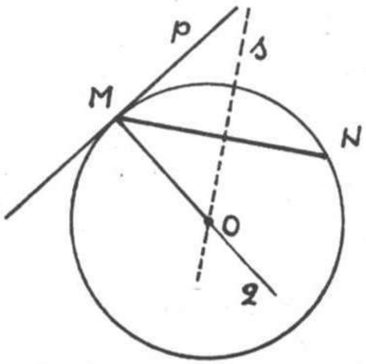
V–55. Нека је $a\,cm$ ивица коцке. Њена површина је $6a^2\,cm^2$. Када се ивица коцке повећа за $1\,cm$ добија се коцка чија је ивица $(a+1)\,cm$ и површина $6(a+1)^2\,cm^2$. Према услову задатка је $6(a+1)^2-6a^2=90$, одакле добијамо $6(2a+1)=90$, односно $2a+1=15$ и коначно $a=7\,cm$. Запремина прве коцке је $V_1=7^3=343\,cm^3$, запремина друге коцке је $V_2=8^3=512\,cm^3$, па је повећање запремине једнако $512-343=169\,cm^3$.

V–56. Елементи 1, 2, 3 припадају само скупу A, елементи 5, 6, 7 припадају само скупу B. Према томе, и скупу A и скупу B припадају елементи 4 и 5, тј. $A\cap B=\{4,5\}$.

V–57. Једно решење дато је на слици 16.



Сл. 16



Сл. 17

VI–55. Упутство. Центар O траженог круга је подједнако удаљен од тачака M и N, па припада симетрали s_{MN} дужи MN, види слику 17. С друге стране, тачка O припада правој q која је нормална на p у тачки M. Према томе, $\{O\}=s_{MN}\cap q$.

VI–56. Бројеви A и B су једнаки нули, дакле и међусобно једнаки.

VI–57. Нека је A скуп решења неједначине $|x-1|\geq 1$, а B скуп решења неједначине $|x-1|\leq 4$. Тада је

$$A=\{2,3,4,5,\dots\}\cup\{0,-1,-2,\dots\},$$
$$B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}.$$

Решење дате неједначине је $A\cap B=\{-3,-2,-1,0,2,3,4,5\}$.

VII–55. Претпоставимо да такав троугао постоји. Ако његову површину стандардно означимо са P, онда важе једнакости $P=\dfrac{a\cdot 2}{2}=\dfrac{b\cdot 4}{2}=\dfrac{c\cdot 6}{2}$. Одатле добијамо $a=P$, $b=\dfrac{P}{2}$, $c=\dfrac{P}{3}$, па даље следи $b+c=\dfrac{P}{2}+\dfrac{P}{3}=\dfrac{5}{6}P<P=a$, што је контрадикција. Према томе, такав троугао не постоји.

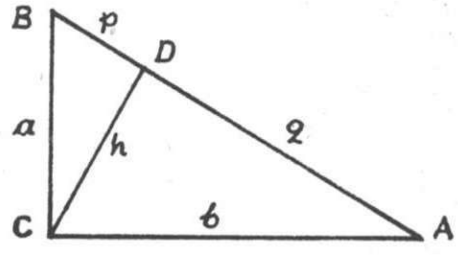
VII–56. Двострука вредност збира $1+3+5+\cdots+(2x-3)+(2x-1)$ је

$$(1+2x-1)+(3+2x-3)+(5+2x-5)+\cdots+(2x-1+1)=x\cdot 2x=2x^2.$$

Према томе, дата једначина прима облик $x^2=1936$ одакле добијамо да је њено решење $x=44$.

VII–57. Нека су a и b катете, а c хипотенуза правоуглог троугла. Означимо са P_a, P_b, P_c површине једнакостраничних троуглова конструисаних над катетама и хипотенузом као основицама. Тада је

$$P_a+P_b=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=(a^2+b^2)\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{c^2\sqrt{3}}{4}=P_c.$$



Сл. 18

VIII–55. Троуглови ACD и BCD су слични (углови код темена D су прави и $\sphericalangle BCD=\sphericalangle CAD$), види слику 18. Из сличности је $p:h=h:q$, па је $h^2=pq$. Дакле $h^2=9\cdot 16$, одакле следи $h=3\cdot 4=12\,cm$. Даље, из правоуглих троуглова BCD и CAD добијамо

$$a=\sqrt{9^2+12^2}=15,\quad b=\sqrt{16^2+12^2}=20.$$

Полупречник описаног круга је је $R=\dfrac{c}{2}=\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{25}{2}\,cm$, а полупречник уписаног круга је $r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{20+15-25}{2}=5\,cm$. Сада за разлику површина описаног и уписаног круга добијамо

$$P_1-P_2=\pi R^2=\pi r^2=\frac{625}{4}\pi-25\pi=\frac{525}{4}\pi\,cm^2.$$

VIII–56. Тражени број равни једнак је $\dbinom{10}{3}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$.

VIII–57. Прво приметимо да новчаница од 5 динара може бити употребљена паран број пута. Заиста, ако би ту новчаницу употребили непаран број пута, онда би помоћу ње била плаћена сума која представља непаран број динара. Но тада разлика до 1992 динара је такође непаран број, па не може бити плаћена само помоћу новчаница од 2 динара. Како је $398\cdot 5=1990<1992<399\cdot 5$, то новчаница од 5 динара може бити употребљена највише 398 пута. Како сума од 1992 динара може бити плаћена и само помоћу новчаница од 2 динара, то је тражени број једнак 399.

ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ

Ови задаци треба да вам служе за вежбу и припремање за математичка такмичења, као и за рад у математичкој секцији. Одабрани задаци нису тешки и може да их реши сваки ученик који редовно прати наставу математике у школи. Задатке треба самостално да решите, а наведени резултати и упутства нека вам служе за контролу. Ученицима који шаљу решења Конкурсних задатака препоручујемо да претходно реше Одабране задатке, јер су они лакши, па овај рад представља корисно увежбавање.

А) *За ученике* IV *разреда*

2495. Било је потребно да се неки број помножи са 8, а он је грешком подељен са 8 и добијен је број 20. Колики је тачан производ?

2496. Дужина правоугаоника је три пута већа од ширине, а збир дужине и ширине је $12\,cm$. Израчунај површину правоугаоника.

Б) *За ученике* V *разреда*

2497. Доказати да су бројеви 11111 и 55555444443333322222111111 дељиви са 41.

2498. Одредити разломак који је једнак $\frac{3}{5}$, тако да је збир његовог бројиоца и именоца једнак 1992.

В) *За ученике* VI *разреда*

2499. Да ли постоји природан број такав да је производ његових цифара једнак 1820?

2500. Кроз теме правог угла правоуглог троугла конструиши праву која тај троугао дели на два једнакокрака троугла.

Г) *За ученике* VII *разреда*

2501. Наставник је задао ученицима да саберу два децимална броја. Један ученик је грешком променио децимални зарез у већем броју за две цифре улево, па је добио збир 95.1834. Међутим, тачан збир (који су остали ученици добили) износио је 345. Које је бројеве требало сабрати?

2502. Подножја нормала спуштених из тачке пресека дијагонала ромба на његове стране су темена правоугаоника. Доказати.

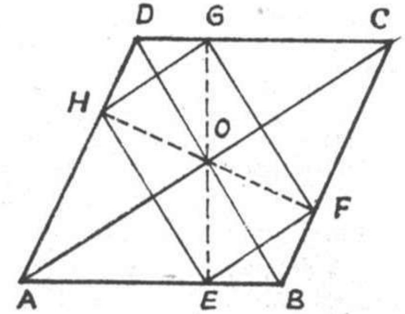
Д) *За ученике* VIII *разреда*

2503. Дато је 100 позитивних бројева. Познато је да је производ сваких 12 бројева већи од 1. Доказати да је производ свих бројева већи од 1.

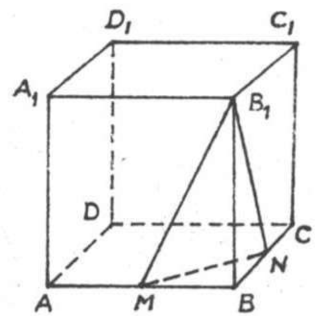
2504. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тачке M и N су средишта ивица AB и BC. Који део запремине коцке износи запремина пирамиде $MBNB_1$.

РЕШЕЊА ОДАБРАНИХ ЗАДАТАКА 2495–2504

2495. Тачан производ је 1280. **2496.** Површина правоугаоника је $27\,cm^2$. **2497.** Како је $11111 : 41 = 271$, први део задатка је доказан. Слично се дељењем доказује и друго тврђење. **2498.** Нека је $\frac{3x}{5x}$ тражени разломак. Према услову задатка је $3x + 5x = 8x = 1992$, одакле следи $x = 249$. Тражени разломак је $\frac{747}{1245}$. **2499.** Не. Прости чиниоци производа цифара неког броја могу бити само бројеви 2, 3, 5 и 7, а међу простим чиниоцима броја 1820 налази се и број 13. **2500.** То је права одређена теменом правог угла и средиштем хипотенузе. **2501.** Број $345 - 95.1834$ чини 0.99 непознатог сабирка, па су тражени бројеви 252.34 и 92.66. **2502.** Како је $OE \perp AB$, $OG \perp CD$, $AB \parallel CD$, то тачке O, E и G припадају једној правој, сл. 19. Даље је $OE = OF = OG = OH$ (као висине подударних троуглова AOB, COB, COD, AOD). Значи, дијагонале EG и FH четвороугла $EFGH$ су једнаке и узајамно се полове, па следи да је тај четвороугао правоугаоник.



Сл. 19



Сл. 20

2503. Нека међу датих 100 бројева има k бројева не већих од 1. Тада је $k \leq 11$. Ако поређамо бројеве у неопадајућем поретку биће $a_1a_2\dots a_{12} > 1$, па је $a_1a_2\dots a_{100} > 1$. **2504.** Нека је a ивица коцке. Запремина пирамиде $MBNB_1$ једнака је $\frac{MB\cdot NB\cdot BB_1}{6} = \frac{a^3}{6}$, дакле 24-ти део запремине коцке (види сл. 20).

КОНКУРСНИ ЗАДАЦИ

Ови задаци су намењени првенствено за самосталан рад оних ученика који се у већој мери интересују за математику. *Решење сваког задатка биће објављено са потписом оног решаваоца који пошаље сасвим тачно и најбоље образложено решење у току првих 20 дана по изласку листа из штампе.*

Имена оних решавалаца који пошаљу бар шест правилних решења конкурсних задатака биће објављена у последњем броју листа за ову школску годину, када ће бити објављена и имена најбољих решавалаца за које су предвиђене награде.

Решавајте постављене задатке, а Редакцији *шаљите решења само оних задатака који су предвиђени за ваш разред.* Задатке решавајте самостално, не тражећи помоћ ни од кога. Слике цртајте прецизно, а решења пишите образложено и читко. На једном листу папира треба написати са исте стране редни број, текст и комплетно решење само једног задатка и свако решење треба потписати пуним именом и презименом и навести разред и одељење, школу, место и кућну адресу. Непотпуна решења, као и одговори без образложења, односно без пуне адресе пошиљаоца, неће се узимати у обзир.

Сва решења која шаљете истовремено ставите у једну коверту и пошаљите их на **адресу Редакције** са назнаком **„Конкурсни задаци“**. На полеђини коверте наведите: своје **име и презиме, разред одељење, школу и место**. Решења задатака из овог броја треба послати најкасније до 31.12.1992. године.

А) *За ученике* IV *разреда*

1353. Количник два броја је 72. Ако од дељеника одузмемо 2000, онда ће количник бити 32. Одреди та два броја.

1354. Пет правоугаоника имају једнаке површине – сваки по $48\,cm^2$, али сви они имају међусобно различите дужине и ширине изражене само у центиметрима. Одреди дужину обима сваког од тих правоугаоника.

Б) *За ученике* V *разреда*

1355. Одредити најмањи природан број који при дељењу са 5, 6 и 7 даје остатак 4.

1356. Децималан број 19.92929292... написати у облику разломка.

В) *За ученике* VI *разреда*

1357. Наћи све просте бројеве $\overline{abc}$ такве да је $a \cdot b \cdot c = 252$.

1358. Доказати да не постоји права која садржи једно теме неједнакостраничног троугла, таква да га разлаже на два подударна троугла.

Г) *За ученике* VII *разреда*

1359. Наћи четвороцифрен број који је једнак квадрату двоцифреног броја који чине последње две цифре тог броја.

1360. Доказати да се бисектрисе спољашњих углова паралелограма секу тако да образују правоугаоник.

Д) *За ученике* VIII *разреда*

1361. Четири ковача поткивају 5 коња. Које најмање време ће утрошити за посао, ако сваки ковач утроши на једну потковицу 5 минута? (Коњ не може стајати на две ноге, тј не могу га истовремено поткивати два ковача.)

1362. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тачке M и N су средишта ивица AB и BC. Како се односе површина коцке и површина пирамиде $MBNB_1$.

РЕШЕЊА КОНКУРСНИХ ЗАДАТАКА 1333–1342

1343. *Редом су записани бројеви* 123456789101112131415.... *Која цифра се налази на* 1992. *месту?*

Првих девет цифара у низу употребљено је за записивање једноцифрених бројева. Следећих $90 \cdot 2 = 180$ цифара употребљено је за записивање двоцифрених бројева. До 1992-гог места закључно записано је још $1992 - 180 - 9 = 1803$ цифара. Помоћу њих записано је $1803 : 3 = 601$ троцифрених бројева и то: 100, 101, 102, ..., 700. Према томе, на 1992-ом месту налази се цифра нула.

Кљајевић Љупко, IV_1 ОШ „Чеда Милосављевић“, Пецка

1344. *Квадрат и правоугаоник имају једнаке површине. Површина квадрата је* $36\,cm^2$, *а дужина правоугаоника је* $9\,cm$. *Чији је обим већи и за колико?*

Пошто је површина квадрата једнака $36\,cm^2$, то је његова страница $6\,cm$. Ширина правоугаоника је $36 : 9 = 4\,cm$. Обим квадрата је $4 \cdot 6 = 24\,cm$, а обим правоугаоника је $2(4+9) = 26\,cm$. Према томе обим правоугаоника је већи за $2\,cm$.

Бољановић Марина, IV_3 ОШ „Филип Кљајић Фића“, Београд

1345. *Дат је скуп* A. *Одредити скуп* X, *ако је* $A \cap X = A$ *и* $X \setminus A = \emptyset$.

Пошто је $A \cap X = A$, то је $A \subset X$, а из услова $X \setminus A = \emptyset$ следи да скуп X не садржи ниједан елемент који није садржан и у скупу A. Према томе, важи једнакост $A = X$.

Митровић Марија, V_4 ОШ „Ђура Јакшић“, Ћуприја

1346. *На правој* p *дате су тачке* A, B *и* C, *а тачке* D *и* E *не припадају правој* p. *При томе, правој* DE *не припада ниједна од тачака* A, B *и* C. *Колико правих, а колико дужи је одређено датим системом тачака?*

Датим системом тачака одређено је 10 дужи. То су: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. Међутим, тим системом тачака одређено је 8 правих. То су: права p (која садржи дужи AB, AC, BC) и праве AD, AE, BD, BE, CD, CE и DE.

Милошевић Круна, V_a ОШ „Жарко Зрењанин“, Остојићево

1347. *У троуглу* KMN *важи:* $\sphericalangle K = 37°$, $\sphericalangle N = 74°$, $\sphericalangle M = 69°$, NP *је симетрала угла* N *и* $P \in KM$. *Доказати да је* $MP < PK$.

Како је NP симетрала угла N, то су углови троугла KPN једнаки 37°, 106°, 37°. Дакле, троугао KPN је једнакокраки и важи $PK \cong NP$, сл. 21. С друге стране, углови троугла PMN су 74°, 69° и 37°, па следи да је $MN > NP > MP$. Према томе, $MP < PK$.

Бајић Милка, VI_2 ОШ „Јован Поповић“, Кикинда

1348. *Базен се може пунити трима цевима. Првом се може напунити за 6 часова, другом за 8 часова, а трећом за 12 часова. За колико часова ће се напунити* $\frac{3}{4}$ *базена ако се истовремено пуни са све три цеви?*

Ако се базен пуни са све три цеви, онда ће се за један час напунити $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{3}{8}$ базена, а за два часа ће се напунити $2\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$ базена.

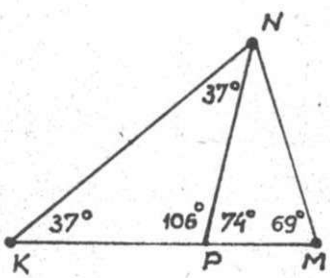
Недељковић Владимир, VI_2 ОШ „Чибуковачки партизани", Краљево

1349. *У стоцифреном броју* 1234567890 1234567890 . . . 1234567890 *избрисане су све цифре које стоје на непарним местима. У добијеном педесетоцифреном броју поново су избрисане цифре које стоје на непарним местима. Брисање цифара је продужено на исти начин све док нису избрисане све цифре. Која је цифра последња избрисана?*

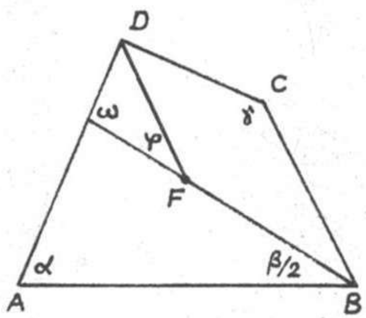
После првог брисања остали су бројеви на парним местима; после другог брисања остали су бројеви који стоје на местима која су дељива са 4; после трећег брисања остали су бројеви који стоје на местима која су дељива са 8 итд. Последња избрисана цифра је на месту највећег степена двојке који је мањи од 100, а то је $2^6=64$, тј. последња избрисана цифра је 4.

Аранђеловић Биљана, VII_3 ОШ „Коста Стаменковић", Лесковац

Напомена. Многи ученици су послали решење овог задатка у коме су ефективно записали свих 100 цифара и прецртавали цифре онако како је у задатку речено, поново записивали непрецртане цифре и наставили прецртавање све док на крају нису прецртали цифру 4. Наравно да ћемо и то решење прихватити као тачно. Међутим такав поступак решавања би тешко довео до решења када би у услову задатка стајало да је дат број који има, на пример, милион цифара.



Сл. 21



Сл. 22

1350. *Оштар угао који граде симетрале супротних унутрашњих углова четвороугла једнак је полуразлици друга два угла. Доказати.*

Нека је EB симетрала угла β, а DF симетрала угла δ, сл. 22. Тада из троугла EFD добијамо $\varphi=180°-\omega-\frac{\delta}{2}$, а из троугла ABE добијамо $\omega=\alpha+\frac{\beta}{2}$. На основу тога следи

$$\varphi=180°-\alpha-\frac{\beta}{2}-\frac{\delta}{2}=180°-\alpha-\frac{\beta+\delta}{2}.$$

Како је $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$, то је $\frac{\beta+\delta}{2}=180°-\frac{\alpha+\gamma}{2}$, па је

$$\varphi=180°-\alpha-180°+\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Јоцковић Јелена, VII_5 ОШ „Владислав Рибникар", Београд

1351. *Директор предузећа радним даном долази на станицу у 8 сати. Истовремено из предузећа на станицу стиже аутомобил којим се одвози до предузећа. Једном је директор дошао на станицу у 7 сати, пошао пешице према предузећу, срео аутомобил и стигао је у предузеће 20 минута раније од уобичајеног доласка.*

(а) *У колико сати су се сусрели директор и аутомобил?*

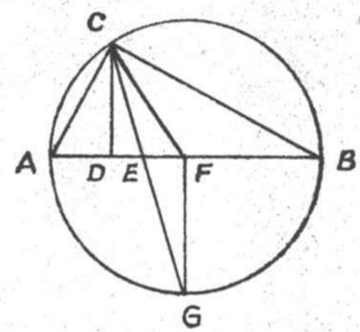
(б) *Колико пута се брже директор креће аутомобилом у односу на брзину пешачења?*

(а) Пут који је директор пешачио аутомобил би прешао за 10 минута, јер ако би директор пустио аутомобил да иде на станицу и да се врати тамо где су се срели, онда би то трајало 20 минута. Одатле следи да су се директор и аутомобил срели у 7^{50} (аутомобилу је било потребно још 10 минута до станице, где је он требао да стигне у 8^{00}).

(б) Аутомобил би за 10 минута прешао пут који је директор препешачио за 50 минута (јер директор је кренуо у 7^{00}, а срео аутомобил у 7^{50}). Према томе аутомобил је пет пута бржи од директора.

Месарош Виола, $VIII_c$ ОШ „VIII ВУБ", Суботица

1352. *Израчунати углове троугла у коме симетрала угла, висина и тежишна дуж из истог темена деле угао на четири једнака дела.*



Сл. 23

Нека су D, E и F, редом, пресечне тачке висине, симетрале угла и тежишне дужи из темена C са страницом AB троугла ABC и нека је G пресек симетрале угла BCA и круга описаног око тог троугла, сл. 23. Тада тачка G припада и симетрали дужи AB. По претпоставци је

$$\sphericalangle ACD=\sphericalangle DCE=\sphericalangle ECF=\sphericalangle FCB.$$

Даље, из $CD \parallel FG$ следи

$$\sphericalangle FCG=\sphericalangle DCE=\sphericalangle CGF,$$

па је троугао CGF једнакокрак и тачка F припада симетрали дужи CG. Како је она средиште дужи AB, то следи да је F центар круга описаног око троугла ABC. Дакле, $\sphericalangle BCA=90°$, $\sphericalangle DCB=67°30'$ и $\sphericalangle ABC=22°30'$.

Милин Зорка, $VIII_3$ ОШ „Јован Веселинов Жарко", Шид

♣ ♡ ◇ ♠ ЗАНИМЉИВОСТИ ♠ ◇ ♡ ♣

У прошлом броју нашег и Вашег листа могли сте да прочитате легенду о настанку шаха. Она није једина. Ево још једне, мање вероватне, али надамо се занимљиве.

Пре много векова на Земљи су боравили Богови. У паузама обављања божанских послова играли су шах. И тако су они дуго боравили на Земљи, али када су видели какви смо ми људи, напустили су Земљу и отишли на неку веома далеку планету, а као доказ свог боравка на Земљи оставили су људима шах.

Сл. 24 (Илустровала: *Смиљанић Милче*, VII₁ ОШ „Бранко Радичевић, Београд)

О шаху и шаховској табли људи су измислили не само легенде него и много занимљивих математичких и шаховских проблема. Ево неколико, које могу решавати и они који не играју шах.

1. На шаховском турниру учествовало је седам шахиста. Сваки је са сваким одиграо по једну партију. Колико су укупно партија они одиграли?

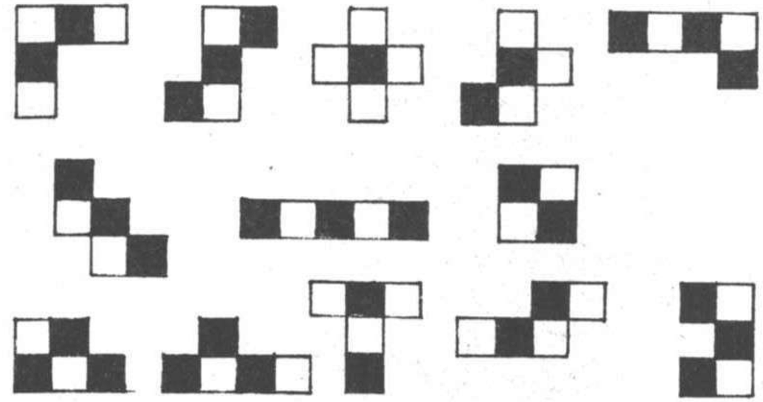
2. На празну шаховску таблу треба поставити једног белог и једног црног пешака. Колико различитих положаја могу они заузимати?

3. Колико највише поља шаховске табле може пресећи једна права?

4. Колико је квадрата, различитих по величини или по положају, могуће нацртати на шаховској табли 8 x 8 поља, тако да сваки од њих садржи само цела поља?

5. Из шаховске табле 8 x 8 поља изрезана су два поља која се налазе у доњем левом и горњем десном углу. Да ли се преостали део шаховске табле може прекрити помоћу 31 домина величине 2 x 1?

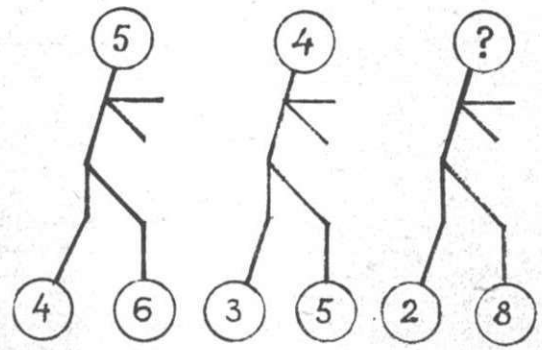
6. На слици 25 дато је 13 делова шаховске табле. Нацртајте исте такве делове на посебном листу папира исеците их и покушајте од њих саставити шаховску таблу.



Сл. 25

7. У доњем левом углу шаховске табле налази се скакач. Да ли се он може кретати по шаховској табли по правилима шаховске игре, тако да на свако поље табле стане тачно једанпут?

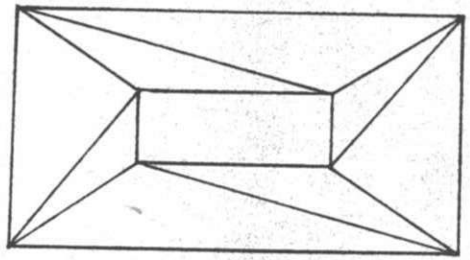
Тражење непознатог броја. На свакој од слика 26 и 27 недостаје по један број. Одредити бројеве који недостају.



Сл. 26

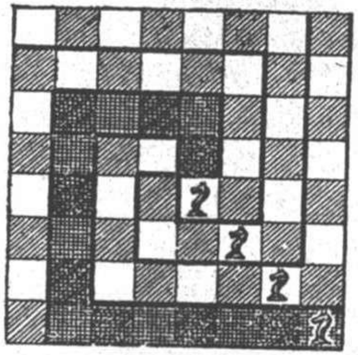
Сл. 27

Цртање фигуре једним потезом. Да ли се фигура на слици 28 може нацртати једним потезом (тако да свака од дужи буде нацртана тачно једанпут).



Сл. 28

Решење задатка из рубрике ЗАНИМЉИВОСТИ, МЛ XXVII–2: Шаховску таблу треба поделити као на слици 29.



Сл. 29

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 128

Решење задатка. Користећи формулу $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ лако се одређују сви троугаони бројеви који су мањи од 1992. То су следећи бројеви: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, 666, 703, 741, 780, 820, 861, 903, 946, 990, 1035, 1081, 1128, 1176, 1225, 1275, 1326, 1378, 1431, 1485, 1540, 1596, 1653, 1711, 1770, 1830, 1891, 1953. Лако се види да се број $T_{62} = 1953$ може са два троугаона броја допунити до збира 1992:

$$T_{62} + T_8 + T_2 = 1953 + 36 + 3 = 1992.$$

Није тешко утврдити да то није једина репрезентација броја 1992 у облику збира три троугаона броја. Сва решења можемо брзо одредити користећи рачунар помоћу следећег програма написаног у BASIC-у:


```
10 LET n = 0
20 FOR x = 1 TO 62
30 FOR y = x TO 62
40 FOR z = y TO 62
50 LET a = 0.5 * x * (x + 1)
60 LET b = 0.5 * y * (y + 1)
70 LET c = 0.5 * z * (z + 1)
80 IF a + b + c = 1992 THEN LET n = n + 1:
   PRINT n")"x","y","z";"a","b","c
90 NEXT z
100 NEXT y
110 NEXT x
120 END
```

Има укупно 18 различитих решења (не рачунајући поредак сабирака) и то:

$T_2 + T_8 + T_{62} = 3 + 36 + 1953,$
$T_4 + T_{13} + T_{61} = 10 + 91 + 1891,$
$T_8 + T_{35} + T_{51} = 36 + 630 + 1326,$
$T_9 + T_{26} + T_{56} = 45 + 351 + 1596,$
$T_{13} + T_{40} + T_{46} = 91 + 820 + 1081,$
$T_{15} + T_{23} + T_{56} = 120 + 276 + 1596,$
$T_{21} + T_{23} + T_{54} = 231 + 276 + 1485,$
$T_{26} + T_{30} + T_{48} = 351 + 465 + 1176,$
$T_{30} + T_{36} + T_{41} = 465 + 666 + 861,$
$T_2 + T_{41} + T_{47} = 3 + 861 + 1128,$
$T_7 + T_{22} + T_{58} = 28 + 253 + 1711,$
$T_8 + T_{39} + T_{48} = 36 + 780 + 1176,$
$T_{13} + T_{19} + T_{58} = 91 + 190 + 1711,$
$T_{14} + T_{33} + T_{51} = 105 + 561 + 1326,$
$T_{20} + T_{26} + T_{53} = 210 + 351 + 1431,$
$T_{21} + T_{29} + T_{51} = 231 + 435 + 1326,$
$T_{26} + T_{39} + T_{41} = 351 + 780 + 861,$
$T_{32} + T_{33} + T_{42} = 528 + 561 + 903.$

Стигао је велики број писама у којима су ученици послали једно или више од наведених репрезентација броја 1992 у облику збира три троугаона броја. Сваки ученик који је у предвиђеном року послао бар једно од 18 могућних решења конкурисао је за награду. Жребом су одређени следећи добитници награда:

1. Бабић Јовица, $VIII_1$ ОШ „Моша Пијаде“; 22 408 Врдник; **2. Булатовић Катарина**, $VIII_3$ ОШ „Ристо Манојловић“, 82 210 Колашин; **3. Весковић Невена**, $VIII_3$ ОШ „Хероји таковског краја“, 32 300 Горњи Милановац; **4. Војновић Славица**, $VIII_2$ ОШ „Жарко Зрењанин“, 21 423 Обровац; **5. Вујисић Ана**, VII_2 ОШ „Милорад–Муса Бурзан“, 81 000 Подгорица; **6. Вучковић Александар**, VI_2 ОШ „Свети Сава“, 34 227 Баточина; **7. Гојковић Тамара**, $VIII_3$ ОШ „Коста Стаменковић“, 16 000 Лесковац; **8. Ђорђевић Мирјана**, $VIII_2$ ОШ „Олга Милошевић“, 11 420 Смедеревска Паланка; **9. Жујовић Милица**, V_1 ОШ „Душан Јерковић“, 31 000 Ужице; **10. Илић Љиљана**, VII_1 ОШ „Урош Предић“, 23 262 Томашевац; **11. Кочевић Јовица**, VI_5 ОШ „Милица Павловић“, 32 000 Чачак; **12. Крњић Ивана**, V ОШ „Иво Андрић“, 32 308 Прањани; **13. Кузељевић Дејан**, VII_4 ОШ „Живко Љујић“, 31 320 Нова Варош; **14. Кулик Јана**, VI_A ОШ „Људовит Штур“, 21 211 Кисач; **15. Лазић Ирина**, V_4 ОШ „Јован Цвијић“, 15 300 Лозница; **16. Морачанин Иван**, $VIII_2$ ОШ „Марко Миљанов“, 84 000 Бијело Поље; **17. Недић Урош**, VI_4 ОШ „Свети Сава“, 11 320 Велика Плана; **18. Николић Јелена**, $VIII_1$ ОШ „Вук Караџић“, 37 000 Крушевац; **19. Пејчић Ана**, VII_A ОШ „Нада Матић“, 31 000 Ужице; **20. Пешић Радмило**, $VIII_3$ ОШ „8 септембар“, 18 300 Пирот; **21. Пешовић Биљана**, V_4 ОШ „Јован Поповић“, 21 000 Нови Сад; **22. Стаменковић Данијела**, VII_3 ОШ „Филип Филиповић“, 18 000 Ниш; **23. Томов Драгана**, VII_4 ОШ „Ј. Ј. Змај“, 17 530 Сурдулица; **24. Цоцић Марина**, V_1 ОШ „Петар Кочић“, 22 320 Инђија; **25. Шљивић Ненад**, $VIII_1$ ОШ „Радоје Домановић“, 35 250 Параћин.

Награде ће бити послате поштом. Добитницима награда честитамо, а осталим решаваоцима наградних задатака желимо убудуће више среће.

♡ НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 129 ♡

Представити број 1993 у облику збира квадрата два природна броја.

Решења слати на адресу: **Математички лист, Београд, Кнез-Михаилова 35/IV, п.п. 728**, са обавезном назнаком **Наградни задатак бр. 129**. На полеђини коверте обавезно написати: **име и презиме, разред, одељење, школу и место** (са поштанским бројем).

Решење задатка послати најкасније до 31.12.1992. године. Међу успешним решаваоцима овог задатка жребом ће бити одређено до 25 ученика који ће бити награђени.

♡ СПЕЦИЈАЛНИ НОВОГОДИШЊИ НАГРАДНИ ЗАДАТАК ♡

Дат је правоугли паралелепипед чија је дужина $9\,cm$, ширина $5\,cm$ и висина $4\,cm$. Тај паралелепипед треба разрезати на 180 јединичних коцкица. (При томе дозвољено је после првог резања спојити већи број делова и резати их истовремено.) Са колико се најмање резова то може урадити. Образложити одговор.

Решења слати на адресу: **Математички лист, Београд, Кнез-Михаилова 35/IV, п.п. 728**, са обавезном назнаком **Новогодишњи наградни задатак**. На полеђини коверте обавезно написати: **име и презиме, разред, одељење, школу и место** (са поштанским бројем).

Решење задатка послати најкасније до 31.12.1992. године. За решаваоце овог задатка предвиђено је 10 специјалних награда.

**УРЕДНИШТВО МАТЕМАТИЧКОГ ЛИСТА
ЖЕЛИ СВОЈИМ ЧИТАОЦИМА, УЧЕНИЦИМА И НАСТАВНИЦИМА,
СРЕЋНУ И УСПЕШНУ НОВУ 1993. ГОДИНУ.**

ŠAHOVSKI INFORMATOR GOST MATEMATIČKOG LISTA

SEPARAT: "FIŠER–SPASKI 10:5"

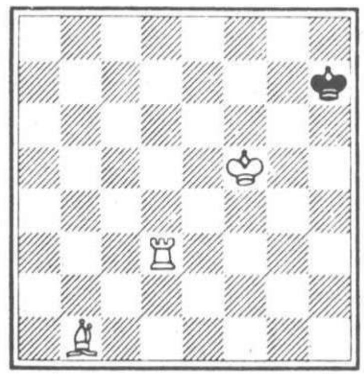
Pored knjige "FIŠEROVE PARTIJE" koja je već izašla iz štampe, uskoro će se pojaviti i separat "FIŠER–SPASKI (10:5)". Svih 30 partija sa meča FIŠER–SPASKI odigranih na Svetom Stefanu i Beogradu biće uključeno u ovaj separat od 24 strane. Partije su komentarisali: Sejravan, Balašov, Timan, Spilman, Matanović, Damljanović i Matulović. Pored partija, separat sadrži i fotografije sa dela meča odigranog u Beogradu.

REZULTATI KONKURSA ZA NAGRADNI ŠAHOVSKI ZADATAK Br. 22

Beli dobja mat u dva poteza na sledeći naqin: 1. Sd5 f6, 2. Ke6 Lc8 mat. (Zanimljivo je da je data pozicija nastala u partiji Šort-Beljavski, koja je odigrana na turniru u Linaresu 1992. godine i da je upravo na navedeni način Šort pomogao Beljavskom da pobedi.)

U predviđenom roku stigao je veliki broj tačnih rešenja. Žrebom su određeni sledeći dobitnici nagrada:

1. Dokić Ivan, VI_3 OŠ "N.H. Siniša Nikolajević", 11050 Beograd; **2. Đurić Petar**, $VIII_3$ OŠ "Mirko Jovanović", 34000 Kragujevac; **3. Janković Dimitrije**, $VIII_2$ OŠ "Braća Ribar", 11000 Beograd; **4. Mijatović Dragan**, VII_3 OŠ "Mileva Kosovac", 15000 Šabac; **5. Mršić Siniša**, VII_5 OŠ "Jovan Grčić-Milenko", 21000 Beočin; **6. Nikolić Milan**, V_5 OŠ "Karađorđe", 34310 Topola; **7. Novaković Aleksandar**, $VIII_1$ OŠ "Moša Pijade", 12208 Kostolac; **8. Pešić Radmilo**, $VIII_3$ OŠ "8. septembar", 18300 Pirot; **9. Prijić Dane**, VI_5 OŠ "Žarko Zrenjanin", 21000 Novi Sad; **10. Šćurec Berislav**, VII_1 OŠ "Stevica Jovanović", 26000 Pančevo.



NAGRADNI ŠAHOVSKI ZADATAK BR. 23

U poziciji na dijagramu beli je na potezu i daje mat u dva poteza.

Rešenja slati na adresu:

**Matematički list
Knez-Mihailova 35/IV
p.p. 728
11001 Beograd**

sa obaveznom naznakom "ŠAH" i to najkasnije do 31.12.1992. godine. Na poleđini koverte obavezno napisati **ime i prezime, razred, odeljenje, školu i mesto** (sa poštanskim brojem).

ОБАВЕШТЕЊА ПРЕТПЛАТНИЦИМА

1. Уредништво позива наставнике и професоре математике, као и остале читаоце да шаљу своје прилоге за лист: чланке одабране задатке, задатке са пријемних испита и математичких такмичења, занимљивости итд. **Рукописи се не враћају.**

2. *Математички лист* намењен је свим ученицима IV–VIII разреда основне школе. Лист излази шест пута у току школске године и то: 15.09, 01.11, 15.12, 01.02, 15.03. и 15.05.

3. Ако се *Математички лист* наручи и претплата изврши:

1° **до** 15.10.1992. **годишња претплата (за свих шест бројева) износи** 3000 **дин**;
2° **до** 15.11.1992. **годишња претплата (за свих шест бројева) износи** 4800 **дин**;
3° **до** 15.12.1992. **годишња претплата (за свих шест бројева) износи** 7800 **дин**;
4° **после** 15.12.1992. **годишња претплата (за свих шест бројева) износи** 12000 **дин**.

Ако се наручи више од 20 комплета *Математичког листа* и претплата изврши до одређеног рока (тачке 1°, 2°), наручиоцима одобравамо рабат (15% односно 10%). Никакви други одбици се не уважавају.

Наруџбина за *Математички лист* се шаље писменим путем или телефоном Друштва математичара 011-638-263. Уплата се врши на **жиро рачун Друштва математичара Србије број** 60806-678-78700, Београд, Кнез-Михаилова 35/IV. Обавезно навести **тачну адресу** на коју *Математички лист* треба доставити.

4. Обавештавамо Вас да можете поручити и остала издања Друштва математичара Србије. Информације о тим издањима можете пронаћи у посебном Каталогу издања Друштва за школску 1992/93. годину.

5. Моле се повериоци *Математичког листа* да измире сва дуговања.

6. Све прилоге, примедбе и наруџбине слати *искључиво* на адресу:

Математички лист, Кнез-Михаилова 35/IV, **п.п. 728, 11001 Београд.**

САДРЖАЈ