MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XI

4

DŽEROLAMO KARDANO

BEOGRAD
1977.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. XI, broj 4 (1976/77)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA SR SRBIJE
Beograd, Knez Mihajlova 35/IV, p. p. 728.

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

Bogomila Kolenko (Koper)

NAČIN ZA DOLAČANJE KRITERIJA DELJIVOSTI ŠTEVIL S POLJUBNIM PLAŠTEVILOM

Pri reševanju različnih računskih problemov se večkrat srečamo z nalogo, kako ugotoviti, ali je neko večmestno število a deljivo z določenim praštevilom b. Vsi poznamo že nekaj enostavnih kriterijev za deljivost s praštevili 2, 3, 5, 11. Naša naloga je nekoliko splošnejša: dobiti hočemo primeren način za ugotavljanje deljivosti poljubnega števila a s poljubnim številom b, (kot npr. 7, 13, 17 itd.).

Število a pišemo takole $a=10\,k+e$, npr.: $3\,215=10\cdot 321+5$. Desno in levo stran enačbe $a=10k+e$ lahko pomnožimo s katerimkoli številom različnim od 0. Da bi dobili neko primerno obliko za nadaljne razmišljanje o deljivosti števila a s praštevilom b, mora biti število s katerim množimo *tuje* proti številu b.* Pomnožimo to enačbo $a=10k+e$ s čim manjšim številom, ki je tako, da bo njegov 10 kratnik blizu kakega mnogokratnika praštevila b, za katerega določamo deljivost. Naj bo to število $x: xa=10xk+xe$. Prednost tega načina je v tem, da si sami lahko s sklepanjem ustvarimo kriterij o deljivosti za poljubno praštevilo.

Primer 1. Ustvarimo si kriterij za deljivost števila a s praštevilom 7!

Poiščimo najprej število s katerim je treba pomnožiti levo in desno stran enačbe $a=10k+e$; desetkratnik števila 1 je 10 in se razlikuje od najbližnjega mnogokratnika števila 7 za 3; desetkratnik števila 2 je 20 in se le za 1 razlikuje od njemu najbližnjega 3 kratnika števila 7, t.j. 21. Zato bomo v tem primeru množili a z $x=2$. Tako dobimo: $a=10\,k+e \Rightarrow 2a=20\,k+2\,e \Rightarrow 2a=(21k-1)\,k+2\,e=21\,k-k+2\,e \Rightarrow 2\,a=21\,k-(k-2\,e)$.

Iz tega zapisa vidimo, da je $2a$ debljivo s 7 tedaj in le tedaj, če 7 deli $k-2e$, kaj pišemo: $7\mid(k-2e)$. Ker je število 2 tuje napram številu 7, predstavlja pogoj da $7\mid(k-2e)$ obenem tudi pogoj, da $7\mid a$.

* Števila so si tuja, če razen 1 nimajo nobenega skupnega delitelja.

Torej: *Število je deljivo s praštevilom 7 tedaj in le tedaj, če je razlika števila desetic in dvakratnika števila enic tega števila deljiva s številom 7.*

Ugotovimo s pomočjo tega pravila, ali je število 26 684 deljivo s številom 7! V tem primeru je $k=2\,668$ (število desetic) in $e=4$; $k-2e=2\,660$, zato $7 \mid 26\,684$ tedaj če $7 \mid 2\,660$. Postopek ponovimo za $k=266$, $e=0$; $k-2e=266 \Rightarrow 7 \mid 2\,660$ če $7 \mid 266$. Če še naprej uporabimo že navedeno pravilo, dobimo $k=26$, $e=6$: $k-2e=14$ in ker $7 \mid 14 \Rightarrow$ da $7 \mid 26\,684$.

Primer 2. Določimo kriterij za deljivost števila a s praštevilom 13.

Če 13 po vrsti množimo z 1, 2, 3 opazimo, da se $3 \cdot 13=39$ le za 1 razlikuje od najbližnjega mnogokratnika števila 10 — od 40. Zato množimo a s 4 takole: $a=10k+e \Rightarrow 4a=40k+4e=(39+1)k+ +4e \Rightarrow 4a=39k+(k+4e)$.

Vidimo, da $13 \mid 4a$ tedaj in le tedaj, če $13 \mid (k+4e)$ in ker sta 13 in 4 med seboj tuji števili je ta pogoj obenem pogoj za deljivost števila a s številom 13.

Pravilo: *Število je deljivo s številom 13 tedaj in le tedaj, če je vsota desetic in štirikratnika števila enic danega števila a deljiva s številom 13.*

Ugotovimo s pomočjo tega kriterija, ali je število 7 468 deljivo s 13: $k=746$; $e=8$; $k+4e=778$. Ponovno $k+4e=109$ in nadalje $k+4e=46$ in ker 13 ne deli 46, 13 ne deli števila 7 468.

Primer 3. Ustvarimo si kriterij za deljivost s 37. Znano je, da je $3 \cdot 37=111=110+1$ in da je $110=10 \cdot 11$. Zato število $a=10k+e$ pomnožimo z 11, ki je tuje številu 37:

$$11a=110k+11e=111k-k+11e=111k-(k-11e).$$

Torej: če $37 \mid (k-11e) \Rightarrow 37 \mid 11a$ in ker sta 11 in 37 tuji števili $\Rightarrow 37 \mid a$.

V praksi postopamo tako:

$$\begin{array}{rl} 67321\underline{|5} & \\ -\ 55 & \ldots\ldots\ldots\ 11 \cdot 5 \\ \hline 6726\underline{|6} & \\ -66 & \ldots\ldots\ldots\ 11 \cdot 6 \\ \hline 66|6|0 & \\ -66 & \ldots\ldots\ldots\ 11 \cdot 6 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ker dobimo $k-11e=0$, je seveda število 673 215 s 37 deljivo.

Opomba. Take kriterije si ustvarimo sami le za taka večja praštevila kot so npr.: 17, 23, 37 itd., ker so že znana pravila za deljivost z 2, 3, 5 in podobna enostavnejša od tega postopka!

Naloge

1. Ustvari si sam kriterije za deljivost s 17, 19, 23.

2. V številu 6*8987 določi cifro na mestu znaka * tako, da bo to število deljivo s številom 17!

3. Kakšen pogoj mora biti izpolnjen, da bo število a deljivo hkrati s 3, 5 in 7?

4. Pokaži, da se tem postupkom da dobiti več *različnih* kriterijev za deljivost s poljubnim številom (npr. s 7).

НЕКЕ ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ*

У шестом разреду учи се о основним неједнакостима које важе за странице сваког троугла, тј. да је једна страница троугла већа од разлике, а мања од збира других двеју страница истог троугла.

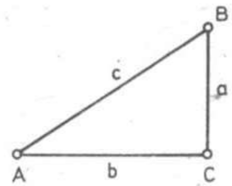
У овом чланку приказаћемо још неколико геометријских неједнакости.

1. *За странице правоуглог троугла ABC (сл. 1) важи неједнакост:*

$$a+b \leqslant c\sqrt{2}. \tag{1}$$

Доказ. По Питагориној теореми је $a^2+b^2=c^2$. Међутим, лако се уверавамо да је

$$a^2+b^2=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(a-b)^2}{2}.$$



Сл. 1

Стога је

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(a-b)^2}{2}=c^2. \tag{2}$$

* Сви наведени примери неједнакости налазе се у књизи „Приручник за такмичење средњошколаца II — Геометријске неједнакости" од Д. С. Митриновића, П. М. Васића, Р. Ж. Ђорђевића и Р. Р. Јањића.

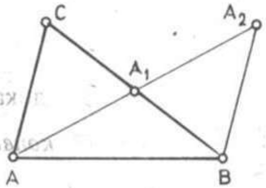
Пошто је квадрат сваког реалног броја позитиван, односно нула ако је сам број нула, то је други сабирак на левој страни једнакости (2) ненегативан, тј. $\frac{(a-b)^2}{2} \geqslant 0$. Због тога можемо на писати да је $\frac{(a+b)^2}{2} \leqslant c^2$, односно $a+b \leqslant c\sqrt{2}$, што је требало и доказати.

2. *Ако су t_a, t_b, t_c тежишне дужи и s полуобим троугла ABC (сл. 2), тада је*

(3) $$s < t_a + t_b + t_c < 2s.$$

Доказ. Нека је A_1 средиште странице BC троугла ABC и нека је A_2 тачка симетрична са тачком A_1 у односу на праву BC. Тада је (због $\triangle AA_1C \cong A_1BA_2$) $BA_2 = AC$. Стога је

$$AA_2 = 2\,t_a < A_2B + AB = b + c,$$



Сл. 2

тј.

(4) $$2\,t_a < b + c.$$

Због $t_a > c - \frac{a}{2}$ (из $\triangle ABA_1$) и $t_a > b - \frac{a}{2}$ (из $\triangle ACA_1$), после сабирања, добијамо:

(5) $$2\,t_a > b + c - a.$$

Из (4) и (5) произилази

(6) $$b + c - a < 2\,t_a < b + c.$$

На сличан начин може се доказати да важе и неједнакости

(7) $$a + c - b < 2\,t_b < a + c,$$

(8) $$a + b - c < 2\,t_c < a + b.$$

Сабирањем неједнакости (6), (7) и (8) добијамо неједнакост (3). Овим је доказ завршен.

3. *За странице a, b, и c произвољног троугла ABC важи:*

(9) $$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Доказ. Како је $b+c > a$, то је $2(b+c) > a+b+c$, па је

$$b+a > \frac{1}{2}(a+b+c).$$

На сличан начин се добија

$$c+a > \frac{1}{2}(a+b+c) \quad \text{и} \quad a+b > \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Отуд следује

$$\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}, \quad \frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}, \quad \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c},$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2,$$

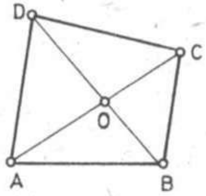
шта се требало доказати.

4. *Ако за конвексни четвороугао $ABCD$ (сл. 3) важи $AB + BD = AC + CD$, тада је $AB < AC$.*

Доказ. Нека је O пресек дијагонала AC и BD. Тада је $OA + OB > AB$, $OC + OD > CD$. Сабирањем ових неједнакости добијамо

(10) $$AC + BD > AB + CD.$$

Како је, по претпоставци, $AB + BD = AC + CD$, одакле је $CD = AB + BD - AC$, то из неједнакости (10) добијамо:



Сл. 3

$$AC + BD > AB + AB + BD - AC \Rightarrow 2\,AC > 2\,AB \Rightarrow AC > AB.$$

Задаци

1. Ако тачка S лежи у троуглу ABC, и ако је s полуобим троугла, доказати да је

$$s < AS + BS + CS < 2s.$$

2. Доказати да је код сваког конвексног четвороугла збир двеју дијагонала већи од полуобима а мањи од обима четвороугла.

3. Ако су a, b, c, d дужине страница једног четвороугла и e, f дужине његових дијагонала, доказати да важи неједнакост

$$(a+b+c+d)(e+f) > 2(e^2+f^2).$$

Д. М.

IZ LETNJE ŠKOLE MLADIH MATEMATIČARA
UČENIKA OSNOVNE ŠKOLE

Vladimir Stojanović (Beograd)

BRZO PREVOĐENJE BROJEVA IZ DEKADNOG BROJNOG SISTEMA U BINARNI I OBRNUTO

Prilikom svakodnevnog čitanja i zapisivanja brojeva vršimo grupisanje svakih deset tzv. osnovnih jedinica u desetice, svakih deset desetica u stotine, itd. Na taj način svaki broj možemo, koristeći se tzv. *pozicionim* načinom pisanja, zapisati sa svega deset cifara. Pritom svaka cifra, zavisno od mesta (pozicije), označava broj jedinica, desetica, stotina, itd. Na primer, broj 3 606 označava: $\mathbf{3}\cdot 1000+\mathbf{6}\cdot 100+\mathbf{0}\cdot 10+\mathbf{6}\cdot 1$, odnosno: $\mathbf{3}\cdot 10^3+\mathbf{6}\cdot 10^2+\mathbf{0}\cdot 10^1+\mathbf{6}\cdot 10^0$. (Po definiciji je $10^0=1$.) Ovakav način zapisivanja i računanja naziva se *dekadni brojni sistem* ili *brojni sistem sa osnovom deset.*

Prebrojavanje se može vršiti udruživanjem osnovnih jedinica u grupe manje ili veće od deset, tj. možemo koristiti brojne sisteme sa različitim osnovama. Tako su trgovci 12 jedinica nazivali *tuce*, a 12 tucadi *gros.* Za poziciono zapisivanje ovako izračunatih brojeva (sa osnovom 12) bilo bi neophodno koristiti 12 različitih cifara. Broj 100 bio bi predstavljen u ovom sistemu u vidu $\mathbf{8}\cdot 12+\mathbf{4}$ i pisao bi se kao **84.***

Danas, u eri elektronike, veliku primenu našao je tzv. *binarni brojni sistem.* To je brojni sistem sa osnovom 2, u kome svake dve jedinice nižeg reda daju jednu jedinicu višeg reda, pa se svaki broj u pozicionom obliku zapisuje sa svega dve cifre: **0** i **1.** Tako brojevi 1, 2, 3, 4, 5, iz dekadnog sistema pišu se u binarnom sistemu kao: **1, 10, 11, 100, 101.** Pri upotrebi brojnih sistema sa raznim osnovama, da bi se znalo u kom sistemu je broj zapisan, moraćemo putem indeksa uvesti oznaku za osnovu brojnog sistema. Na primer: $11001_{(2)}$ (čitati: »Jedan, jedan, nula, nula, jedan, sa osnovom dva«). Osnovu dekadnog brojnog sistema dogovorno nećemo označavati, jer je to »običan«

* O raznim brojnim sistemima videti članke O. Ružić-Vučetić: »Izražavanje broja u brojnom sistemu date osnove« (ML IX, 4) i R. Stanojević: »Binarni brojni sistem« (ML IX, 6).

način pisanja i računanja. Naposletku, ako želimo da znamo šta znači broj $11001_{(2)}$ u dekadnom sistemu, moraćemo ovaj broj prevesti u dekadni brojni sistem na sledeći način:

$$11001_{(2)}=\mathbf{1}\cdot 2^4+\mathbf{1}\cdot 2^3+\mathbf{0}\cdot 2^2+\mathbf{0}\cdot 2^1+\mathbf{1}\cdot 2^0=25.$$

Savremene elektronske računske mašine konstruisane su na osnovu činjenice da svako strujno kolo može biti prekinuto-isključeno (čemu odgovara cifra **0**) ili zatvoreno-uključeno (čemu odgovara cifra **1**). Koristeći se komplikovanim sistemima strujnih kola ove mašine mogu da računaju sa brojevima datim u binarnom brojnom sistemu. Stoga je neophodno računaru dati brojne podatke prevedene iz dekadnog sistema u binarni (treba *kodirati brojeve*), a dobijene rezultate u binarnom sistemu za praktičnu upotrebu treba prevesti u dekadni sistem (*pročitati podatke*).

Otuda se prirodno postavlja pitanje načina prevođenja brojeva iz jednog sistema u drugi. Prevođenje broja iz binarnog sistema u dekadni prikazano je na broju $11001_{(2)}$. Obrnuto, ako broj iz dekadnog sistema prevodimo u binarni, onda vršimo uzastopna deljenja datog broja i dobijenih količnika brojem 2 (osnovom binarnog sistema). Na primer, prevođenje broja 25 vrši se ovako:

$$\begin{array}{ccccccccc} 25:2=12, & & 12:2=6, & & 6:2=3, & & 3:2=1, & & 1:2=0. \\ \boxed{1} & \leftarrow & \boxed{0} & \leftarrow & \boxed{0} & \leftarrow & \boxed{1} & \leftarrow & \boxed{1} \end{array}$$

Deljenje je završeno kada dobijemo količnik »0«. Ostaci deljenja (uokvireni) predstavljaju nove cifre broja 25, koje se zapisuju u redosledu koji je obrnut redosledu dobijanja ostataka (redosled pisanja označen je strelicama): $25=11001_{(2)}$.

Prevođenje brojeva iz jednog sistema u drugi na navedeni i uobičajeni način nije dovoljno praktično, jer iziskuje veliki broj deljenja ili množenja. Ovo naročito dolazi do izražaja kada se prevode brojevi sa većim brojem cifara. Uverimo se u to na sledećem primeru.

Primer 1. Ako treba prevesti broj 35 949 u binarni sistem, onda moramo deliti ravno 16 puta:

$$\begin{array}{cccccc} 35\,949:2=17\,974; & & 17\,974:2=8\,987; & & 8\,987:2=4\,493; & \\ \boxed{1} & \leftarrow & \boxed{0} & \leftarrow & \boxed{1} & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 4\,493:2=2\,246; & & 2\,246:2=1\,123; & & 1\,123:2=561; & & 561:2=280; & \\ \boxed{1} & \leftarrow & \boxed{0} & \leftarrow & \boxed{1} & \leftarrow & \boxed{1} & \leftarrow \end{array}$$

$$280:2=140;\quad 140:2=70;\quad 70:2=35;\quad 35:2=17;\quad 17:2=8;$$
$$\boxed{0}\ \leftarrow\ \boxed{0}\ \leftarrow\ \boxed{0}\ \leftarrow\ \boxed{1}\ \leftarrow\ \boxed{1}\ \leftarrow$$
$$8:2=4;\quad 4:2=2;\quad 2:2=1;\quad 1:2=0.$$
$$\boxed{0}\ \leftarrow\ \boxed{0}\ \leftarrow\ \boxed{0}\ \leftarrow\ \boxed{1}\ \leftarrow$$

Dobijamo: $35\,949 = 1000110001101101_{(2)}$.

Zamislite koliko bi deljenja bilo potrebno za prevođenje brojeva koji se u dekadnom sistemu pišu sa 10 ili sa više od 10 cifara!

Obrnuto, ako treba broj zapisan u binarnom sistemu prevesti u dekadni, onda treba sabrati onoliko brojeva oblika 2^k koliko dati broj ima cifara različitih od nule.

Sada ćemo se upoznati sa jednim bržim postupkom prevođenja. To je *posredno kodiranje preko osmičnog brojnog sistema*. Ovaj brojni sistem ima 8 cifara (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) i, kako je blizak dekadnom sistemu, to prevođenje iz jednog u drugi ne iziskuje naročito veliki posao.

Primer 2. Prevesti u osmični sistem broj 35 949.

Rešenje. $35949:8=4493;\quad 4493:8=561;\quad 561:8=70;$
$$\boxed{5}\qquad \boxed{5}\qquad \boxed{1}$$
$$70:8=8;\quad 8:8=1;\quad 1:8=0.$$
$$\boxed{6}\qquad \boxed{0}\qquad \boxed{1}$$

Dakle: $35\,949 = 106155_{(8)}$. Ovde smo imali samo 6 deljenja.

Primer 3. Prevesti u dekadni sistem broj $2074_{(8)}$.

Rešenje. $2074_{(8)}=2\cdot 8^3+0\cdot 8^2+7\cdot 8^1+4=1084$.

Sada ćemo videti kako se broj zapisan u osmičnom sistemu može direktno prevesti u binarni sistem i obrnuto.

Kodirajmo najpre cifre osmičnog sistema u sistemu »0, 1«, koristeći zapis sa 3 cifre (toliko cifara nam je dovoljno za kodiranje). $0=000_{(2)}$; $1=001_{(2)}$; $2=010_{(2)}$; $3=011_{(2)}$; $4=100_{(2)}$; $5=101_{(2)}$; $6=110_{(2)}$; $7=111_{(2)}$.

Da bi se broj zapisan u osmičnom sistemu preveo u binarni, dovoljno je samo njegove cifre zameniti odgovarajućim kodovima.

Primer 4. $106155_{(8)}=\overbrace{001}^{1}\,\overbrace{000}^{0}\,\overbrace{110}^{6}\,\overbrace{001}^{1}\,\overbrace{101}^{5}\,\overbrace{101}^{5}{}_{(2)}$. Ako izostavimo prve dve nule, koje napisane ispred broja nemaju nikakvu vrednost, dobićemo broj iz primera 1.

Obrnuto, ako treba prevesti neki broj iz binarnog sistema u osmični, tada treba prevesti svaku grupu od po 3 binarne cifre (računajući zdesna ulevo) u sistem sa osnovom 8 i dobićemo cifre broja zapisanog u osmičnom sistemu.

Primer 5. Prevesti u osmični sistem broj $1110101111_{(2)}$.

Rešenje. $1\,110\,101\,111_{(2)}=1657_{(8)}$.

Čitaocu ostavljamo da ova dva broja prevede u dekadni sistem i uveri se da se zaista radi o jednom istom broju.

Umesto dokaza, pogledajmo kako se do rešenja primera 5 može doći postupno.

$1\,110\,101\,111 = 1\cdot 2^9+(1\cdot 2^8+1\cdot 2^7+0\cdot 2^6)+(1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3)+$ $+(1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1)=1\cdot 2^9+2^6\,(1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0)+2^3\,(1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+$ $+1)+(1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1)=1\cdot 8^3+6\cdot 8^2+5\cdot 8^1+7=1657_{(8)}$ (jer je $2^3=8$, $2^6=(2^3)^2=8^2$ i $2^9=(2^3)^3=8^3$).

Obrnutim postupkom može se pokazati da je navedeni način rešavanja primera 4 takođe ispravan.

Može se smatrati da je na ovaj način dokazana ispravnost ovih postupaka u opštem slučaju.

Sada možemo izvesti zaključak kako treba da postupimo ako želimo da brzo prevedemo neki broj iz dekadnog sistema u binarni sistem i obrnuto. Prvo ćemo dati broj prevesti u osmični sistem, a zatim iz osmičnog u traženi brojni sistem.

Primer 6. Prevesti u dekadni sistem broj $1000011010110_{(2)}$.

Rešenje. $1\,000\,011\,010\,110_{(2)}=10326_{(8)}=1\cdot 8^4+3\cdot 8^2+2\cdot 8^1+$ $+6=4096+3\cdot 64+2\cdot 8+6=4310$.

Primer 7. Prevesti u binarni sistem broj 5218.

Rešenje. $5287:8=660;\quad 660:8=82;\quad 82:8=10;\quad 10:8=1;\quad 1:8=0.$
$$\boxed{7}\qquad \boxed{4}\qquad \boxed{2}\qquad \boxed{2}\qquad \boxed{1}$$
$$5287 = 12247_{(8)} = 1\,010\,010\,100\,111_{(2)}.$$

Zadaci

1. Prevesti u osmični sistem brojeve: 249, 837, 12981; $1001_{(2)}$, $1101001_{(2)}$, $110011101011111_{(2)}$.

2. Prevesti u binarni sistem brojeve: $25470_{(8)}$, $324_{(8)}$, $1072_{(8)}$; 99, 2456, 55555, 87903.

3. Prevesti u dekadni sistem brojeve: $1011011_{(2)}$, $1000011001111_{(2)}$, $11111111_{(2)}$, $110000001_{(2)}$.

ИЗ ИСТОРИЈЕ ЕЛЕМЕНТАРНЕ МАТЕМАТИКЕ

РАЗВОЈ МАТЕМАТИЧКИХ НАУКА У ЕВРОПИ У XVI И XVII СТОЛЕЋУ

У XVI и XVII веку процес развоја математичких наука у Европи се наставља и долази до појаве неколико веома значајних математичара, као што су: Тартаља (1500—1557), Кардано (1501—1576), Вијет (1540—1603) Паскал (1623—1662), Ферма (1601—1665) и Валис (1616—1703). Међутим, за разумевање највећег дела њихових радова потребно је веће познавање математике од оног које се стиче у основној школи, па ћемо се овде задржати само на следећим питањима: на увођењу употребе децималних бројева; на увођењу негативних бројева; и на усавршавању бележења алгебарских израза — што се све одиграло или почело одигравати у то доба.

О употреби децималних разломака у смислу обичних разломака чији су имениоци цели позитивни степени броја 10 и покушајима да се сви мерни бројеви изразе помоћу целих бројева и оваквих разломака имамо извесних података још из XIV и XV века; тако је у средњоазијском граду Самарканду арапски математичар Ал-Каши већ средином XV века употребљавао децималне бројеве и једино што их он није писао на данашњи начин, него је цифре целих бројева обележавао црним знацима, а децимале црвеним. Али што је уведен и затим прихваћен њихов данашњи начин писања у Европи, заслуга је холандског инжењера Стевина (1548—1620), који је самостално дошао на идеју њиховог начина писања. Стевин, истина, још није записивао децималне бројеве сасвим онако као што то ми данас чинимо, него је, на пример, бројеве 0,3752 и 8,937 записивао овако: 3 ① 7 ② 5 ③ 2 ④ и 8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③. Али је тиме идеја о позиционом начину записивања децималних бројева била већ изнета, па астроном Кеплер (1571—1630) у својим таблицама записује, на пример, број 0,567 већ овако: 0»567; а убрзо затим постало је уобичајено да се од »целог дела« децималног броја одвоји његов »децимални део« зарезом или тачком.

О негативним бројевима, у смислу бројева који означавају дуг или губитак насупрот позитивним, који означавају имовину или добитак, имамо трагова већ код старих индијских и кинеских математичара; али је до њихове употребе у данашњем смислу и до рачунања са њима дошло тек у вези са решавањем једначина. Дуго време је, наиме, људима изгледало несхватљиво да

се већи број може одузимати од мањег, односно да би се нешто могло одузимати од нуле. Па и када се почело рачунати са негативним бројевима, у прво време су биле примењиване на њих само рачунске операције сабирања и одузимања, јер су многи математичари и даље схватали ове бројеве само као ознаке за дуг, па нису могли да се помире с тим да се дуг може множити или делити дугом. Истина, већ индијски математичар Бхаскара (XII в.) даје правила и за множење, односно дељење негативног броја негативним бројем. Али у Европи су се ти бројеви још дуго називали 8лажним« и почели се узимати у обзир тек пошто је фламански математичар Жирар (1595—1632), решавајући једначине, почео да оперише са њима као и са позитивним бројевима, а математичар и филозоф Декарт указао и на начин њихов геометријског представљања на бројној оси.

На то, да се непознати број, који се тражи у задатку, означи неким словом, наилази се тек код грчког математичара Диофанта (III в.). Он при решавању једначина, чиме се бавио, непознати број обележава са S, бројеве које треба сабирати пише једноставно једне поред других, за одузимање употребљава знак $\uparrow$, а уместо знака једнакости употребљава знак i. Све остале математичке операције, помоћу којих су међусобно повезани познати и непознати бројеви у једначини, Диофант изражава речима.

И та, тзв. *реторичка алгебра*, задржала се и код европских математичара врло дуго. Слова, у смислу бројева, не само за обележавање непознатих у једначинама, него и уопште, за обележавање било каквих бројева, увео је тек француски математичар Вијет, и тада се, заправо, тек и почело прелазити на савремену, тзв. *симболичну* алгебру.

Но, и када су већ речи, којима су дотле биле изражаване рачунске радње које су биле примењиване за добијање појединих алгебарских израза, биле замењиване појединим знацима, дуго није дошло до уједначавања употребе тих знакова. Тако, на пример, поменути математичар Стевин, уместо данашњег израза $3xyz^2$ пише: 3 ① *Msec* ① *Mter* ②, где *M* значи множење, а цифре у кружићима показују, очигледно, експоненте прве, односно друге, односно треће променљиве. Па и сам Вијет једначину $x^3—8x^2—16x—40$ пише на следећи начин: $1C—8Q—16N$ *aequatur* 40, где C, Q и N означавају куб, односно квадрат, односно саму непознату, а реч *aequatur* значи на латинском »једнако је«. А савремени начин записивања степена појединих бројева увео је тек Декарт и у том погледу више није долазило до промена.

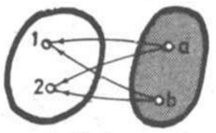
TEST

ZA PROVERAVANJE STEČENOG ZNANJA IZ MATEMATIKE
V RAZRED

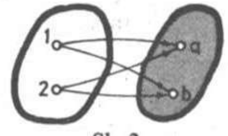
1. Popuni mesta označena zvezdicom, da bi jednakost

$\{a, *, b, c\} \times \{*, k, *, e\} = \{(a, *), (a, k), (a, *), (a, e), (*, d), (*, k), (s, *), (*, e), (b, *), (b, k), (b, *), (b, e), (c, *), (c, k), (c, t), (c, e)\}$ bila istinita.

2. Koji od ovih grafova predstavlja proizvod $\{a, b\} \times \{1, 2\}$?



Sl. 1



Sl. 2

Odgovor: ....

3. Koliko partija šaha će odigrati Slavko, Vesna i Dušanka tako da igra svako sa svakim? *Odgovor:* ....

Napiši parove igrača. *Odgovor:* ....

4. Koji su elementi skupa A, a koji skupa B, ako je

$A \times B = \{(x, x), (x, t), (x, z), (y, x)\ (y, t), (y, z), (z, x), (z, t), (z, z)\}$?

Odgovor: $A =$ .... $B =$ ....

5. Dopuni sledeće nepotpune iskaze:
a) Strane četvorostrane piramide su ....
b) Kupa je ograničena sa ....
c) Presek dveju površi je ...., a presek dveju linija je ....
d) Obla tela su lopta, ...

6. Odgovori sa »da« ili »ne« na sledeća pitanja:
a) Da li su dve horizontalne prave uvek paralelne? *Odgovor:* ....
b) Mogu li dve vertikalne prave da budu međusobno normalne? *Odgovor:* ....
c) Može li vertikalna prava da bude paralelna sa vertikalnom ravni? *Odgovor:* ....
d) Može li horizontalna prava da pripada nekoj vertikalnoj ravni? *Odgovor:* ....

TEST

ZA PROVERAVANJE STEČENOG ZNANJA IZ MATEMATIKE
VI RAZRED

1. U jednoj boci od 2 litra ima $\frac{2}{5}$ l tečnosti. Koliko još treba dosuti tečnosti da bude ispunjeno $\frac{3}{4}$ sadržaja boce. *Odgovor:* ....

2. Da bi se od broja pet dobila jedna petina, potrebno je broj pet: a) podeliti jednom petinom; b) pomnožiti jednom petinom; c) podeliti sa 25; d) pomnožiti sa $\frac{1}{25}$. Podvucite tačne odgovore.

3. Mesto zvezdice stavite znak odgovarajuće računske operacije, da bi se dobili istiniti iskazi:

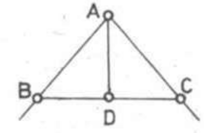
a) $\frac{3}{4} * 3 = \frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4} * 3 = \frac{3}{12}$ c) $\frac{3}{4} * 3 = \frac{9}{12}$

d) $5 * \frac{1}{5} = 25$ e) $5 * \frac{1}{5} = 1$.

4. Koji od izraza

a) $\frac{5}{x} \cdot \frac{x}{5}$; b) $\frac{5}{x} : \frac{x}{5}$; c) $\frac{5}{x} : \frac{5}{x}$; d) $\frac{5}{x} \cdot \frac{5}{x}$

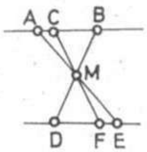
ne menja svoju vrednost i nezavisan je od vrednosti koju uzima promenljiva x. (Izuzimaju se vrednosti $x=0$). Podvucite te izraze.



Sl. 1

5. Ako je $AB=AC$, $BD=DC$ (sl. 1) dokaži da je $AD \perp BC$.

Odgovor: ....
....



Sl. 2

6. Ako je $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB$ i $CM=DM=$ $=FM$ (sl. 2), dokaži da je $AB=DE$.

Odgovor: ....
....

7. Trouglovi ABC i DEF imaju po dve stranice od 5 cm i jedan ugao od 40°. Da li su ti trouglovi podudarni?

Odgovor: ....

TEST

ZA PROVERAVANJE STEČENOG ZNANJA IZ MATEMATIKE VII RAZRED

1. Izračunaj: $2a-(-a) =$ .... ; $2a-(+a) =$ ....

$2a+(-a) =$ .... ; $2a+(+a) =$ ....

2. U izrazu $-2+(*)-3-(-2)$ zamenite zvezdicu odgovarajućim brojem da vrednost izraza bude:

a) nula; *Odgovor:*............ b) -6; *Odgovor:*............
c) jedan. *Odgovor:* ....

3. Kojeg znaka treba da bude M ($|M|=4$) u nejednakostima:

a) $M-3>0$ b) $M-3<0$ c) $M+3>0$ d) $M+3<0$
e) $-M+3>0$ f) $-M+3<0$, da bi one bile istinite,

Odgovor: a).......... b).......... c).......... d)..........
e).......... f)..........

4. Reši jednačine:

a) $x+7=-3$ b) $-x+7=-3$ c) $|x|+7=-3$

Odgovori: a).......... b).......... c) ....

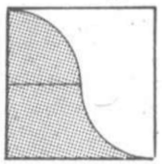
5. Koliki poluprečnik ima kružnica dužine πcm?

Odgovor: ....

6. Ako se poluprečnik kružnice $r=10$ m poveća za 1 m, za koliko će se povećati dužina te kružnice?

Odgovor: ....

7. U kvadratu stranice a konstruisani su luci dveju kružnica sa centrima u sredinama dveju naspramnih stranica (sl. 1). Izračunaj površinu osenčenog dela kvadrata.



Sl. 1

Odgovor:..............................

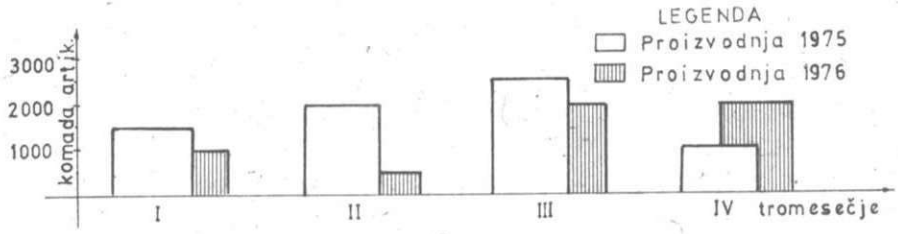
8. Izračunaj poluprečnik kružnice ako luk te kružnice, koji se nalazi prema centralnom uglu od 72°, ima dužinu 4π cm.

Odgovo: ....

TEST

ZA PROVERAVANJE STEČENOG ZNANJA IZ MATEMATIKE VIII RAZRED

Na sl. 1 je grafički prikaz proizvodnje nekog artikla u 1975. i 1976. godini. *Odgovorite:*



Sl. 1

1. Koliko je artikala proizvedeno 1975. godine u:

a) prvom tromesečju? *Odgovor:* .... ; b) drugom tromesečju? *Odgovor:* .... ; c) trećem tromesečju? *Odgovor:* .... ; d) četvrtom tromesečju? *Odgovor:* ....

2. Koliko je artikala proizvedeno 1976. godine u:

a) prvom tromesečju? *Odgovor:* .... ; b) drugom tromesečju? *Odgovor:* .... ; c) trećem tromesečju? *Odgovor:* .... ; d) četvrtom tromesečju? *Odgovor:* ....

3. Kolika je srednja vrednost proizvodnje u 1976? *Odgovor:* .... Označite to odgovarajućom linijom na crtežu.

Kolika je srednja vrednost proizvodnje u 1975? *Odgovor:* .... Označite to odgovarajućom linijom na crtežu.

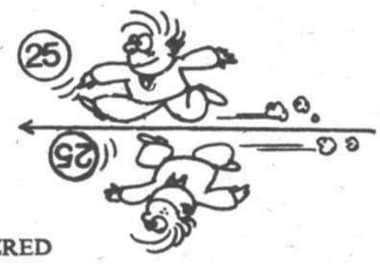
4. Navesti tromesečje i godinu kada je:

a) bila najveća proizvodnja; *Odgovor:* .... ; b) bila najmanja proizvodnja; *Odgovor:* .... ; c) opadala proizvodnja; *Odgovor:* .... ; d) rasla proizvodnja. *Odgovor:* ....

5. Složeno telo je sastavljeno od dve pravilne podudarne četvorostrane piramide koje su spojene osnovama i čije su bočne strane jednakostranični trouglovi stranice $a=3$ cm. Izračunaj površinu i zapreminu ovog tela.

Odgovor: ....

MATEMATIČKA TAKMIČENJA



SR SLOVENIJA

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE
ZA ZLATO VEGOVE PRIZNANJE
1976. god.

VIII RAZRED

1. Dva obeska tehtata skupaj m gramov. Prvi obesek vsebuje $p\%$ zlata, drugi pa $q\%$. V prvem obesku je r gramov zlata več kot v drugem. Koliko tehta vsak obesek?

2. Okrog ekvatorja je koncentrično postavljen obroč, ki je za 1 m daljši od ekvatorja. Ali se lahko miš splazi pod tem obročem? (Vzemi, da je Zemlja popolna krogla!)

3. V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom v C so dolžine težišnic t_a, t_b in t_c. Dokaži da velja enačba: $t_a^2+t_b^2=5t_c^2$.

4. Iz kvadrata z diagonalo $(1+\sqrt{3})$ dm izrežemo mrežo največje možne enakorobne štiristranične piramide. Izračunaj površino in prostornino te piramide.

5. Višina pokončnega stožca je v dm. Dve med seboj pravokotni stranici stožca razdelita rob njegove osnovne ploskve na dva loka. Dolžini lokov sta v razmjeru 1 : 2. Izračunaj prostornino stožca.

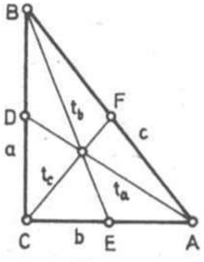
Rešitve nalog

1. Teža obeskov je x g in $(m-x)$ g. V prvem je $\frac{px}{100}$ in v drugem $\frac{q(m-x)}{100}$ g čistega zlata. Dobimo enačbo: $\frac{px}{100}=\frac{q(m-x)}{100}+r$. Rešitev je: prvi obesek tehta $x=\frac{mq+100r}{p+q}$ g in drugi obesek tehta $m-x=\frac{mp-100r}{p+q}$ g.

2. Iz $2\pi r+1=2\pi(r+h)$ dobimo: $h=\frac{1}{2\pi}m=0{,}15915\ldots m$, ali približno 16 cm. Miš se lahko splazi pod obročem.

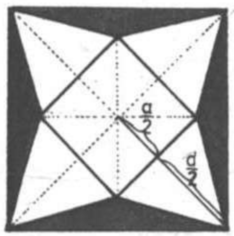
3. Na sl. 1 imamo: $CD=\frac{a}{2}$, $CD=\frac{b}{2}$ in $c=2t_c$. V pravokotnem trikotniku ADC imamo: $t_a^2=b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$ in v trikotniku BCE: $t_b^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$, ter dobimo:

$$t_a^2+t_b^2=a^2+b^2+\frac{1}{4}(a^2+b^2)=\frac{5}{4}(a^2+b^2)=\frac{5}{4}c^2=$$
$$=\frac{5}{4}(2t_c)^2=\frac{5}{4}\cdot 4t_c^2.$$ Dobimo enačbo:
$$t_a^2+t_b^2=5t_c^2.$$

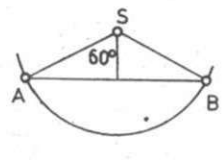


Sl. 1

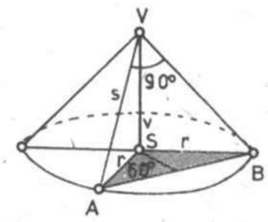
4. Na sl. 2 vidimo: $\frac{d}{2}=\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Izračunamo a: $d=a(1+\sqrt{3})$, ter imamo $a=\frac{d}{1+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{1}}{1+\sqrt{3}}=1$ dm. Sedaj dobimo: $P=a^2+a^2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})$ dm^2 in $V=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$ dm^3.



Sl. 2



Sl. 3



Sl. 4

5. Na sl. 3 je: $AB=2\frac{r\sqrt{3}}{2}=r\sqrt{3}$. Iz trikotnika BSV je $s^2=r^2+v^2$. Iz trikotnika ABV je $AB=s\sqrt{2}$, pa dobimo: $r\sqrt{3}=s\sqrt{2}$ in $3r^2=2s^2$, odnosno: $3r^2=2(r^2+v^2)$, pa je $r^2=2v^2$. Dobimo prostornino: $V=\frac{\pi r^2 v}{3}=\frac{2\pi v^2}{3}$.

ЗАДАЦИ

ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ

Ови задаци треба да вам служе за вежбу, припремање за пријемне испите и математичка такмичења, као и за рад у *математичкој секцији*. Задатке треба самостално да решите, а наведени резултати и упутства нека вам служе за контролу. За ученике који шаљу решења *Конкурсних задатака* препоручљиво је да претходно реше *Одабране задатке*, јер су они мало лакши од конкурсних, па овај рад представља за њих корисно увежбавање.

A) За ученике IV и V разреда

1145. Колико се пута увећа неки број ако му додамо број који је од њега два пута већи?

1146. Збир два узастопна природна броја је 123. Одредити те бројеве.

1147. Приликом множења ученик је цифру јединица 4 у множенику прочитао као 1. Услед тога је добио производ (продукт) 525, уместо да добије 600. Које је бројеве требало ученик да измножи?

1148. Колико настаје правих углова ако две паралелне праве (правца) пресечмо правом која је нормална на њих?

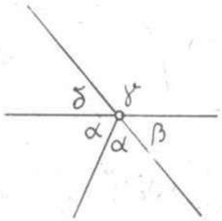
1149. Ако у једном квадрату повучемо дијагонале, тачка пресека тих дијагонала удаљена је од странице квадрата 7 cm. Која је дужина (дуљина) обима (опсега) тог квадрата?

B) За ученике V и VI разреда

1150. Ученик се вратио из књижаре и каже: »Пола свог новца дао сам за глобус, трећину за књиге, а шестину за свеске«. Колико му је новца остало после тога?

1151. Један од два суплементна угла већи је од другог за 10°10′10″. Одредити мерне бројеве тих углова.

1152. Према сл. 1 треба израчунати величину углова (кутова) α, β, γ и δ кад се зна да је $\alpha+\delta=114°$.



Сл. 1

C) За ученике VI и VII разреда

1153. Израчунати: $\left\{\left(-\frac{4}{9}\right)^2 : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^2\right\}^2 : \left(-\frac{3}{4}\right)^2.$

1154. У фабрици су пребацили планирану производњу за 18% у првом полугодишту, а у другом за 12% у односу на прво полугодиште. Колико је било укупно повећање производње у односу на планирану производњу?

1155. Симетрале два напоредна угла (кута) управне (окомите) су једна на другој. Доказати.

D) За ученике VII и VIII разреда

1156. Колика је највећа удаљеност од ока на коју можемо поставити новчић пречника (дијаметра) 1,5 cm, тако да бисмо њиме заклонили Месец кад је пун месец? (За полупречник (радијус) Месеца узети 3500 km, а удаљеност Месеца од Земље заокруглити на 385 000 km).

1157. Размера (омјер) одговарајућих страница два слична троугла (трокута) је 4 : 7. Одговарајуће странице једног троугла веће су од страница другог редом за 27 cm, 39 cm и 51 cm. Колике су странице мањег троугла?

1158. Дат је кружни прстен. Конструисати круг чија је површина (плоштина) једнака површини датог кружног прстена. Доказати исправност конструкције.

E) За ученика VIII разреда

1159. Истог дана уложена су у банку на штедњу два износа под различитим условима: 800 динара уз 5% камате за сваку годину и 700 динара уз 8% камате годишње. Када ће ова два износа, увећана каматом, имати међусобно исту вредност?

1160. Доказати да је n^3-n дељиво са 6 за сваку вредност природног броја n.

1161. Бочне ивице (побочни бридови) правилне тростране пирамиде управне су једне на другима и дужина (дуљина) им је по 3 dm. Израчунати површину и запремину (оплошје и волумен) те пирамиде.

F) За ученике свих разреда

1162. У производу

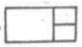
$$\begin{array}{r} **5 \cdot 1** \\ \hline 2**5 \\ 13*0 \\ *** \\ \hline 4*77* \end{array}$$

заменити звездице одговарајућим цифрама.

1163. Правоугаоник чије су димензије 9 cm и 4 cm треба расећи на 3 правоугаоника тако да се од њих може саставити квадрат. Како је то могуће?

1164 Нада је за 4 године старија од Вере, а Драгица има онолико година колико имају Нада и Вера заједно. Трећина збира њихових година износи 16. Колико година има свака од њих?

Резултати одабраних задатака 1145—1164

1145. 3 пута **1146.** 61,62 **1147.** 24.25 **1148.** 8 **1149.** 56 cm **1150.** Ништа **1151.** 95°5′5″, 84°54′55″ **1152.** 66°, 48°, 132°, 48° **1153.** 9 **1154.** 32, 16% **1156.** 82,5 cm **1157.** 36 cm, 52 cm и 68 cm **1158.** Пречник (дијаметар) овог круга је она тетива спољашњег круга прстена која додирује унутрашњи круг. **1159.** После 6 година и 3 месеца **1160.** Упутство: $u^3-n=(n-1)\,n\,(n+1)$ — производ 3 узастопна природна броја. **1161.** $P=\frac{9}{2}(\sqrt{3}+3)$ dm², $V=\frac{9}{2}$dm³. **1162.** 325.147 **1163.** 

1164. Нада има 14, Вера 10 и Драгица 24 године.

KONKURSNI ZADACI

Ovi zadaci su mamenjeni prvenstveno sa samostalni rad onih učenika koji se u većoj meri interesuju za matematiku. Rešenje svakog zadatka biće objavljeno sa potpisom onog rešavatelja koji bude poslao sasvim tačno i najbolje obrazloženo rešenje u toku prvih 20 dana po islasku lista.

Imena onih rešavalaca koji pošalju bar 5 pravilnih rešenja konkrursnih zadataka biće objayljena uvek pošto se od njih prime po ukupno 5 takvih rešenja. Sem toga će u poslednjem broju lista za ovu školsku godinu biti posebno objavljena imena najboljih rešavalaca, za koje su predviđene novčane nagrade.

Rešavajte postavljene zadatke i šaljite ih u što većem broju *Matematičkom listu*. Rešavatelji mogu poslati redakciji rešenja samo onih zadataka *koji su predviđeni za njihoy razred i za učenike svih razreda*. Zadatke rešavajte samostalno, ne tražeći pomoć ni od koga. Slike crtajte precizno, a rešenja pišite obrazženo i čitko. Na jednom listu papira treba napisati sa iste strane: redni broj, tekst i kompletno rešenje samo po jednog zadatka i svako rešenje treba potpisati *punim imenom i prezimenom, navodeći razred i odeljenje, školu, mesto u kućnu adresu*. Nepotpuna rešenja, kao i rešenja bez obrazloženja, odnosno bez pune adprese pošiljaoca neće se uzimati u obzir.

Sva rešenja koja šaljete istovremeno stavite u jedan koverat i pošalite ih na adresu redakcije sa naznakom „Konkursni zadaci". *Na poleđini koverta* navedite svoje ime, školu i razred. Rešenja zadataka iz ovog broja lista treba poslati najkacnije do 20. 3. 1977. g.

A) Za učenike IV i V razreda

397. Na jednoj pozorišnoj predstavi bilo je 720 gledalaca. Koliko je bilo muškaraca i koliko žena, ako se zna da na svakih 7 muškaraca dolazi 8 žena?

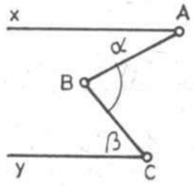
398. Dva radnika na jednom poslu zarade zajedno 1632 dinara. Ako prvi potroši 360 dinara i drugi potroši 72 dinara od zarađenog novca, onda im ostaju jednake sume novca. Koliko je novaca zaradio svaki od njih?

399. Njiva oblika pravokutnika (pravougaonika) ima opseg (obim) 900 m. Izračunati ploštinu (površinu) njive u arima, ako je širina njive dva puta manja od njene dužine.

B) Za učenike V i VI razreda

400. Rekonstruiši množenje:

$$\begin{array}{r} **5\cdot4* \\ \hline *1* \\ **6* \\ \hline *7*** \end{array}$$



Sl. 1

401. Na sl. 1 Ax je paralelno je sa Cy, $\alpha=32°$ i $\beta=48°$. Izračunati ugao ABC.

C) Za učenike VI i VII razreda

402. Vrijednosti razlomaka $\dfrac{42{*}4{*}}{72}$ i $\dfrac{32{*}60}{56}$ predstavljaju prirodne brojeve Koji je od ovih razlomaka veći?

403. Data je simetrala s dužine (duži) AA_1 i točka B u istoj ravnini (ravni). Koristeći se samo ravnalom (ravnim lenjirom) konstruirati točku B_1 koja je simetrična točki B u odnosu na pravac (pravu) s.

D) Za učenike VII i VIII razreda

404. Ako je $a:x=b:y=c:z$, dokazati da je $(a+b+c):(x+y+z)=a:x$.

405. Krug radijusa (polupřečnika) $2r$ prolazi centrom kruga radijusa r. Zajedničke tangente ovih krugova dodiruju manji krug u točkama A i B i sijeku se u točki C. Izračunati ploštinu (površinu) figure $\overset{\frown}{ABC}$ u zavisnosti od r, gdje je $\overset{\frown}{AB}$ manji luk datog kruga.

E) Za učenike VIII razreda

406. Jedna trećina od ukupne količine robe prodata je sa zaradom 10%, jedna četvrtina sa zaradom 15%, a ostatak sa gubitkom od 5%. Izračunati po kojoj cijeni je nabavljena roba, ako je na ukupnoj prodaji ostvarena dobit od 2400 dinara.

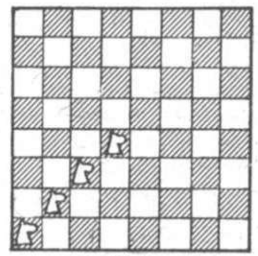
407. Ploština (površina) baze uspravnog konusa (kupe) odnosi se prema ploštini omotača tog konusa kao 3 : 5. Izračunati oplošće i volumen (površinu i zapreminu) konusa, ako je dijametar (prečnik) baze tog konusa 12 cm.

F) Za učenike svih razreda

408. *Rade*, *Toma* i *Zoran* osumnjičeni su da je jedan od njih razbio prozor u učionici, ali svaki poriče da je on krivac.

»Ko od vas trojice laže?« upitao je *razredni starješina*. Na to će *Rade:* »Zoran je lažov«. A *Toma:* »Laže Rade ili Zoran«. I naposletku, *Zoran:* »Znam da Toma neće da slaže«.

Na osnovu ovih izjava razredni starješina je odmah krivcu upisao kaznu. Ko je razbio prozor?



Sl. 2

409. Šahovsku ploču na sl. 2 podijeliti na četiri sukladna (podudarna) dijela (koji se mogu isjeći sa slike i poklopiti međusobno), tako da na svakom dijelu ostane po jedan konj.

РЕШЕЊА КОНКУРСНИХ ЗАДАТАКА 384—396 ИЗ МАТЕМАТИЧКОГ ЛИСТА XI, 3

A) За ученике IV и V разреда

384. *Два града су удаљена један од другог* 590 km. *Пут између њих састоји се од две узбрдице и једног хоризонталног дела пута. Дужина пута једне узбрдице краћа је* 4 *пута од хоризонталног дела, а за* 110 km *од друге узбрдице. Одредити дужине (дуљине) сваког од ових делова пута.*

Краћа узбрдица се 4 пута садржи у хоризонталном делу пута, а друга узбрдица је за 110 km дужа од прве. Значи да се у целом путу налази 6 растојања једнаких краћој узбрдици и још 110 km. Зато израз (590—110) : 6 даје дужину краће узбрдице. Краћа узбрдица је 80 km, хоризонтални део 320 km и друга узбрдица 190 km.

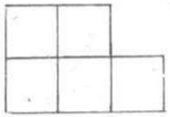
Марија Ранђеловић, уч. IV_4 р. ОШ „Маршал Тито", Ниш

385. *У магацину је било шест врећа брашна тежине: 22, 23, 26, 28, 29 и 31 kg. Два купца су купила 5 врећа. Један од њих купио је 4 пута више брашна од другог. Која је врећа остала непродата?*

Укупна количина брашна у свих 6 врећа износи 159 kg. Пошто је један купац купио 4 пута више брашна од другог, значи да су они заједно купили 5 једнаких тежина брашна. Број kg који су они купили мора бити дељив са 5. Једино разлика 159—29 је дељива са 5. Један купац је купио врећу од 26 kg, други вреће од: 22, 23, 28 и 31 kg, а остаје непродата врећа од 29 kg.

Небојша Ђокић, уч. IV_2 р. ОШ „П. Враголић“, Љубовија

386. *Колико на сл. 1 има квадрата и колико правоугаоника?*



Сл. 1

На датој слици има 6 квадрата и 6 правоугаоника.

Вања Младеновић, уч. IV_3 р. ОШ „Р. Вукићевић“, Ниш

B) За ученике V и VI разреда

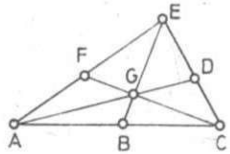
387. *У сваком од два суда налази се по 540 l воде. Из првог суда истиче 25 l у минуту, а из другог 15 l у минуту. Кроз колико минута ће у другом суду бити 6 пута више воде него у првом?*

Овај задатак се најлакше решава идући »уназад«. Из суда из кога истиче 25 l у минуту сва вода ће истећи за мање од 22 минута. После 21 минута у том суду ће остати 15 l а у другом 225 l. То је више од 6 пута. Ако наставимо тако, већ на основу остатака после 20 минута добија се решење задатка. Наиме, после 20 минута у једном суду ће бити 40 l а у другом 240 l. То је решење задатка.

Мирољуб Лазић, уч. V р. ОШ „П. Тасић“, Лешница

388. *Колико троуглова има на сл. 2. Наведи све уочене троуглове.*

Укупно има 16 троуглова: *ACE, ABG, AGF, BCG, CDG, DEG, EFG, ACG, CGE, AGE, ACD, AED, CAF, CEF, AEB, CEB.*



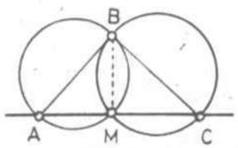
Сл. 2

Милош Копривица, уч. V_4 р. ОШ „Р. Домановић“, Београд

C) За ученике VI и VII разреда

389. *Дате су три тачке A, B, C, које не припадају једној правој (правцу). Круг пречника (дијаметра) AB сече круг пречника BC. Ако је $M \neq B$ заједничка тачка ових кругова, доказати да тачка M припада правој AC.*

Познато је да је периферијски угао (кут) над пречником прав. Стога су углови *AMB* (над пречником *AB*) и *BMC* (над пречником *BC*) прави. Према томе: $\sphericalangle AMB + BMC = 180°$, што значи да је тачка *M* на правој *AC* (сл. 3).



Сл. 3

Звонко Милетић, уч. VI_1 р. ОШ „Л. Поповић“, Миљковац

390. *Ако је збир (зброј) два спољашња угла троугла (кута трокута) 270°, тај троугао је правоугли (правокутни). Доказати.*

Нека је $\alpha_1+\beta_1=270°$. Како је $\alpha_1=\beta+\gamma$ и $\beta_1=\alpha+\gamma$, добијамо: $\beta+\gamma+\alpha+\gamma=270°$. Међутим, збир углова троугла је 180° ($\alpha+\beta+\gamma=180°$), па је $180°+\gamma=270°$. Одавде излази да је $\gamma=90°$, па је дати троугао правоугли.

Весна Петков, уч. VI_1 р. ОШ „2. октобар“, Српски Итебеј

D) За ученике VII и VIII разреда

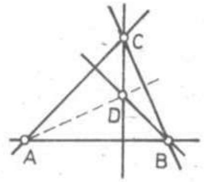
391. *У току рата два бомбардера на Афричком фронту пођу један другом у сусрет из база A и B, које су удаљене једна од друге 1 845 km. Авион из базе A кретао се брзином 450 km/h, а други 370 km/h. У исто време, из базе A кренуо је ловачки патролни авион, брзином 800 km/h, са задатком да контролише простор између бомбардера. Он је свој задатак извршавао тако, што је летео од A ка B до сусрета са другим бомбардером, затим се окренуо и летео у супротном смеру до сусрета са првим авионом, опет се окренуо ка другом авиону, и тако све док се бомбардери нису сусрели. Колико је горива потрошио патролни авион, ако му за 100 km лета треба 120 литара бензина?*

Треба одредити колико дуго је летео патролни авион. То је време t које је протекло од поласка до сусрета два бомбардера. Добијамо га из једначине: $450\,t+370\,t=1845$. Одавде је $t=2{,}25$ часова За то време патролни авион је прелетео 2,25 · 800 km = 1800 km, па је потрошио 18 · 120=2160 литара бензина.

Славиша Крсмановић, уч. VII р. ОШ „Ч. Милосављевић“, Пецка

392. *У равни (равнини) дате су четири различите тачке A, B, C и D, такве да је $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$. Доказати да је $AD \perp BC$.*

Тачке *A*, *B* и *C* не могу бити на истој правој (правцу), јер би у противном постојале две различите нормале (окомице) *DC* и *DB* из тачке *D* на праву (правац) *AB*, што је немогуће. Дакле, постоји троугао (трокут) *ABC* (сл. 4), коме су праве *CD* и *BD* висине на странице *AB* и *AC*, а тачка *D* је ортоцентар. Према томе, права *AD* је трећа висина троугла *ABC*, па је $AD \perp BC$, што се и тврдило.



Сл. 4

Милан Манасијевић, уч. VII_4 р. ОШ „Ј. Јовановић Змај“, Панчево

E) За ученике VIII разреда

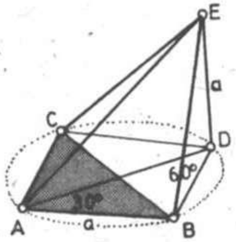
393. *Које године двадесетог века је рођен човек који 1977. године има онолико година колико износи збир цифара (знаменки) године његовог рођења?*

Дати услов изражавамо једначином: $1977-(1900+10x+y)=1+9+x+y$, где x и y означавају последње две цифре године рођења. Одавде, после сређивања добијамо: $67=11x+2y$. Како су x и y цифре, добијамо само један пар решења, и то $x=5$ и $y=6$. Поменути човек је рођен 1956. године, а 1977. године имаће 1+9+5+6=21 годину (1977—1956=21).

Зоран Симић, уч. $VIII_1$ р. ОШ „Топлички хероји“, Житорађа

394. *Дат је једнакостранични троугао (трокут) ABC страница а. Дуж (дужина) AD је пречник (дијаметар) описаног круга. Ван равни (равнине) датог троугла дата је тачка E, таква да је дуж DE=a управна на раван троугла. Доказати да је BE ⊥ AB и CE ⊥ AC, а затим израчунати површину (оплошје) пирамиде ABCE.*

Правоугли (правокутни) троугао ABD (сл. 5) има углове (кутове) од 30° и 60°, па он представља половину једнакостраничног троугла висине a.



Сл. 5

Отуда је $BD=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $AD=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Најпре у правоуглом троуглу ADE израчунајмо хипотенузу AE, користећи Питагорину теорему: $AE^2=AD^2+DE^2=\frac{21a^2}{9}$, па је $AE=\frac{a}{3}\sqrt{21}$. Затим, из правоуглог троугла BDE израчунамо BE: $BE^2=BD^2+DE^2=\frac{3a^2}{9}+a^2=\frac{12a^2}{9}$, па је $BE=\frac{2}{3}a\sqrt{3}$

Дакле, $BE=AD$, па је троугао ABE подударан (сукладан) правоуглом троуглу ADE ($BE=AD$, $AE=AE$ и $DE=a=AB$). Отуда следује да је $BE \perp AB$. Троугао ACE подударан је троуглу ABE, па је је такође $CE \perp AC$.

Површина пирамиде је збир (зброј) површина троуглова ABC, ABE, ACE и BCE: $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}+\frac{a^2\sqrt{39}}{12}=\frac{a^2}{12}(11\sqrt{3}+\sqrt{39})$. (Да бисмо израчунали површину једнакокраког троугла BCE, треба најпре израчунати висину из темена E).

Предраг Живановић, уч. VIII$_1$ р. ОШ „М. Дудић", Ваљево

F) *За ученике свих разреда*

395. *Пошто није имао довољно новаца да купи један стрип, Ћира позајми од Весне онолико новаца колико је већ имао у џепу. Када је купио стрип, позајмио је од Дренке још онолико новаца колико је тренутно имао и купио још један стрип. Затим, позајми од Боже још онолико новаца колико му је остало после куповине другог стрипа и купи још један стрип. После тога није му остало ништа од новаца. Колико је новаца Ћира позајмио од Весне, Дренке и Боже, ако сваки стрип стаје 4 динара?*

Рачунаћемо уназад. Пре последње куповине Ћира је имао 2 динара и позајмио је од Боже још 2 динара. Тако је имао 4 динара за куповину последњег стрипа. Она 2 динара, која је имао пре последње позајмице, остала су му пошто је купио други стрип. Како стрип стаје 4 динара, закључујемо да је Ћира у том моменту имао 6 динара. Значи да је пре ове куповине позајмио од Дренке 3 динара. Она 3 динара, која је имао пре ове позајмице, остала су му после куповине првог стрипа, што значи да је пре тога имао 7 динара. Ту је његових 3,50 динара и 3,50 динара које му је позајмила Весна.

Мајда Асоли, уч. VIII$_c$ ОШ „А. Мразовић", Сомбор

396. *Влада, Зоран, Душан, Милан, Раде и Тома такмичили су се у трчању. Влада је стигао на циљ после Зорана, а пре Душана. Милан је стигао после Душана. Раде је био четврти. Тома је био на циљу пре Владе, али није био победник трке. Којим су редом ови дечаци стигли на циљ?*

Испред Владе су Зоран и Тома, па пошто Тома није победник, то је Зоран први, Тома други, Влада трећи, Раде (већ знамо) четврти. Милан је стигао после Душана, значи последњи, а Душан је пети.

Суада Мујкановић, уч. VI$_3$ ОШ „И. Л. Рибар", Лабин

VI PITATE — MI ODGOVARAMO

1. Sanja Lončar, učenica iz Zagreba, kaže u svome pismu:

U ML V,2 pisali ste da je knjigu »Alisa u zemlji čuda« pisao jedan matematičar. Čula sam da je i jedan jugoslovenski matematičar pisao za djecu. Je li to istina?

Odgovor. Nije nam poznato da je neki naš matematičar pisao specijalno za decu. Ali je naš poznati matematičar dr Mihajlo Petrović-Alas (1868—1943), pored velikog broja naučnih radova iz matematike, objavio i više knjiga o svojim putovanjima po južnoj i severnoj polarnoj oblasti, na koja je odlazio kao član naučnih ekspedicija. Poznate su njegove knjige: *Kroz polarnu oblast*, *U carstvu gusara*, *Sa okeanskim ribarima*, *Po zabačenim ostrvima*, *Roman jegulje*. Sve su te knjige pisane vrlo zanimljivo i pristupačne su ne samo odraslima, nego i deci.

Takođe je i naš matematičar dr Milutin Milanković (1879—1958), pored brojnih naučnih radova, napisao i popularne knjige *Kroz vasionu i vekove* i *Kroz carstvo nauke*, koje su pristupačne starijim učenicima osnovne škole.

2. Gordana Palić, učenica iz Beograda, pita:

U školi smo učili da u deltoidu može samo da se upiše kružnica. Pronašla sam da može i da se opiše i šaljem vam primer. Da li je moje mišljenje tačno?

Odogovor. Tvoje mišljenje je tačno samo u jednom posebnom slučaju. U svaki deltoid se može upisati krug, ali krug se može opisati samo oko deltoida koji ima dva suprotna ugla od po 90°, kao što je onaj čija si nam sliku poslala.

3. Marija Žagar, učenica OŠ »S. Jakovljević« iz Paraćina, piše:

Od nastavnice matematike sam doznala da je nemoguće da se ugao podeli na tri jednaka dela, pa vas molim da mi kažete zbog čega je to nemoguće i ko je to potvrdio?

Odgovor. Pre svega da te ispravimo: nije reč o tom da se ugao ne može uopšte podeliti na tri jednaka dela, nego da se ta podela, u opštem slučaju, ne može izvesti samo pomoću lenjira i šestara. O toj tzv. »trisekciji ugla« bilo je već pisano u ML VIII,4 i u ML IX, 1. Dokaz o tom da ugao (u opštem slučaju) nije moguće samo pomoću šestara i lenjira podeliti na tri jednaka ne vredi da iznosimo na ovom mestu, jer je za razumevanje tog dokaza potrebno mnogo više predznanja iz matematike nego što imaju učenici osnovne škole.

4. Dubravka Apić, učenika VI r.OŠ »I. Gundulić« iz Beograda, saopštava nam:

Želela bih da saznam nešto o Eratostenovom situ.

Odgovor. Da bi se pomoću niza prirodnih brojeva 1,2,3,4,5,6,7,8,9,1,011, 12,13,14,1,51,6,17,18,19,20,21,22,23, ... (koji se mogu ispisati i u polja jedne pravougaone ili kvadratne tablice, kao što je to učinjeno sa brojevima od 1 do 100 na sl. 1), postupa se na sledeći način.

Sl. 1

Precrta se prvo broj 1, jer ovaj broj nije ni prost, ni složen. Zatim se, počevši od broja 2, koji se ne precrtava kao prvi prost broj, precrta redom svaki drugi broj, tj. svi brojevi deljivi sa 2. Potom se ostavi, kao neprecrtan, prvi broj iza broja 2 koji nije precrtan, tj. broj 3, a precrta se, počevši od njega, svaki treći broj, tj. svi brojevi deljivi sa 3; itd. Postupajući tako redom dobija se niz 2,3,5,7,11,13,15,17,19,23 . . . u kome su ostali samo neprecrtani prosti brojevi. Slično ovome može se postupiti i sa brojevima iz tablice na sl. 1.

Izloženi postupak za dobijanje niza prostih brojeva potiče od grškog matematičara Eratostena, koji je živeo od 275. do 195. g. pre n.e., pa je zato poznat kao *Eratostenovo sito.*

5. Ivan Lazić, učenik $VIII_2$ r. OŠ »N. Stojanović-Tatko« iz Donje Rečice, pita:

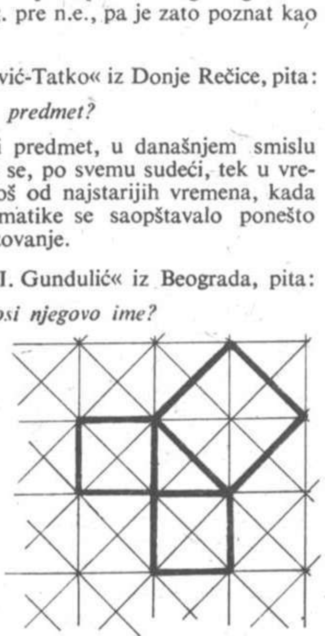
Kada je prvi put matematika uvedena kao predmet?

Odgovor. Matematika kao poseban nastavni predmet, u današnjem smislu reči, za koji postoje i posebni nastavnici, pojavljuje se, po svemu sudeći, tek u vremenu stvaranja srednjevekovnih univerziteta. Ali još od najstarijih vremena, kada nisu postojale škole kao što su današnje, iz matematike se saopštavalo ponešto svima onima koji su želeli da steknu neko obrazovanje.

6. Miroslav Vuksanović, učenik VI_5 r.OŠ »I. Gundulić« iz Beograda, pita:

Kako je Pitagora došao do teoreme koja nosi njegovo ime?

Odgovor. Ne zna se kako je Pitagora otkrio dokaz teoreme koja nosi njegovo ime, jer iza njega nije ostalo ništa zapisano. Jedna legenda kaže da je on, sedeći jednom na trgu koji je bio popločan pločicama oblika jednakokrako-pravouglog trougla, uočio da se u kvadratu, koji se mogao zamisliti nad hipotenuzom svakog takvog trougla (sl. 2) nalazilo isto toliko pločica, koliko ih je bilo u kvadratima koji su se mogli zamisliti nad katetama tog istog trougla. To mu je pomoglo da nađe opšti dokaz svoje teoreme i taj je dokaz, kako se misli, iznet u Euklidovom delu »Elementi«, koje je jedno od najznačajnijih matematičkih dela svih vremena.

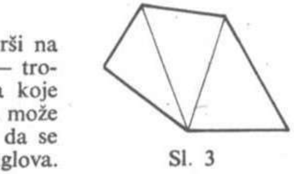


Sl. 2

7. »Jedna učenica« (koja se tako potpisala) iz Novog Sada pita:

Šta je triangulacija?

Odgovor. Triangulacija je deljenje neke površi na trougle. Naziv potiče od francuske reči »triangle« — trougao. Obično se vrši u cilju premeravanja zemljišta koje ima oblik nepravilnog mnogougla. Podela zemljišta može se izvršiti na razne načine, a obično se vrši tako da se što lakše mogu izračunati površine dobijenih trouglova.



Sl. 3

8. Učenik Milorad Petrić (koji ne kaže iz koje je škole) pita:

Šta je to radijan?

Odgovor. Radijan je centralni ugao kome pripada luk jednak poluprečniku kružnice. U punom uglu, prema tome, ima onoliko radijana, koliko se puta poluprečnik kruga nalazi u obimu kruga, što znači da u punom uglu ima $2\pi \approx 6{,}28$ radijana. Odatle sleduje da jedan radijan sadrži $180/\pi \approx 57$ stepeni, a da jednom stepenu odgovara ugao od $\pi/180 \approx 0{,}0175$ radijana.

9. R. J., student VPŠ, pita:

U čemu se sastoji „Malfatiev problem"?

Odgovor. Italijanski matematičar Malfati postavio je 1803. godine sledeći zadatak: „U datom krugu upisati 3 kruga koji se međusobno dodiruju, a od kojih svaki dodiruje po 2 strane trougla". Taj zadatak je poznat kao „Malfatijev problem".

MATEMATIČKA RAZONODA

A. A. Kolosov

Priča o dva matematičara koji su postali neprijatelji i o kubnoj jednačini[1]

Godine 1512. francuska armija, prešavši preko Alpa, prodrla je u Severnu Italiju. Zavojevači su nemilosrdno pljačkali naselja. Napadu je bio izložen i grad Brešija. Posle upornog suprotstavljanja, mesto je bilo zauzeto od strane francuske vojske. Stanovnici nesrećnog grada zatražili su pribežište u katedrali, misleći da će ih svetost tog mesta spasti od besa izbezumljenih francuskih vojnika. Tu su se skupili žene, deca i ranjeni vojnici. Među njima, zajedno sa svojim ocem, bio je i šestogodišnji dečko Nikolo. Ništa nije moglo zaustaviti francuske vojnike, oni su prodrli u katedralu i u svom besu posekli one koji su se tamo sklonili. Nikolova mati našla polumrtvog dečka pored trupa svog muža. Njemu su bile rasečene usne i jezik. Sa unakaženim dečkom mati se vratila kući i samo su njena ljubav i briga oko deteta povratili njenog sina u život. Ali on posle toga nije nikada mogao slobodno da govori, pa je dobio nadimak *tartaglia* — mucavac. Ko je mogao pomisliti da će ovo izranjavljeno dete biti jednoga dana gordost Italije, jedan od najvećih njenih matematičara!

[1] Iz knjige „Knjiga dlja vneklasnogo čtenija po matematike" od A. A. Kolosova.

Teško je bilo Nikolovoj majci posle smrti njenog muža. Ona je bila tako siromašna, da nije imala mogućnosti da plaća Nikolovo školovanje, pa je morala da ga ispiše iz škole kada je tek bio naučio abecedu do slova K. Izgledalo je da će dečko propasti u masi isto tako bedne dece. No, do krajnosti uporan i obdaren, on ne samo što je naučio i sva ostala slova, nego je savladao i latinski i grčki jezik, a tako isto i matematiku, koju je neobično voleo.

Kada nije imao hartije za pisanje, Nikolo je odlazio na obližnje groblje, pa je tamo na nadgrobnim pločama ispisivao svoje račune. Uporni rad dečka, a potom mladića, dao je svoje rezultate i u svojoj dvadeset i trećoj godini on se već samostalno izdržava učeći druge matematici, i pomaže majci. Glas o mladom naučniku prelazi granice njegovog grada Brešije i stiže do Verone i Venecije. Zbog toga ga pozivaju da drži predavanja iz geometrije, mehanike i algebre. No od toga ne postaje bogat — nagrade za ova predavanja su takve, da mu jedva stiže za goli život.

Tek 1535. godine Tartalja može slobodno da odahne, jer tada dobija katedru matematike u Veroni. Te godine je on održao i sjajnu pobedu na javnom matematičkom takmičenju sa nekim Fiorijem. Slava o Tartalji iz Verone rasprostire se po celoj Italiji.

Povod za ovo takmičenje bilo je pitanje o opštem rešenju jednačine trećeg stepena[2] koje nisu mogli da nađu ni Arapi, ni Indijci, ni stari Grci. Fiori je doznao za rešenje jednačine oblika $x^3+px=q$ od svog učitelja Scipiona Feroa (1465—1526) koji je do njega došao probanjem. No Tartanlja je već ranije, 1530. godine, našao rešenje jednog posebnog slučaja ove jednačine. Do ovog rešenja je on došao uz veliki napor, te zato nije verovao u izjave Fiorija da mu je poznato pomenuto rešenje, nego je to smatrao za hvalisanje. I tako je Tartalja, uveren u pobedu, izazvao Fiorija na javni matematički dvoboj. Dvoboj je bio zakazan za 22. februar 1935. godine. Tog dana trebalo je oba matematičara da se jave kod beležnika. Svaki od njih bio je dužan da donese 30 zadataka i da ih preda svom protivniku u prisustvu beležnika. Za rešavanje zadataka bio je predviđen rok od 50 dana. Ko od njih reši više od postavljenih zadataka, taj će se smatrati za pobednika, a sem toga će dobiti i po 5 solda za svaki zadatak.

Međutim, na kratko vreme pre tog dana do Tartalje dođe vest da Fiori stvarno zna za način rešavanja jednačine oblika $x^3+px=q$.

Tartalja oseća da, ako je to tako, Fiori će mu svakako postaviti pitanja u vezi sa rešavanjem takvih jednačina, pa će postati pobednik, pošto je on znao samo kako se mogu rešiti takve jednačine u nekim specijalnim slučajevima. Tada, kako on piše u jednom svom sastavu „ja sam uložio svu svoju revnost, prilježnost i umešnost da bih našao pravilo za rešavanje tih jednačina, pa mi je pošlo za rukom da to postignem na 10 dana pre roka, tj. do 12. februara, blagodareći srećnoj sudbini.« Mi bismo rekli — blagodareći njegovim izuzetnim sposobnostima.

Pretpostavka Tartalje se potvrdila. U predviđenom roku Fiori je predao svom suparniku 30 zadataka, koji su se svi svodili na jednačine oblika $x^3+px=q$.

Kakva li je bila opšta zadivljenost, kada je Tartalja rešio sve ove zadatke za 2 sata; Fiori ipak nije mogao da izađe na kraj ni u roku od 50 dana ni sa jednim od zadataka koje mu je postavio Tartalja iz raznih oblasti geometrije i algebre.

Glas o pobedi Tartalje brzo se raširio po celoj Italiji. Mnogi naučnici su molili Tartalju da im saopšti upotrebljeni metod rešavanja, ali je on uporno čuvao tajnu svog otkrića, obećavajući da će je objaviti u jednom većem traktatu iz algebre, koji je spremao za štampu.

Svršetak članka u idućem broju lista

[2] Opšta jednačina trećeg sterena sa jednom nepoznatom je jednačina oblika $x^3+ax^2+bx+c=0$, gde su a, b i c proizvoljni realni brojevi.

„Marsovski problem"

U časopisu »Matematičko-fizički list za učenike srednjih škola« (br. 1 za 1957-58 šk.g.) bio je objavljen članak pod naslovom »Naučnici se zabavljaju«, iz koga prenosimo sledeći njegov deo.

U tom članku se kaže:

Znajući za veliki interes naučnih istraživača u svim granama nauke za ovakve (tj. zabavne, n.pr.) probleme i zagonetke, švedska firma LKB, koja proizvodi aparate za hemijska i fizička istraživanja, dva puta svake godine objavljuje po jedan problem i šalje ga na rešavanje u hiljadama primeraka naučnicima u svim zemljama na svetu. Interes koji su ovi problemi pobudili vidi se iz hiljada odgovora koje ova firma prima. Navešćemo jedan problem koji je ova firma poslala naučnicima:

»Naš prijatelj Sven Svenson, kapetan interplanetarnog broda — kaže urednik časopisa LKB — posetio nas je pre neki dan da nas upozna sa nekim teškoćama koje je imao u svom redovnom nedavnom putovanju na Mars.

Na Marsu je sreo glavnog inspektora kanala, generala Nepa. Sprijateljili su se i Nepo ga je pozvao na večeru. To je Svenson sreo gđu Nepo i tri Nepova sina: Lu, Ku i Bu. Sven je svojim prijateljima pokazao sliku svoje male plavokose kćeri Stine i rekao koliko je stara.

Uskoro je stigao ministar saobraćaja na Marsu dr Baluk, da se upozna sa kapetanom Svensonom. Kad je dr Baluk upitao Nepa koliko su stara njegova deca, ovaj je odgovorio:

— Otkrio sam neke vrlo čudne činjenice o starosti naše dece. Proizvod godina starosti Lu, Lu i Bu iznosi 3 520 godina. Suma njihovih godina je jednaka 14 puta godine starosti Svensonove kćeri Stine. Razume se, ne pravim razliku između dužine godine na Zemlji i Marsu.

— Dobro, odgovorio je ministar, ali to ne odgovara na moje pitanje.

— Izvinite, molim vas, rekao je onda Nepo. — Želim da dodam da je vaš sin Labok, čije godine slučajno znam, stariji od sve četvoro spomenute dece.

— Sad znam odgovor, rekao je na to ministar.

— Pa koliko je star vaš sin, upitao je tada Sven.

Sl. 1

Marsijanci su ga začuđeno pogledali.

— Dragi prijatelju, pa malo dete može to odmah da izračuna!

— Razume se, odgovorio je Sven zamuckujući i ništa ne shvatajući osim da je Nepo mislio da *Marsovsko* dete može odmah to da reši.

Sven je zabrinut. On strahuje da se vrati na Mars i sretne se sa Nepom i Balokom, a da ne zna starost Laboka. Možete li mu vi pomoći — pita LKB firma stotine naučnika kojima je poslala ovaj problem i uz njega poslala crtež na sl. 1.

I blizu 200 naučnika je našlo odgovor.«

No, sem pomenutim naučnicima, ovaj problem je bio postavljen i onim učenicima naših osnovnih škola koji su ove godine radili u letnjoj školi mladih matematičara u letovalištu »Šuplja stena« pod Avalom i — nekoliko njih ga je rešilo već posle dva do tri dana razmišljanja!

Sada nas zanima koliko njih će iz redova naših čitalaca moći (naravno, samostalno!) da ga reše!

Množenje dva višecifrena broja

Dragan Pavlović, učenik VII r.OŠ »Momčilo Jopović Ozren« iz Paraćina, uputio nam je dopis u kojem ukazuje na jednu mogućnost množenja višecifrenih brojeva. Na osnovu postupka koji on primenjuje izvršeno je sledeće množenje:

$$\begin{array}{r} 7234\,.\,1235 = 35101520 \\ 21060912 \\ 14040608 \\ 7020304 \\ \hline 7162851272720 \\ \hline 8933990 \end{array}$$

Utvrdite način na koji je izvršeno ovo množenje i koja je dobra, a koja slaba strana ovog načina množenja.

U vezi s tim evo i jednog nekadašnjeg načina množenja dvocifrenog broja dvocifrenim brojem.

Ako je trebalo izvršiti množenje $48 \cdot 27$, radilo se ovako:

a) Kažem: $7 \times 8 = 56$; pišem 6, zadržavam 5.

b) Kažem: $7 \times 4 = 28$ i 5 je 33; $2 \times 8 = 16$ i 33 je 49; pišem 9, zadržavam 4.

c) Kažem: $2 \times 4 = 8$ i 4 je 12; pišem 12.

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times\, 27 \\ \hline 1296 \end{array}$$

Da li je ovaj način rada ispravan? Može li se na sličan način postupiti i kad se množe brojevi koji imaju veći broj cifara?

ОСМИНА

Шта да кажем
за осмине?

Најважније
да њих чине
осми делови
неке целине,

половина
од четвртине
и четвртина
од половине.

Ранко Симовић

NAGRADNI ZADATAK BR. 51

Na jednoj uzanoj ploči poređani su jedan do drugog 6 žetona, i to tako da jedan iza drugog dolaze na smenu, sleva udesno, po jedan crni i po jedan beli žeton. Ispred prvog od njih (crnog) ili iza poslednjeg od njih (belog) ostavljeno je slobodno mesto za još 4 žetona. Premeštanje žetona na slobodna mesta dozvoljeno je u oba smera, ali s tim da se mogu premestiti samo po 2 susedna žetona zajedno i da se pritom njihov međusobni položaj ne menja. Pokažite kako se može samo sa po tri premeštanja postići da se na početku niza jave jedan za drugim najpre sva tri bela žetona, pa odmah za njima sva tri crna žetona, i to ako su slobodna mesta ostavljena: a) ispred prvog (crnog) žetona i b) iza poslednjeg (belog) žetona.

Za tačno rešenje ovog zadatka biće nagrađeno 100 učenika matematičkim knjigama ili priborom za pisanje. Po potrebi odlučiće žreb.

Rešenje poslati na adresu: Matematički list, p.p. 728, 11001 Beograd. Na samom radu obavezno treba napisati ime i prezime, razred, odeljenje, ime škole i poštu (sa poštanskim brojem), kao i kućnu adresu pošiljaoca. Na koverti (omotu) naznačiti: Nagradni zadatak br. 51.

Rešenje treba poslati najkasnije do 20.III 1977. g.

REZULTATI KONKURSA ZA NAGRADNI ZADATAK BR. 49

R e š e n j e z a d a t k a.— a) Na 2 od kamiona treba staviti po 3 puna, po jedno poluprazno i po 3 prazna bureta, dok na treći treba staviti 1 puno, 5 polupraznih i 1 prazno bure; b) na 2 komiona treba staviti po 2 puna, po 3 poluprazna i po 2 prazna bureta, dok na treći treba staviti 3 puna, jedno poluprazno i 3 prazna bureta.

Od ukupno prispelih 2 952 rešenja tačna su bila 2 625 rešenja. Od njih su žrebom odabrana 100 rešenja, čiji su rešavaoci nagrađeni priborom za pisanje.

NAGRAĐENI SU SLEDEĆI UČENICI:

IV razred. *Cankar Irena*, OŠ »Spomenik NOB«, Cerkno; *Davidović Ljiljana*, OŠ »I. Gundulić«, Beograd; *Golubović Dragan*, OŠ »8 oktobar«, Vlasotince; *Marković Miodrag*, OŠ »Heroj R. Šišković«, Smed. Palanka; *Pantić Jasmina*, OŠ »J. Popović«, Kragujevac; *Simić Biljana*, OŠ »D. Marković«, Kruševac; *Stojanović Danijela*, OŠ »D. Obradović«, Niš; *Tanasijević Slobodan*, OŠ »M. Pijade«, Velika Plana; *Tarle Ivan*, OŠ »Đ. Natošević«, Novi Sad.

V razred. *Božić Aleksandar*, OŠ »Đ. Jakšić«, Ćuprija; *Dimitrova Snežana*, OŠ »Đ. Jakšić«, Zaječar; *Dominković Brigita*, OŠ »I. L. Ribar«, Vukovar; *Hrvaćanin Željko*, OŠ »24 april«, Kotor Varoš; *Jakuš Snežana*, OŠ »S. Knežević«, Vinkovci; *Jokić Snežana*, OŠ »V. Dragošević«, Beograd; *Kokotović Nataša*, OŠ »L. Lazarević«, Varna; *Korać Saša*, OŠ »N. Popović«, Kruševac; *Kostić Radmila*, OŠ »R. Proroković«, Nevesinje; *Nikolić Valentina*, OŠ »S. Jović«, Voluja; *Pandurević Ljiljana*, OŠ »B. Šćbrat«, Sarajevo; *Popović Ljubiša*, OŠ »V. Karadžić«, Sočanica; *Popović Valentina*, OŠ »I. Gundulić«, Beograd; *Primožić Jožica*, OŠ »Spomenik NOB«, Cerkno; *Rančić Svetozar*, OŠ »,I.L. Ribar«, Babušnica; *Stefanović Branka*, OŠ »14 oktobar«, Draginac; *Stokić Ivanka*, OŠ »Dr J. Pančić«, Bribir; *Usković Slobodan*, OŠ »Ž. Jovanović«, Valjevo;

VI razred. *Cvetković Nebojša*, OŠ »V. Karadžić«, Stubar; *Čemerikić Snežana*, OŠ »V. Karadžić«, Bač; *Đorđević Aleksandar*, OŠ »Đ. Daničić«, Novi Sad; *Đorđević Slađana*, OŠ »8 oktobar«, Vlasotinci; *Đurđević Dragica*, OŠ »I. Birčanin«, Stave; *Filipović Biljana*, OŠ »I. Birčanin«, Zemun; *Hadžiahmetović Muhiba*, OŠ »H. Kikić«, Savski Most; *Ibrahimović Izeta*, OŠ »R. Radovanović«, Bosansko Petrovo Selo; *Karlović Blažo*, OŠ »P. Jočić«, Kulina; *Kedemenec Dražen*, OŠ »Velika Pisanica«, Pisanica; *Lazić Tanja*, OŠ »P. Vragolić«, Ljubovija; *Marinković Anđelka*, OŠ »B. Krsmanović«, Sikirica; *Miljević Voja*, OŠ »J. Veselinović«, Šabac; *Naprta Igor*, OŠ »V. Nazor«, Ličko Lešće; *Nikolić Dejan*, OŠ »Ž. Apostolović«, Trstenik; *Omerović Sarija*, OŠ »I. Kapetanović«, Doboj; *Palanac Branislava*, OŠ »B. Radičević«, Čenta; *Pešić Snežana*, OŠ »V. Karadžić«, Stubal; *Radojević Bojana*, OŠ »M. Ilić-Čiča«, Aranđelovac; *Ristić Božidar*, OŠ »P. Krstić«, Pirot; *Savić Mile*, OŠ »V. Karadžić«, Surčin; *Todorović Bora*, OŠ „22 decembar«, Beograd; *Ugarčina Branislav*, OŠ »K. Trifković«, Novi Sad; *Vukas Jasna*, OŠ »Bratstvo-Jedinstvo«, Sombor; *Zec Snežana*, OŠ »G. Vitez«, Osijek; *Živanović Gordana*, OŠ »M. Glišić«, Valj. Kamenica.

VII razred. *Antunović Drago*, OŠ »I. Kovačić«, Đakovo; *Braunović Lidija*, OŠ »Njegoš«, Kotor; *Crepulja Gordana*, OŠ »Heroj Pinki«, Futog; *Debeljak Ljerka*, OŠ »K. Rojc«, Banja Luka; *Štebejac Ružica*, OŠ »3 oktobar«, Bor; *Jarić Stevan*, OŠ »J. Popović«, Kikinda; *Jovanović Radomir*, OŠ »S. Zlatanović«, Miroševci; *Knežević Gordana*, OŠ »M. Kosovac«, Šabac; *Kostić Katica*, OŠ »B. Grulović«, Beška; *Lazović Milan*, OŠ »S. Ranković«, Aranđelovac; *Mašić Muhamed*, OŠ »M. Bjelaković«, Srebrenica; *Miladinović Dragan*, OŠ »V. Karadžić«, Kruševac; *Milanović Nada*, OŠ »Podmurvice«, Rijeka; *Milenković Nevena*, OŠ »29 novembar«, Bor; *Milošević Mirjana*, OŠ »M. Pijade«, Velika Plana; *Milutinović Dragomir*, OŠ »M. Kušić«, Ivanjica; *Nikolić Branislav*, OŠ »P. Petrović Njegoš«, Zrenjanin; *Petrović Tihomir*, OŠ »J. Jovanović-Zmaj«, Ruma; *Polovina Dragana*, OŠ »S. Vajner-Čiča«, Sarajevo; *Radojičić Gordana*, OŠ »S. Ljubić«, G. Brestovac; *Stanković Miroslav*, OŠ »B. Ječmenica«, Užice; *Tričković Zoran*, OŠ »V. Karadžić«, Pirot.

VIII razred. *Aleksić Olivera*, OŠ »V. Dugošević«, Braničevo; *Bošković Vinko*, OŠ »I. Batrnek-Mali«, Zenica; *Dudić Radojka*, OŠ »M. Brković«, Zaječar; *Đorđević Miroslava*, OŠ »J. Miodragović«, Beograd; *Gračanin Denis*, OŠ »V. Vlahović«, Rijeka; *Isić Zijo*, OŠ »S. Pezo«, Mostar; *Kostić Zoran*, OŠ »J. Popović«, Novi Sad; *Krvavac Rajka*, OŠ »B. Buha«, Pljevlja; *Lazić Snežana*, OŠ »P. Vragoiić«, Ljubovija; *Martić Aleksandra*, OŠ »B. Vilotijević«, Kraljevo; *Matić Miodrag*, OŠ »M. Živojinović« Mladenovac; *Miletić Goran*, OŠ »M. Ivanović«, Ušće; *Milosavljević Nebojša*, OŠ »Čegar«, Niš; *Obradović Lljiljana*, OŠ »Z. Španac«, Beograd; *Radivojević Lljiljana*, OŠ »S. Đurkić«, Bečej; *Ružić Zoran*, OŠ »Đ. Daničić«, Beograd; *Šašić Mihailo*, OŠ »L. Lazarević«, Varna.

DOSTAVILI ISPRAVNA REŠENJA BAR 5 KONKURSNIH ZADATAKA IZ MATEMATIČKOG LISTA XI,1 I XI,2

VIII razred. Adamov Ivica, OŠ »Dr. B. Vrebalov«, Melenci 367—370, 378; **Altman Boris,** OŠ »B. Radičević«, Beograd 366, 367, 369, 370, 378, 379, 381, 383; **Blagojević Branislava,** OŠ »Karađorđe«, Topola 378—383; **Blagojević Snežana**, OŠ »Karađorđe«, Topola 365, 368—370, 378—380, 382, 383; **Blažić Dušan,** OŠ »Karađorđe«, Topola 365—370, 378—383; **Bojović Predrag,** OŠ »S. Marković«, Beograd 366—370; **Borišić Dušica,** OŠ »Dr D. Mišović«, Čačak 365—370; **Bracanović Željko,** OŠ »V. Milićević«, Grocka 365, 367—370; **Cerkvenik Vesna,** OŠ »Spomenik NOB«, Cerkno 365—370, 378—383; **Čadež Marko,** 368, 370, 378, 379, 382, 383; **Damnjanović Aleksandar,** OŠ »I. Gundulić«, Beograd 365—370, 378—383; **Feher Laslo,** OŠ »S. Marković«, B. Gradište 366—370, 378, 379, 383; **Gigić Olivera,** OŠ »Karađorđe«, Topola 378—380, 382, 383; **Janković Zoran,** OŠ »S.V. Zele«, Bojnik 366, 368—370, 378, 383; **Jeremić Slavko,** OŠ »21. maj«, Niš 365—370, 378—381, 383; **Jeremić Slobodanka,** OŠ »V. Pelagić« Pelagićevo 366, 369, 370, 378, 383; **Jevtić Radovan,** OŠ »M. Glišić« V. Kamenica 365—370; **Josipović Miroslav,** OŠ »S. Kerković«, Ljig 365—367, 369, 370; **Jovanović Divna,** OŠ »J. J. Zmaj«, Obrenovac 265, 366, 368—370, 378, 379, 382, 383; **Jovanović Predrag,** OŠ »B. Radičević«, Pančevo 266—270, 378—383; **Jovanović Slavica,** OŠ Dren 366—370, 378—380, 393; **Jović Pera,** OŠ »P. Vragolić«, Ljubovija 366, 369, 378, 379, 383; **Karić Zoran,** OŠ »Karađorđe«, Topola 365, 370, 378, 379, 382, 383; **Kostić Zoran,** OŠ »J. Popović«, Novi Sad 367—370, 378—383; **Krčmar Slobodan,** OŠ »M. Pupin«, Veternik 365—370, 378—383; **Krstić Zoran,** OŠ »D. Stambolić«, Svrljig 366, 368—370, 378, 379, 382, 383; **Lazarević Jasmina,** OŠ »M. Pijade«, M. Crniće 365, 366, 368—370, 379; **Lazić Snežana,** OŠ »P. Vragolić«, Ljubovija 369, 370, 378, 379, 383; **Lazić Tatjana,** OŠ »Karađorđe«, Topola 378—380, 382, 383; **Likić Sonja,** OŠ »J. J. Zmaj«, Obrenovac 365, 366, 368—370; **Luketa Miljan,** OŠ »B. Radičević«, Ilidža 365, 367—370; **Majstorović Milosav,** OŠ »R. Verbić-Pilot«, Boljkovci 365—370, 378, 379, 382, 383; **Marinković Marija,** OŠ »A. Mrazović«, Sombor 366—370; **Marinković Miodrag,** OŠ »Karađorđe«, Topola 365—370; **Marković Ljiljana,** OŠ »Karađorđe«, Topla 378—380, 382, 383; **Marković Vesna,** OŠ »R. Domanović«, Paraćin 365—370; **Mihajlov Radica,** OŠ »B. Radičević«, Novi Sad 378—380, 382, 383; **Milivojević Vesna,** OŠ »Karađorđe«, Topola 365—370, 378—381, 383; **Mitrović Dejan,** OŠ »Vožd Karađorđe«, Niš 365—370, 378—381, 383; **Mudrić Rade,** OŠ »Ž. Zrenjanin«, Vršac 366—370; **Nikolić Bojan,** OŠ »Karađorđe«, Topola 366—370, 378—383; **Nojić Miodrag,** OŠ »Ž. Zrenjanin«, Beograd 365—370; **Novaković Nenad,** OŠ »S. Lomić«, V. Ivanča 365, 366, 368—370; **Pantić Goran,** OŠ »Š. Filipović«, Divci 378—380, 382, 383; **Pavasović Slobodan,** OŠ »R. Bošković«, Split, 365—370, 378; **Pavlović Vojislav** OŠ »M. Živojinović«, Mladenovac 365, 366, 368—370; **Pecić Nenad,** OŠ »V. Milićević«, Grocka 365—370, 378—383; **Perić Brat8islav,** OŠ »L. Popović«, Miljakovac 365, 366, 368—370; **Perić Ljubiša,** OŠ »T. heroji«, Žitograđa 365—367, 369, 370; **Petaković Milutin,** OŠ »P. Vragolić«, Ljubovija 368, 370—380, 383; **Popović Jasminka,** OŠ »Karađorđe«, Topola 378—380, 382, 383; **Protić Jelica,** OŠ »J. Miodragović«, Beograd 365, 366, 368—370, 378—383; **Radić Joka,** OŠ »V. Pelagić«, Pelagićevo 366, 368—370, 378, 383; **Radonjić Dajana,** OŠ »Karađorđe«, Topola 365—370; **Radosavljević Zorica,** OŠ »L. Popović«, Miljkovac 365, 366, 368—370; **Radosavljević Zorica,** OŠ »Karađorđe«, Topola 365, 367—370; 278—383; **Rašić Bosica,** OŠ »L. Popović«, Miljkovac 365, 366, 368—370; **Ričković Saša,** OŠ »Karađorđe«, Topola 365—370; **Ristanović Dejan,** OŠ »J. Ćetković«, Beogard 365—370, 378—381, 383; **Stanković Sarajevka,** OŠ »L. Popović«, Miljkovac 365, 366, 368—370; **Stefanović Vesna,** OŠ »M.M. Ćopo«, Mrčajevci 366, 368, 369, 370, 378, 379, 381, 383; **Stevanović Svetlana,** OŠ »21. oktobar«, Kragujevac 366—370; **Šakota Zoran,** OŠ »S. Kerković« Ljig 365—368; 370; **Šamu Tibor,** OŠ »S. Marković«, B. Gradište 368—370, 378, 382, 383; **Šimudvarac Željko,** OŠ »I.L. Ribar«, Plavna 378—380, 382, 383; **Teodorović Radmila,** OŠ »XII prol. brigada«, Bučje 365—370, 378—381, 383; **Todorovski Zlatica,** OŠ »I.L. Ribar«, Plavna 378—383; **Topalović Mihailo,** OŠ »D. Jerković«, T. Užice 378—383; **Vasić Goran,** OŠ »21. oktobar«, Kragujevac 366—370; **Vasić Slavica,** OŠ Dren 366, 368—370, 378, 383; **Vidić Radisav,** OŠ »I. Gundulić«, Beograd 365—370; **Vidić Stevan,** OŠ »I. Gundulić«, Beograd 365—370, 378, 379, 382, 383; **Vrškić Timka,** OŠ »M. Popić«, Zenica 378—381, 383; **Vučković Veljko,** OŠ »Đ. Jakšić«, Međa 366—370, 378—383; **Zajc Melita,** OŠ »Spomenik NOB«, Cerkno 365, 366, 368—370; 378—383; **Zlatić Goran,** OŠ »Heroj R. Šišković«, S. Palanka 378—383; **Živojinović Vesna,** OŠ »B. Radičević«, Sedlare 366—370.

IV razred. Đoković Nebojša, OŠ »P. Vragolić«, Ljubovija 358, 370, 371—373; **Madžarević Tatjana,** OŠ »M. Ilić - Čiča«, Aranđelovac 359, 369—373, 382, 383; **Obradović Marko,** OŠ »I. Gundulić«, Beograd 359, 360, 371—373; **Papić Olivera,** OŠ »B. Radičević«, Priboj na Limu 369, 370, 372, 373, 383.

V razred. Aleksić Ivana, OŠ »Karađorđe«, Beograd 359, 362, 369, 372, 365, 383; **Anđelković Zoran,** OŠ »B. Stojanović-Drenički 358, 360, 362, 373, 374, 383; **Antić Novica,** OŠ »B. S.-Drenički«, Medveđa 358, 360, 362, 371—373, 382; **Arsić Slađana,** OŠ »B. S.-Drenički«, Medveđa 358, 360, 361, 371—374, 382, 383; **Bajt Renata,** OŠ Cerkno 358, 359, 360, 372, 373, 383; **Bevk Irena,** OŠ Cerkno 371—374, 383; **Blagojević Ivan,** OŠ »B. S.-Drenički«, Medveđa 358, 360, 362, 371—375; **Bobić Đulesma,** OŠ »I. Andrić«, Gradačac 358, 362, 369, 371, 372, 374, 383; **Bosić Snažana,** OŠ »S. Janić«, Vlasotince 362, 371—375, 383; **Bošković Marica,** OŠ »Karađorđe«, Beograd 359, 362, 369—973, 375, 383; **Bratina Nataša,** OŠ Cerkno 371, 374, 375, 382, 383; **Brkić Dragan,** OŠ »Partizanski Borac«, Drugovac 372—375, 383; **Brkić Vesna,** OŠ »Partizanski Borac«, Drugovac 372—375, 383; **Brtan Mirjana,** OŠ »S. Škrgo«, Zenica 358, 359, 361, 362, 369, 371, 372, 374, 383; **Buri Livija,** OŠ »S. Marković«, B. Gradiište 372—375, 382, 383; **Cvetanović Snežana,** OŠ »Ž. Apostolović«, Trstenik 371—375, 382, 383; **Čolić Bojan,** OŠ »Karađorđe«, Topola 372—375, 383; **Dašić Nenad,** OŠ »I. Gundulić«, Beograd 372—375; **Đorđević Nenad,** OŠ »Učitelj Tasa«, Niš 371—374, 383; **Đurić Lidija,** OŠ »Ž. Apostolović« Tstenik 371—375, 382, 383; **Eržen Stanislava,** OŠ Cerkno 358, 371, 372, 374, 382, 383; **Erić Milena,** OŠ »P. Tasić«, V. Lešnica 371, 372, 374, 375, 383; **Gavrilović Milan,** OŠ »R. Mitrović«, Čačak 371, 372, 374, 375, 383; **Gavrilović Milka,** OŠ »R. Mitrović«, Čačak 371, 372, 374, 375, 383; **Ilić Ivan,** OŠ »Učitelj Tasa«, Niš 371—375; **Jakšić Nebojša,** OŠ »B. Stojanović-Drenički«, Medveja 358, 360, 362, 371—374; **Jančić Goran,** OŠ »P. Tasić«, V. Lešnica 372—375, 383; **Jančić Gordana,** OŠ »P. Tasić«, V. Lešnica, 371—374, 382, 383; **Jevremović Mikan,** OŠ »R. Mitrović«, Čačak 371—374, 383; **Jevtić Života,** OŠ »M. Ilić-Čiča«, Aranđelović 371—374, 382, 383; **Jevtović Sonja,** OŠ »F. Filipović«, Čačak 371—375, 383; **Jovanović Dejan,** OŠ »B. Radičević«, Pančevo 371—375; **Julči Mlakar,** OŠ Cerkno 371—373, 375, 383; **Kanački Sonja,** OŠ «B. Radić«, Bavanište 359, 369, 371—374, 382; **Kapetanović Suzana,** OŠ »S. Škrgo«, Zenica 371—374, 382, 383; **Karaklajić Dušica,** OŠ »M. Kušić«, Bukovica 358, 360, 362, 372, 373; **Maranović Milorad,** OŠ »S. Filipović«, Beograd 372—375, 383; **Kojović Aleksandar,** OŠ »B. Strahinja«, Beograd 371—375, 382, 383; **Kokelj Danica,** OŠ Cerkno 358, 372, 374, 382, 383; **Krgin Bratimir,** OŠ »B. Radičević«, N. Sad 371—375, 383; **Maksić Miroslav,** OŠ »R. Mitrović«, Čačak 371—375, 383; **Marković Jovan,** Beograd 372—375, 383; **Matić Dragana,** OŠ »Karađorđe«, Beograd 372—375, 383; **Matović Mirjana,** OŠ »P. Tasić«, V. Lešnica 371—374, 383; **Mihailović Zorana,** OŠ »Učitelj Tasa«, Niš 371—374, 383; **Miletić Goran,** OŠ »Ž. Apostolović«, Trstenik 371—375, 382, 383,; **Milićević Nada,** OŠ »I. Gundulić«, Beograd 371—374, 383; **Milivojević Saša,** OŠ »Karađorđe«, Topola 372—383; **Miljević Tanja,** OŠ »Karađorđe«, Beograd 358, 359, 362, 369, 372, 375, 383; **Nešić Mikica,** OŠ »Ž. Apostolović«, Trstenik 371—375, 382, 383; **Ocokoljić Vera,** OŠ »R. Mitrović«, Čačak 371—374, 383; **Petrović Vera,** OŠ »R. Mitrović«, Čačak 371—373, 383; **Petrović Goran,** OŠ »R. Mitrović«, Čačak 371—375; **Pešić Sanja,** OŠ »I. Gundulić«, N. Beograd 371—375, 383; **Popović Jasmina,** OŠ »S. Janić«, Vlasotince 358, 362, 371—375, 383; **Popović Milica,** OŠ »I. Gundulić«, Beograd 371—375, 382, 383; **Popović Slobodan,** OŠ »P. Tasić«, V. Lešnica 371—374, 383; **Popović Tatjana,** OŠ »I. Gundulić«, Beograd 371—374, 383; **Primožić Jožica,** OŠ Cerkno 358, 371—374, 383; **Radatović Žuća,** OŠ »S. Marković«, B. Gradište 372—382, 383; **Radojičić Nevenka,** OŠ »Ž. Apostolović«, Trstenik 371—373, 375, 382, 383; **Radojević Anđela,** OŠ »M. Ilić-Čiča«, Aranđelovac 371—375, 382, 383; **Radojević Slađana,** OŠ »Ž. Apostolović«, Trstenik 371—375, 382, 383; **Rančić Svetozar,** OŠ »I. Lola-Ribar«, Babušnica 371, 373, 375, 382, 383; **Ranković Zvonko,** OŠ »B. Stojanović-Drenički«, Medveđa 371—374, 382, 383; **Savić Milan,** OŠ »B. Stojanović-Drenički», Medveđa 371—375, 382; **Sinanović Indira,** OŠ »S. Škrgo«, Zenica 371—374, 382, 383; **Skopljak Aida,** OŠ »S. Škrgo«, Zenica 371—374, 382,; **Slijepčević Snežana,** OŠ »I. Gundulić«, Beograd 371—375; **Sorak Božana,** OŠ »S. Škrgo«, Zenica 371—374, 383; **Stojanović Danijela,** OŠ, »R. Dodić», Milutovac 358—360, 362, 383; **Stefanović Ljiljana,** OŠ »R. Mitrović«, Čačak 371—375, 383; **Stojanović Tomislav,** OŠ »Kadinjača«, Loznica 371—373, 383; **Šćekić Tanja,** OŠ »I. Gundulić«, Beograd 371—374, 382, 383; **Šimić Ružica,** OŠ »S. Škrgo«, Zenica 371—374, 382, 383; **Tanasković Aleksandar,** OŠ »Karađorđe«, Topola 372—375, 382, 383; **Terzić Aleksandar,** OŠ »Ž. Apostolović«, Trstenik 371—375, 382, 383; **Trifković Milan,** OŠ »J.J.—Zmaj«, Obrenovac 371—375, 383; **Udiljak Brigita,** OŠ »S. Škrgo«, Zenica 371, 372, 374, 382, 383; **Vasiljević Saša,** OS »Kralj. Bataljon«, Kraljevo 358, 359, 362, 371—374; **Velimirović Bratislav,** OŠ »9. Oktobar«, Prokuplje 371—374, 383; **Velisavljević Slobodan,** OŠ »R. Mitrović«, Čačak 371—375, 383; **Veselinović Aleksandar,** OŠ »Karađorđe«, Beograd 371—375, 382, 383; **Vraštanović Snežana,** OŠ ». Jovanović«, Šabac 358, 359, 371—373; **Vučić Tatjana,** OŠ »M. Ilić-Čiča«, Aranđelovac 371—375; **Vukadinović Gordana,** OŠ »Ž. Apostolović« Trstenik 371—375, 383; **Vuković Milijana,** OŠ »B. Stojanović-Drenički«, Medveđa 358, 360, 369, 371—374, 382, 383; **Zdravković Branka,** OŠ »Karađorđe«, Beograd 362, 369, 370; 372, 375, 383; **Zelić Darko,** OŠ »Karađorđe«, Topola 373—375, 382, 383; **Živković Bojan,** OŠ »S. Janić«, Vlasotince 358, 362, 369, 371—375, 383.

OBAVEŠTENJE PRETPLATNICIMA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom, s proredom. Rukopisi se ne vraćaju.

2. *Matematički list* namenjen je *svim učenicima* IV—VIII raz. osnovne škole. List izilazi 6 puta u toku školske godine, i to 1. X, 15. XI, 1. I, 15. II, 1. IV i 15. V.

3. Godišnja pretplata (za svih 6 brojeva) iznosi 30 dinara. Naručiocima za više od 10 kompleta odobravamo rabat (20%, 15%, 10%), zavisno od roka do kojeg se isplati celokupna pretplata (1. XII, 1. III, 1. VI). Nikakvi drugi odbici ne uvažavaju se.

Narudžbine se šalju samo neposrepno na adresu lista, a novac na **žiro-račun „Matematičkog lista" broj 60806-678-14627.** Pri tome treba **obavezno** navesti *tačnu adresu* na koju list treba dostaviti i jasno naznačiti na šta se narudžbina odnosno uplata odnosi.

Narudžbine primamo i direktno preko telefona redakcije, br. **011-638-263.**

4. Raspolažemo kompletima lista iz školske 1968/69. god. (br. III, 1—5) šk. 1969/70. god. (br. IV, 1—5), šk. 1970/71. god. (br. V, 4 i 5), šk. 1971/72. god. (br. VI, 1—5), šk. 1972/73. god. (br. VII, 1—5), šk. 1973/74. god. (br. VIII, 1—5), šk. 1974/75. god. (br. IX, 1—6) i šk. 1975/76. god. (br. X, 1—6). Od ovih godišta prodaju se: godišta III, IV, VI i VII po sniženoj ceni od 10 dinara za komplet, godište V po ceni od 4 dinara i godište VIII, IX i X po ceni od 15 din. Zbirka rešenih zadatka sa matematičkih takmičenja učenika osnovne škole može se dobiti po ceni od 10 din.

5. Mole se poverenici *Matematičkog lista* da izmire sva zaostala dugovanja.

6. Sve priloge, primedbe i naružbe slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, p.p. 728, 11001 Beograd (Tel. 638—263)

S A D R Ž A J