Полиомино - и игра и математика

Ђорђе Баралић

Математички институт САНУ, Београд

Државно такмичење ученика средњих школа Србије,
11. март 2017. Београд

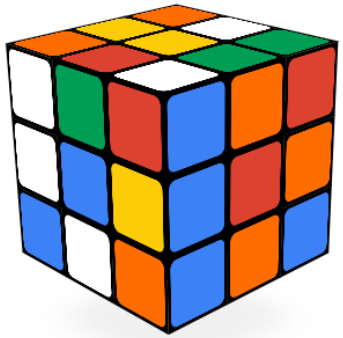
Математичари од рођења!

Математичари од рођења!

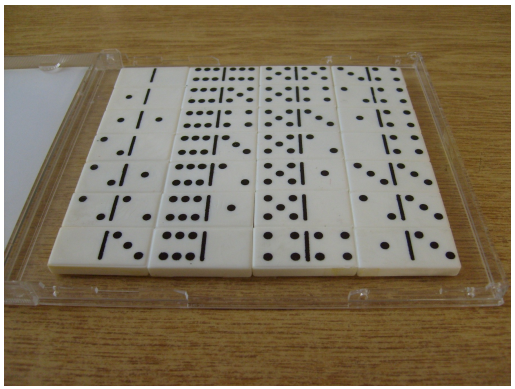
Математичари од рођења!

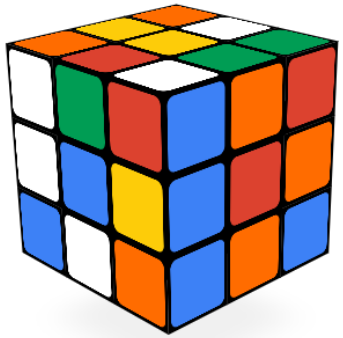
Математичари од рођења!

Математичари од рођења!



Математичари од рођења!





Шта је полиомино?

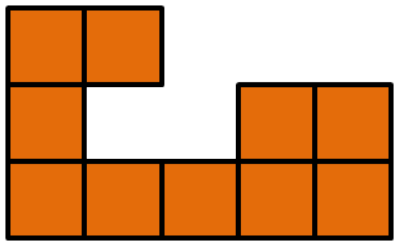
Solomon Golomb, 1953

Полиомино је фигура која се састоји од $n \in \mathbb{N}$ јединичних квадратића повезаних ,,страна за страну''и која нема ,,рупа''.

Шта је полиомино?

Solomon Golomb, 1953

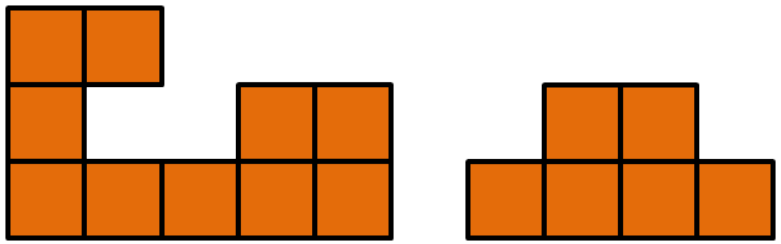
Полиомино је фигура која се састоји од $n \in \mathbb{N}$ јединичних квадратића повезаних ,,страна за страну''и која нема ,,рупа''.



Шта је полиомино?

Solomon Golomb, 1953

Полиомино је фигура која се састоји од $n \in \mathbb{N}$ јединичних квадратића повезаних ,,страна за страну''и која нема ,,рупа''.

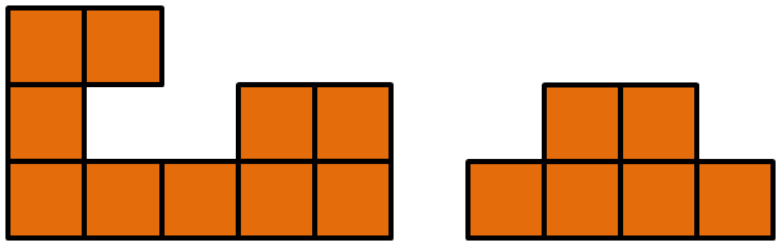


Слика: Примери облика полиомина

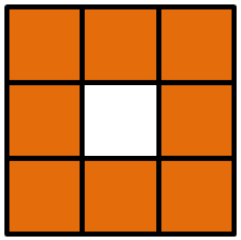
Шта је полиомино?

Solomon Golomb, 1953

Полиомино је фигура која се састоји од $n \in \mathbb{N}$ јединичних квадратића повезаних ,,страна за страну''и која нема ,,рупа''.



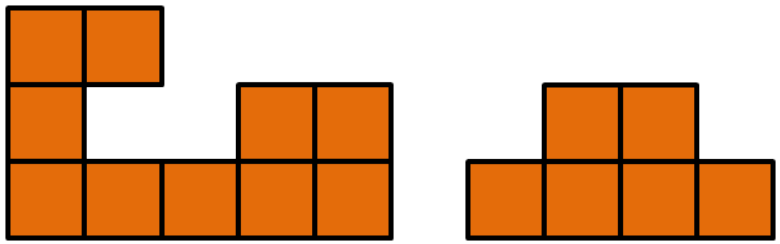
Слика: Примери облика полиомина



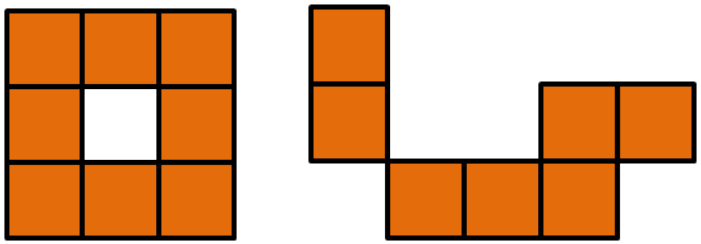
Шта је полиомино?

Solomon Golomb, 1953

Полиомино је фигура која се састоји од $n \in \mathbb{N}$ јединичних квадратића повезаних ,,страна за страну''и која нема ,,рупа''.



Слика: Примери облика полиомина



Слика: Примери облика који нису полиомини

Класификација полиомина

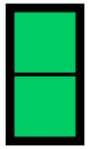
Слика:

Мономино

Класификација полиомина

Слика:

Мономино

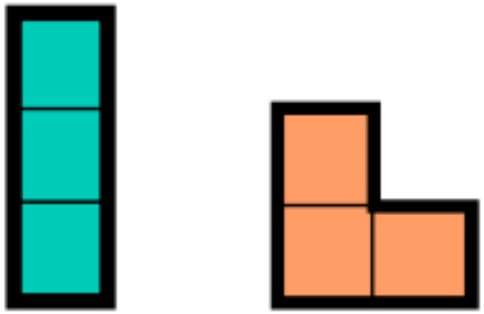


Слика:

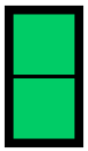
Домино

Класификација полиомина

Слика:
Мономино



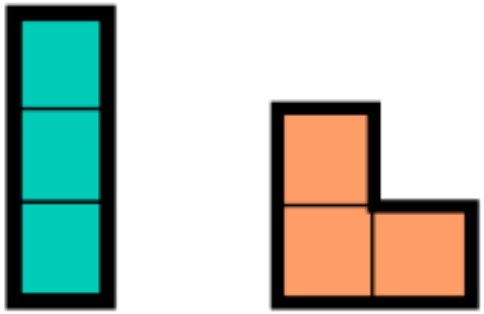
Слика: Тромини



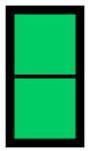
Слика:
Домино

Класификација полиомина

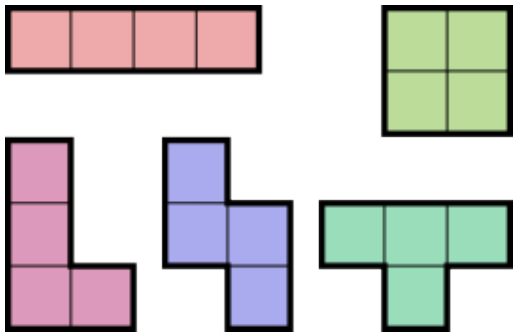
Слика: Мономино



Слика: Тромини



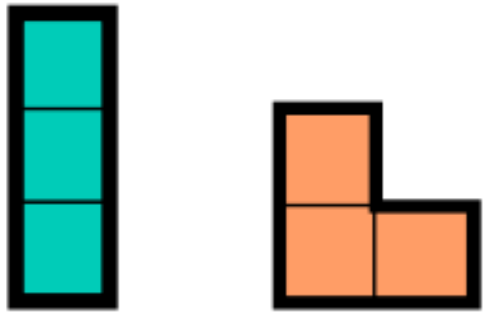
Слика: Домино



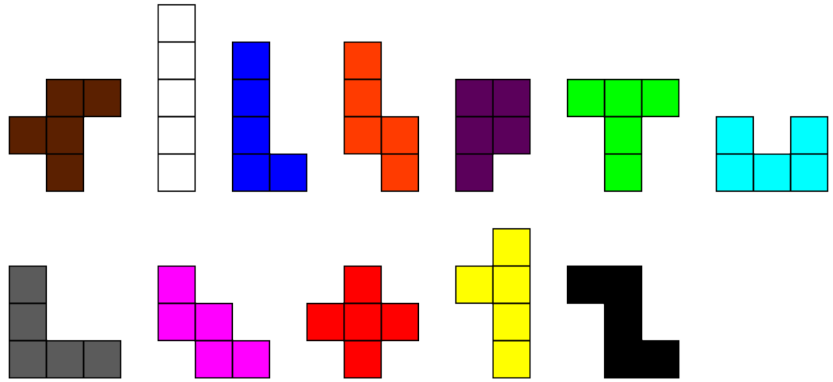
Слика: Тетрамини

Класификација полиомина

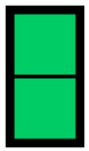
Слика: Мономино



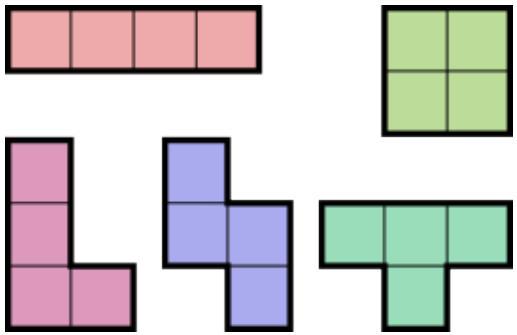
Слика: Тромини



Слика: Пентамини



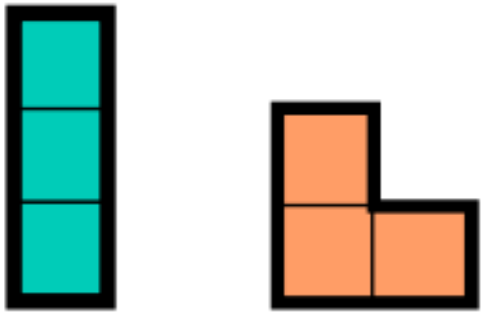
Слика: Домино



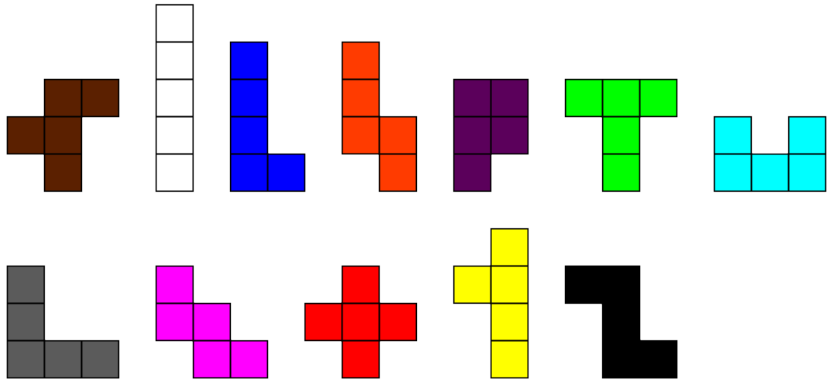
Слика: Тетрамини

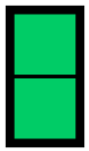
Класификација полиомина

Слика:
Мономино

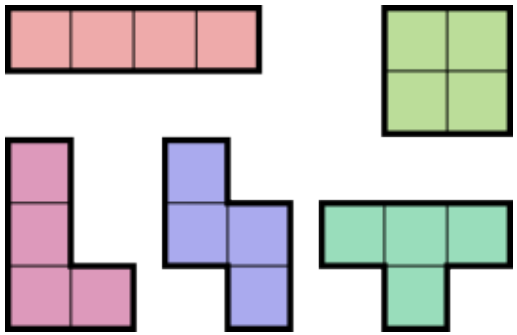


Слика: Тромини

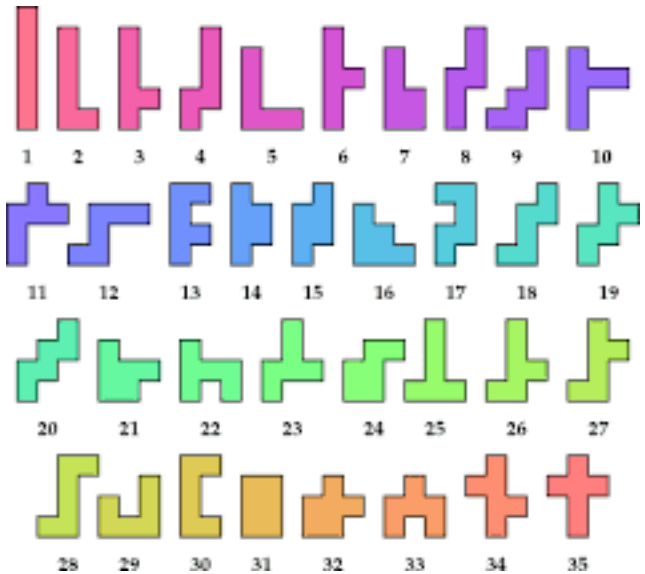




Слика:
Домино



Слика: Тетрамини



Слика: Хексамини

Колико има различитих n-омина

n	n-омино	број различитих слободних n-омина
1	мономино	1
2	домино	1
3	тромино	2
4	тетрамино	5
5	пентамино	12
6	хексамино	35
7	хептамино	107
8	октамино	363
9	нонамино	1248
10	декамино	4460
11	андекамионо	16094
12	додекамино	58937

Колико има различитих n-омина

n	n-омино	број различитих слободних n-омина
1	мономино	1
2	домино	1
3	тромино	2
4	тетрамино	5
5	пентамино	12
6	хексамино	35
7	хептамино	107
8	октамино	363
9	нонамино	1248
10	декамино	4460
11	андекамионо	16094
12	додекамино	58937

Хипотеза

Досадашња истраживања иду у прилог хипотези да је асимптотска процена броја A_n броја различитих слободних n-омина

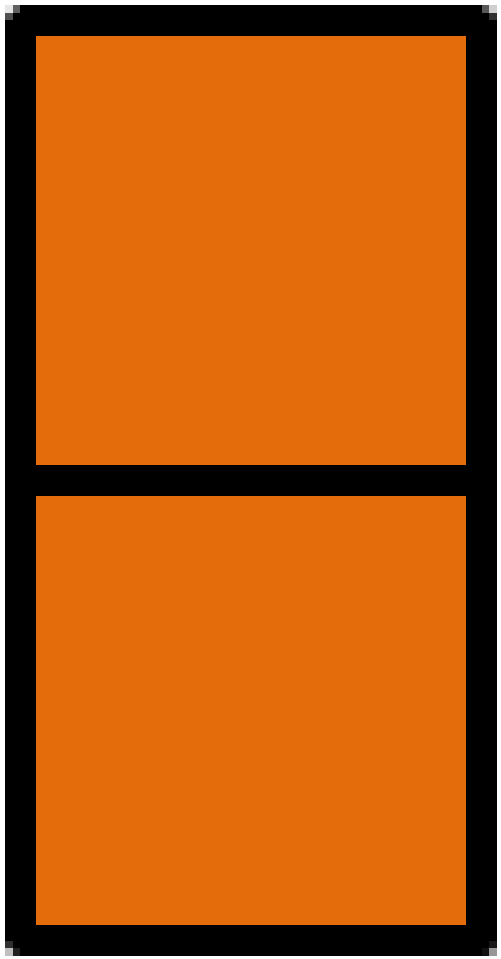
$$A_n \sim \frac{8c\lambda^n}{n},$$

где је $\lambda = 4.0626$ и $c = 0.3169$.

Домине

Домине

Домине



Домино поплочавања

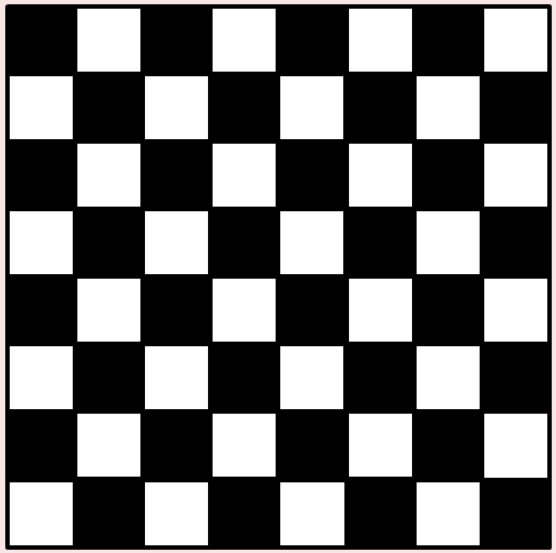
Пример

Да ли је шаховску таблуу могуће поплочати са доминама?

Домино поплочавања

Пример

Да ли је шаховску таблуу могуће поплочати са доминама?



Слика: Шаховска табла

Домино поплочавања

Домино поплочавања

- шаховска табла садржи 64 поља наизменично беле и црне боје

Домино поплочавања

- шаховска табла садржи 64 поља наизменично беле и црне боје
- Свака домина прекрива 1 црно и 1 бело поље

Домино поплочавања

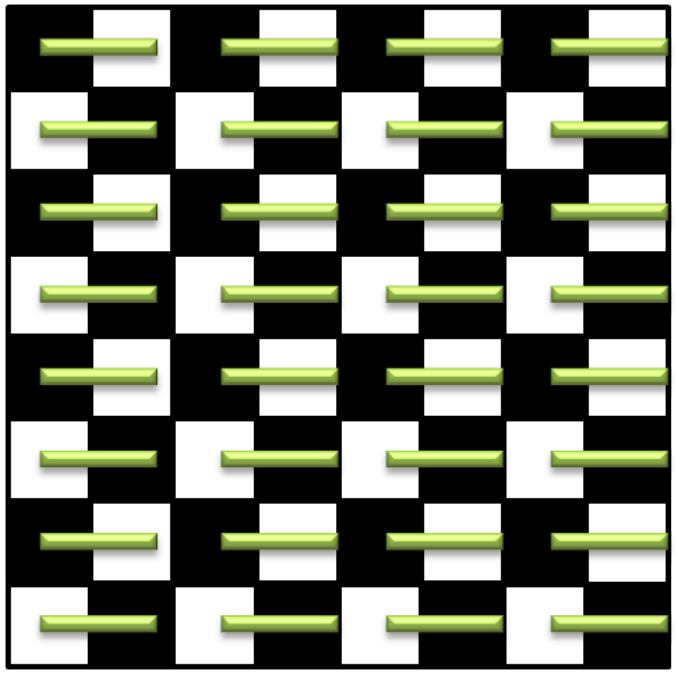
- шаховска табла садржи 64 поља наизменично беле и црне боје
- Свака домина прекрива 1 црно и 1 бело поље
- Белих и црних поља има једнако

Домино поплочавања

- шаховска табла садржи 64 поља наизменично беле и црне боје
- Свака домина прекрива 1 црно и 1 бело поље
- Белих и црних поља има једнако
- Дато поплочавање је могуће

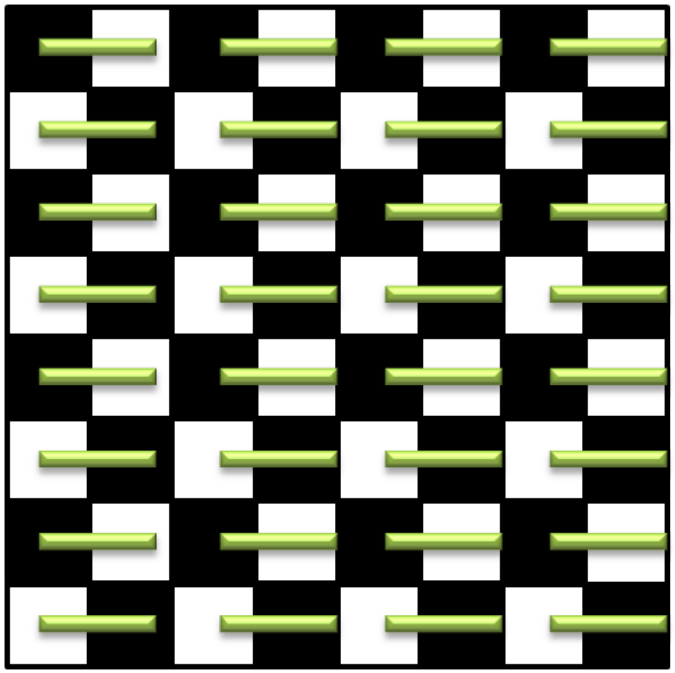
Домино поплочавања

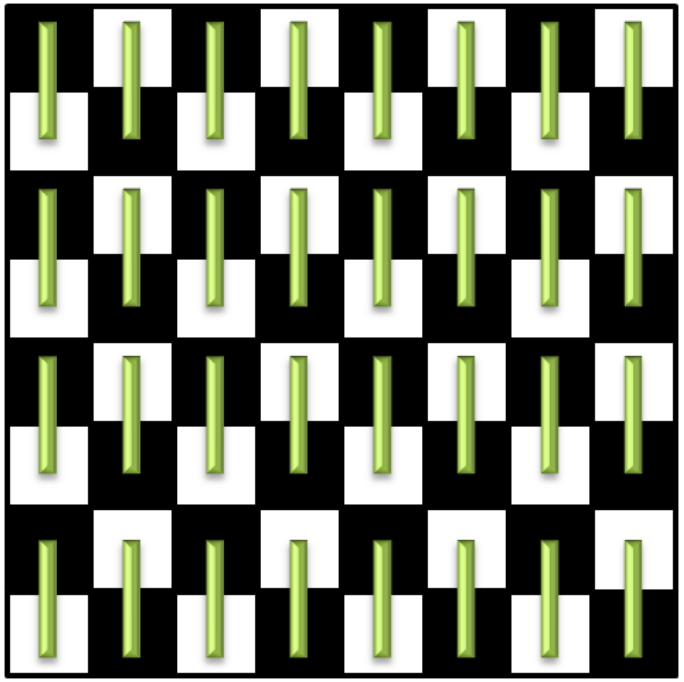
- шаховска табла садржи 64 поља наизменично беле и црне боје
- Свака домина прекрива 1 црно и 1 бело поље
- Белих и црних поља има једнако
- Дато поплочавање је могуће



Домино поплочавања

- шаховска табла садржи 64 поља наизменично беле и црне боје
- Свака домина прекрива 1 црно и 1 бело поље
- Белих и црних поља има једнако
- Дато поплочавање је могуће





Домино поплочавања

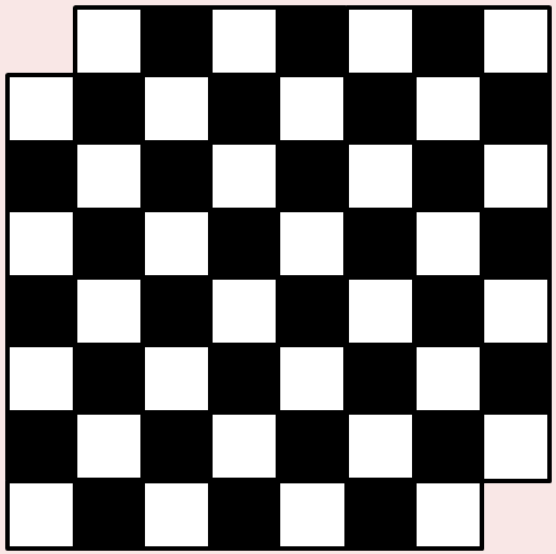
Пример

Може ли се шаховска табла димензија 8×8 *из које су избачена нека два угаона поља поплочати доминама* 1×2*?*

Домино поплочавања

Пример

Може ли се шаховска табла димензија 8×8 *из које су избачена нека два угаона поља поплочати доминама* 1×2*?*



Слика: Шаховска таблаа са избаченим угаоним пољима

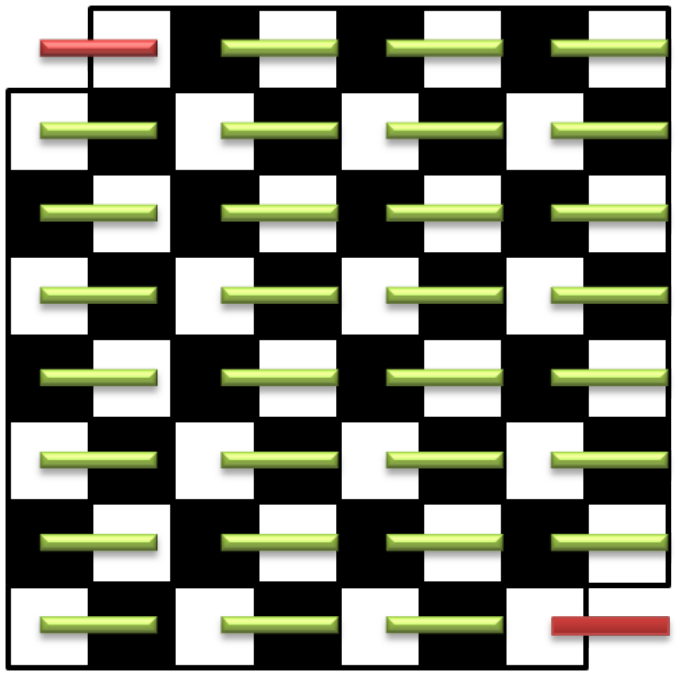
- Претпоставимо да су на овој шаховској таблии уклоњена два црна поља

- Претпоставимо да су на овој шаховској таблии уклоњена два црна поља
- Свака домина прекрива једно црно и једно бело поље

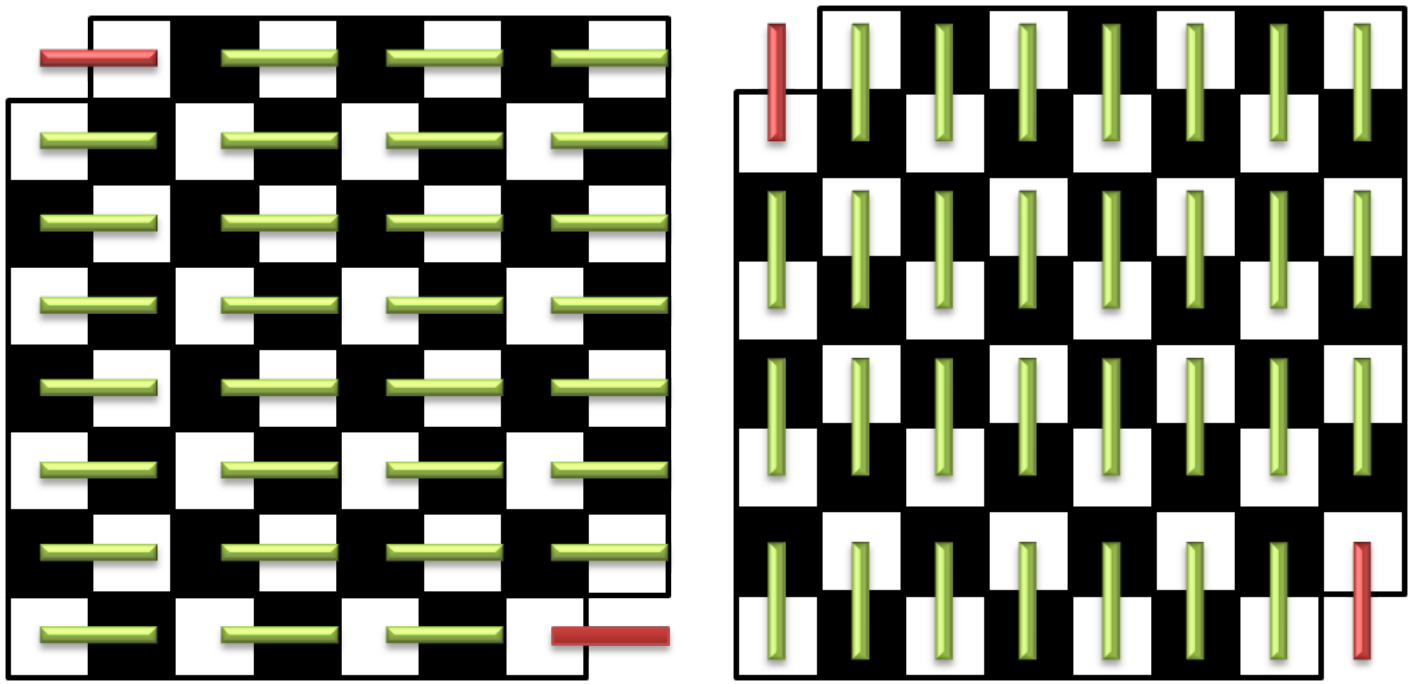
- Претпоставимо да су на овој шаховској таблии уклоњена два црна поља
- Свака домина прекрива једно црно и једно бело поље
- Како табла садржи више белих него црних поља закључујемо да дато поплочавање није могуће

- Претпоставимо да су на овој шаховској таблии уклоњена два црна поља
- Свака домина прекрива једно црно и једно бело поље
- Како табла садржи више белих него црних поља закључујемо да дато поплочавање није могуће

- Претпоставимо да су на овој шаховској таблии уклоњена два црна поља
- Свака домина прекрива једно црно и једно бело поље
- Како табла садржи више белих него црних поља закључујемо да дато поплочавање није могуће



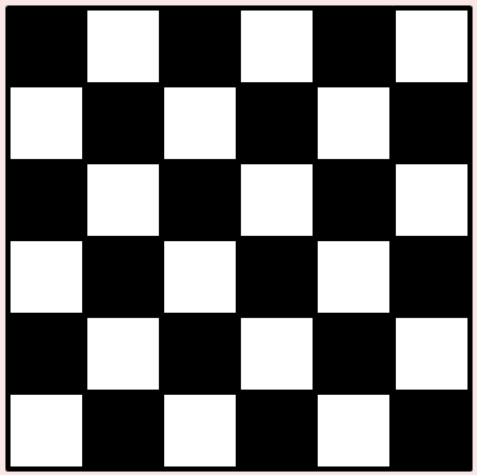
- Претпоставимо да су на овој шаховској таблии уклоњена два црна поља
- Свака домина прекрива једно црно и једно бело поље
- Како табла садржи више белих него црних поља закључујемо да дато поплочавање није могуће



Домино поплочавања

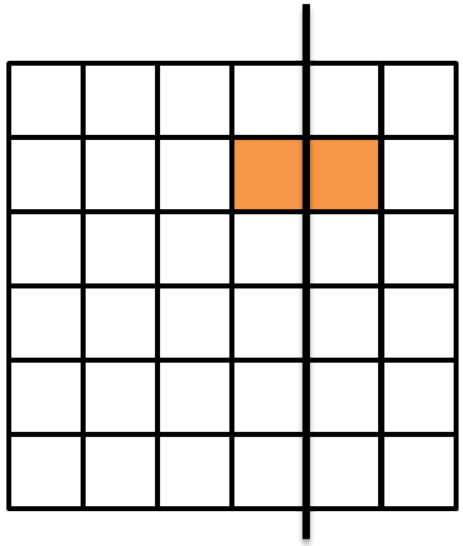
Пример

Да ли се табла димензија 6×6 *прекривена доминама може презати, а да не прережемо ни једну домину?*

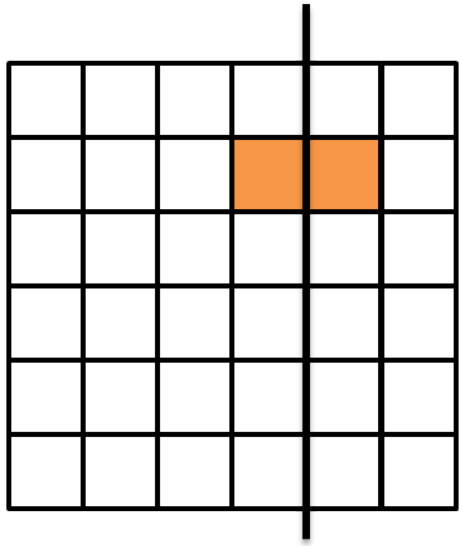


- Претпоставимо супротно, тј. да дато резање није могуће направити

- Претпоставимо супротно, тј. да дато резање није могуће направити

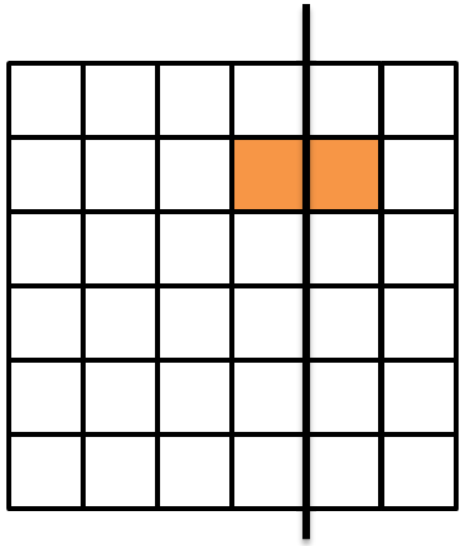


- Претпоставимо супротно, тј. да дато резање није могуће направити



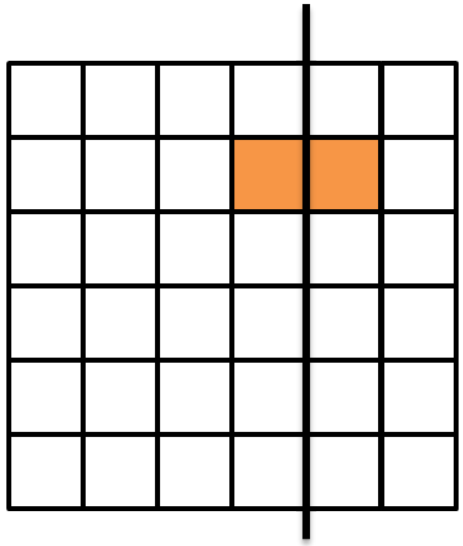
- Имамо 10 линија

- Претпоставимо супротно, тј. да дато резање није могуће направити



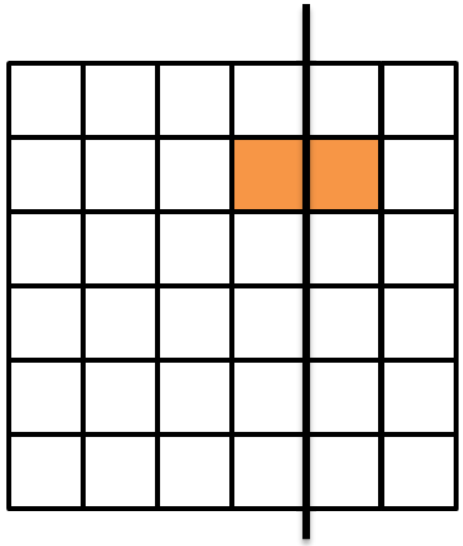
- Имамо 10 линија
  - 5 хоризонталних

- Претпоставимо супротно, тј. да дато резање није могуће направити



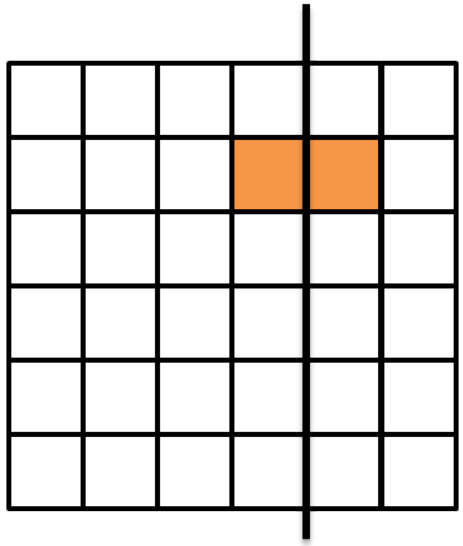
- Имамо 10 линија
  - 5 хоризонталних
  - 5 вертикалних

- Претпоставимо супротно, тј. да дато резање није могуће направити



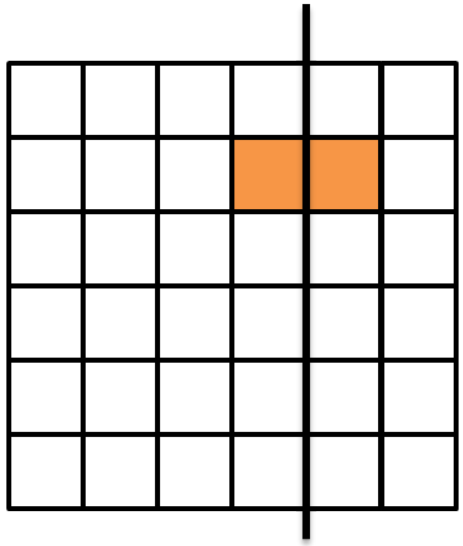
- Имамо 10 линија
  - 5 хоризонталних
  - 5 вертикалних
  - од којих свака мора пресјећи бар једну домину

- Претпоставимо супротно, тј. да дато резање није могуће направити



- Имамо 10 линија
  - 5 хоризонталних
  - 5 вертикалних
  - од којих свака мора пресјећи бар једну домину
- **Свака од линија заправо пресеца најмање двије домине**

- Претпоставимо супротно, тј. да дато резање није могуће направити



- Имамо 10 линија
  - 5 хоризонталних
  - 5 вертикалних
  - од којих свака мора пресјећи бар једну домину
- **Свака од линија заправо пресеца најмање двије домине**
- Дакле, мора бити најмање 20 домина, што је контрадикција.

На колико различитих начина можемо поплочати шаховску плочу 8×8?

На колико различитих начина можемо поплочати шаховску плочу 8×8?

- Одговор на ово питање дали су (Fischer - Temperley & Kasteleyn, 1961)

На колико различитих начина можемо поплочати шаховску плочу 8×8?

- Одговор на ово питање дали су (Fischer - Temperley & Kasteleyn, 1961)

Теорема (Fischer - Temperley & Kasteleyn, 1961)

Број поплочавања $2m \times 2n$ плоче са доминама је

$$\prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \left(4\cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + 4\cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

На колико различитих начина можемо поплочати шаховску плочу 8×8?

- Одговор на ово питање дали су (Fischer - Temperley & Kasteleyn, 1961)

Теорема (Fischer - Temperley & Kasteleyn, 1961)

Број поплочавања $2m \times 2n$ плоче са доминама је

$$\prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \left(4\cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + 4\cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

- Шта и даје одговор на постављено питање

На колико различитих начина можемо поплочати шаховску плочу 8×8?

- Одговор на ово питање дали су (Fischer - Temperley & Kasteleyn, 1961)

Теорема (Fischer - Temperley & Kasteleyn, 1961)

Број поплочавања $2m \times 2n$ плоче са доминама је

$$\prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \left(4\cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + 4\cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

- Шта и даје одговор на постављено питање
- $12.988.816 = 3604^2$

Пример

На колико начина се табла димензија $n \times 2$ може поплочати са плочицама димензија 1×2?

Фибоначијеви бројеви

Пример

На колико начина се табла димензија $n \times 2$ може поплочати са плочицама димензија 1×2?

- Нека f_n означава број могућих поплочавања од $n \times 2$ правоугаоника

Фибоначијеви бројеви

Пример

На колико начина се табла димензија $n \times 2$ може поплочати са плочицама димензија 1×2?

- Нека f_n означава број могућих поплочавања од $n \times 2$ правоугаоника
- За $n = 1$, очигледно је $f_1 = 1$

Фибоначијеви бројеви

Пример

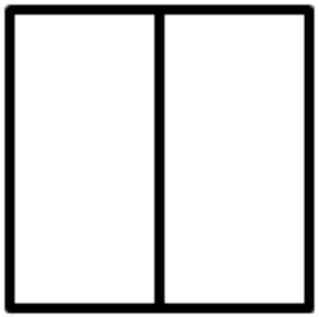
На колико начина се табла димензија $n \times 2$ може поплочати са плочицама димензија 1×2?

- Нека f_n означава број могућих поплочавања од $n \times 2$ правоугаоника
- За $n = 1$, очигледно је $f_1 = 1$
- За $n = 2$, добијамо да је $f_2 = 2$, једноставно имамо само две могућности.

Пример

На колико начина се табла димензија $n \times 2$ може поплочати са плочицама димензија 1×2?

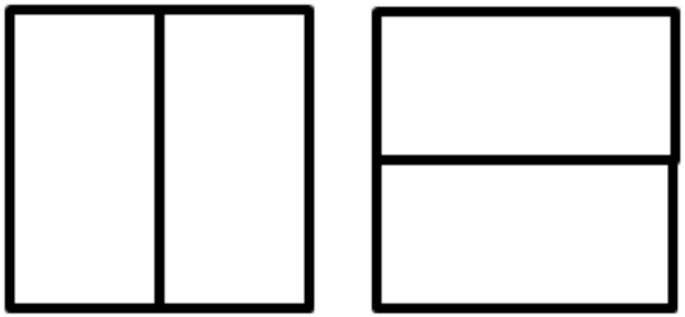
- Нека f_n означава број могућих поплочавања од $n \times 2$ правоугаоника
- За $n = 1$, очигледно је $f_1 = 1$
- За $n = 2$, добијамо да је $f_2 = 2$, једноставно имамо само две могућности.



Пример

На колико начина се табла димензија $n \times 2$ може поплочати са плочицама димензија 1×2?

- Нека f_n означава број могућих поплочавања од $n \times 2$ правоугаоника
- За $n = 1$, очигледно је $f_1 = 1$
- За $n = 2$, добијамо да је $f_2 = 2$, једноставно имамо само две могућности.



- Размотримо нпр. f_7.

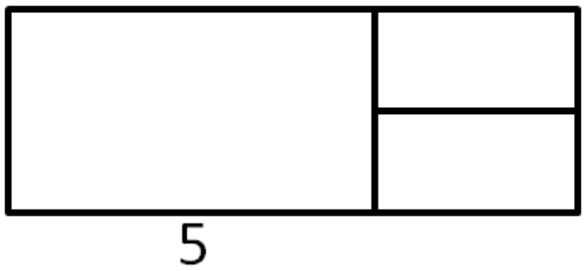
- Размотримо нпр. f_7.
- Поделимо сва могућа поплочавања од 7×2 правоугаоника у две класе

- Размотримо нпр. f_7.
- Поделимо сва могућа поплочавања од 7×2 правоугаоника у две класе
  I Класа V садржи сва поплочавања са једноставним вертикалним доминама на десном крају.

- Размотримо нпр. f_7.
- Поделимо сва могућа поплочавања од 7×2 правоугаоника у две класе

I Класа V садржи сва поплочавања са једноставним вертикалним доминама на десном крају.

II Класа H садржи сва друга поплочавања, где се на крају не налази вертикална домина, тада су на крају две хоризонталне домине.



- У наведеној партицији нема заједничких елемената класа

- У наведеној партицији нема заједничких елемената класа
- Класа V садржи f_6 чланова

- У наведеној партицији нема заједничких елемената класа
- Класа V садржи f_6 чланова
- Класа H садржи f_5 чланова

- У наведеној партицији нема заједничких елемената класа
- Класа V садржи f_6 чланова
- Класа H садржи f_5 чланова
- Другим речима $f_7 = f_6 + f_5$

- У наведеној партицији нема заједничких елемената класа
- Класа V садржи f_6 чланова
- Класа H садржи f_5 чланова
- Другим речима $f_7 = f_6 + f_5$
- Генерализација $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, за $n = 2, 3, \ldots$

- У наведеној партицији нема заједничких елемената класа
- Класа V садржи f_6 чланова
- Класа H садржи f_5 чланова
- Другим речима $f_7 = f_6 + f_5$
- Генерализација $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, за $n = 2, 3, \ldots$
- Фибоначијеви бројеви

Фибоначијев низ, Еуклидов алгоритам и домине

За свако $m, n \in N$ и чланове Фибоначијевог низа $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ за $n \in N_0$ важи

$$\mathit{нзд}(f_m, f_n) = f_{\mathit{нзд}(m,n)}.$$

Фибоначијев низ, Еуклидов алгоритам и домине

За свако $m, n \in N$ и чланове Фибоначијевог низа $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ за $n \in N_0$ важи

$$\mathit{НЗД}(f_m, f_n) = f_{\mathit{НЗД}(m,n)}.$$

- f_n је број поплочавања табле $(n-1) \times 2$ са доминама

Фибоначијев низ, Еуклидов алгоритам и домине

За свако $m, n \in N$ и чланове Фибоначијевог низа $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ за $n \in N_0$ важи

$$НЗД(f_m, f_n) = f_{НЗД(m,n)}.$$

- f_n је број поплочавања табле $(n-1) \times 2$ са доминама
- Важи да је $НЗД(f_{n+1}, f_n) = 1 = f_{НЗД(n+1,n)}$

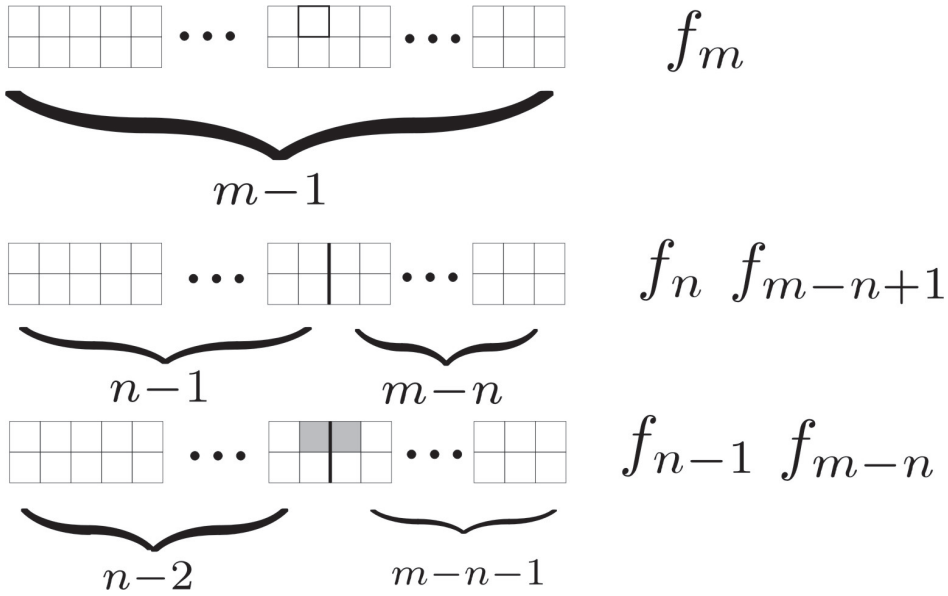
Фибоначијев низ, Еуклидов алгоритам и домине

- Важи $f_m = f_n \cdot f_{m-n+1} + f_{n-1} \cdot f_{m-n}$ чланова

Фибоначијев низ, Еуклидов алгоритам и домине

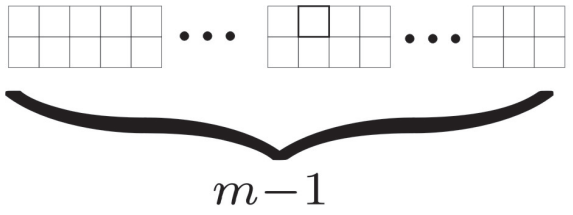
- Важи $f_m = f_n \cdot f_{m-n+1} + f_{n-1} \cdot f_{m-n}$ чланова

- Важи $f_m = f_n \cdot f_{m-n+1} + f_{n-1} \cdot f_{m-n}$ чланова

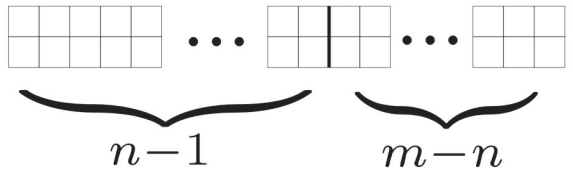


Фибоначијев низ, Еуклидов алгоритам и домине

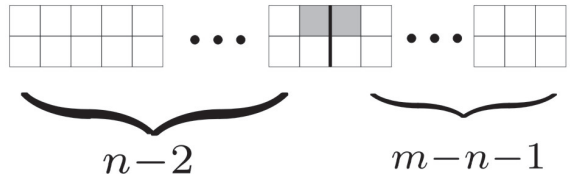
- Важи $f_m = f_n \cdot f_{m-n+1} + f_{n-1} \cdot f_{m-n}$ чланова



f_m



$f_n \ f_{m-n+1}$

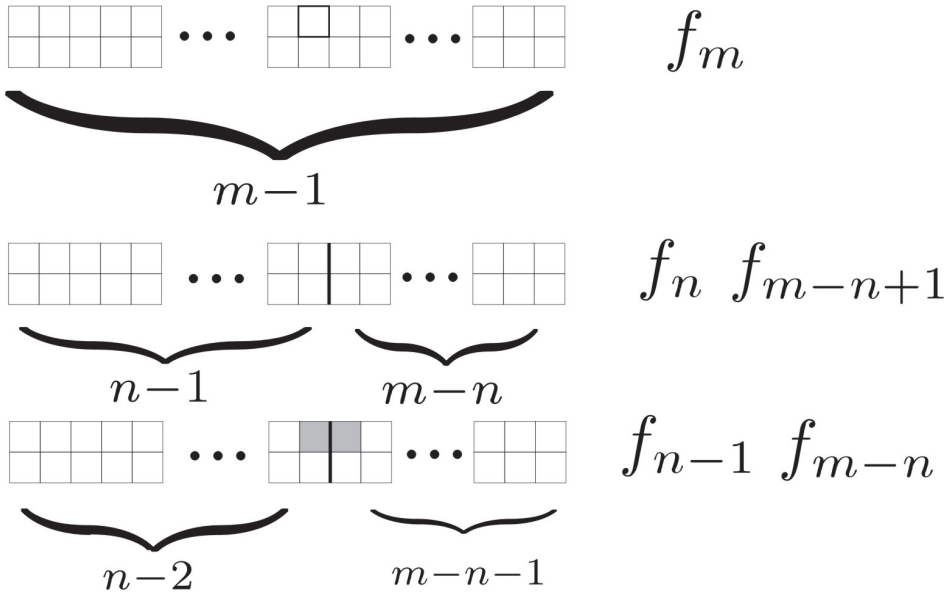


$f_{n-1} \ f_{m-n}$

- Одавде следи *НЗД*$(f_m, f_n) =$ *НЗД*(f_{m-n}, f_n)

Фибоначијев низ, Еуклидов алгоритам и домине

- Важи $f_m = f_n \cdot f_{m-n+1} + f_{n-1} \cdot f_{m-n}$ чланова



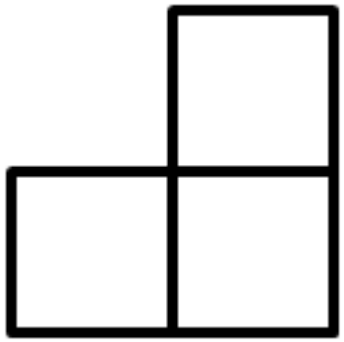
- Одавде следи $НЗД(f_m, f_n) = НЗД(f_{m-n}, f_n)$
- Ово нам омогућава да применимо Еуклидов алгоритам у индексима, који се завршава са $НЗД(f_{НЗД(m,n)}, f_{НЗД(m,n)}) = f_{НЗД(m,n)}$

Тромино поплочавања

Слика: I тромино

Тромино поплочавања

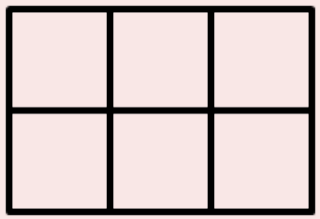
Слика: I тромино



Слика: L тромино

Пример

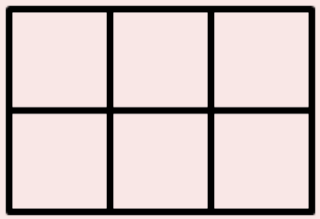
Колико различитих начина постоји за поплочавање X са тромионима.



Слика: Правоугаона мрежа X

Пример

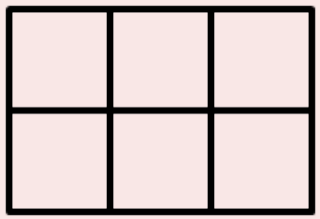
Колико различитих начина постоји за поплочавање X са тромионима.



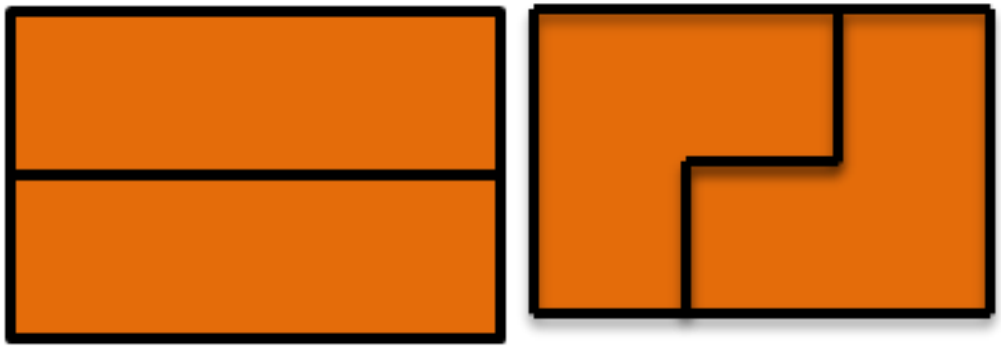
Слика: Правоугаона мрежа X

Пример

Колико различитих начина постоји за поплочавање X са тромионима.

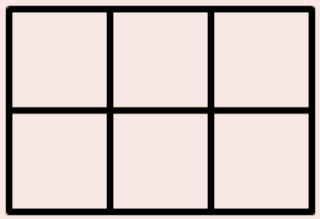


Слика: Правоугаона мрежа X

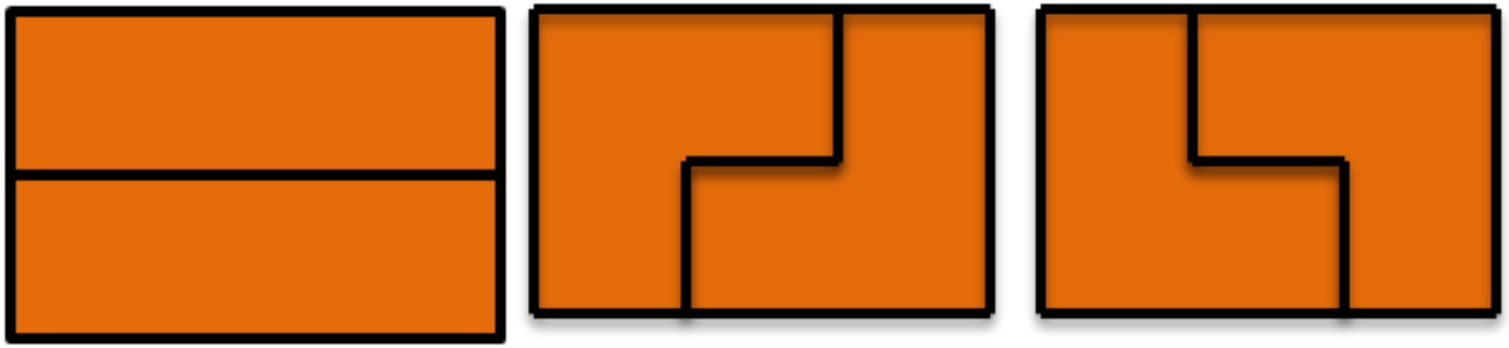


Пример

Колико различитих начина постоји за поплочавање X са тромионима.

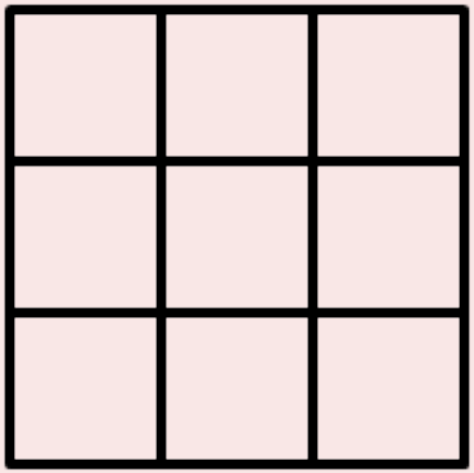


Слика: Правоугаона мрежа X

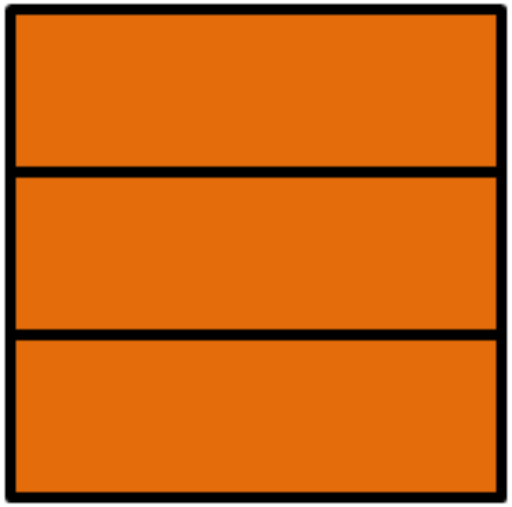


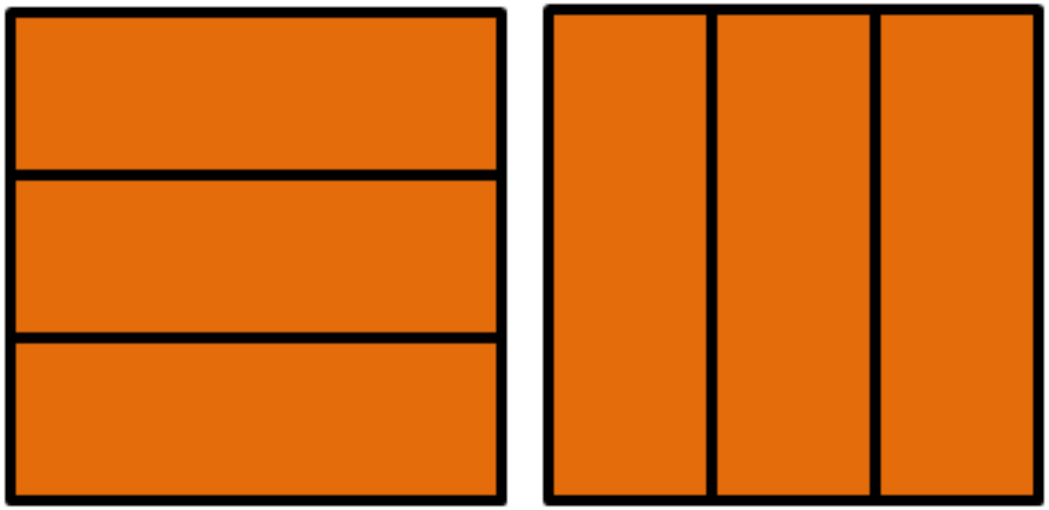
Пример

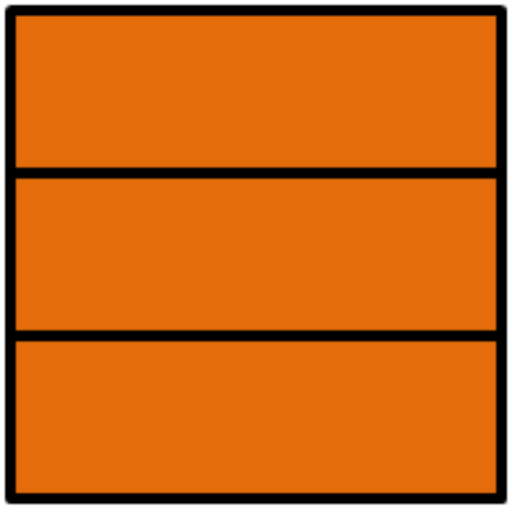
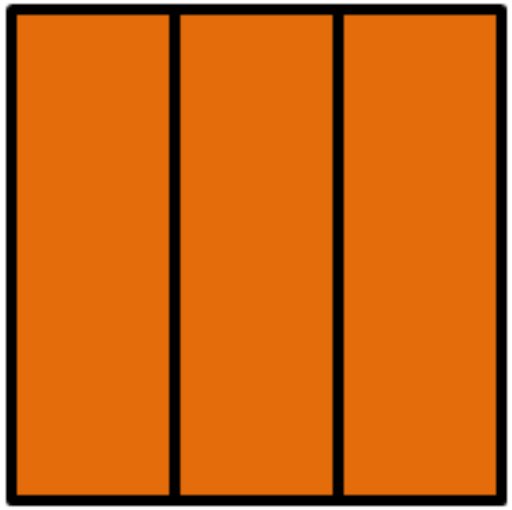
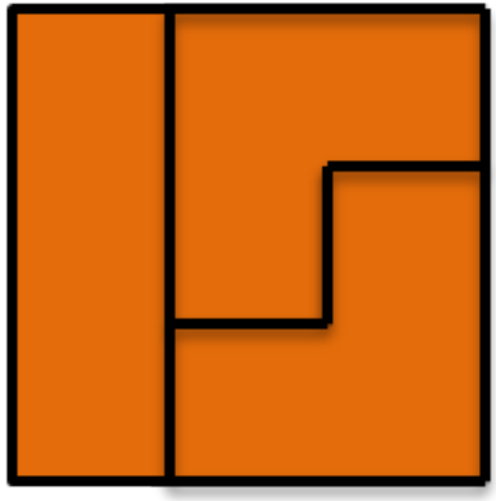
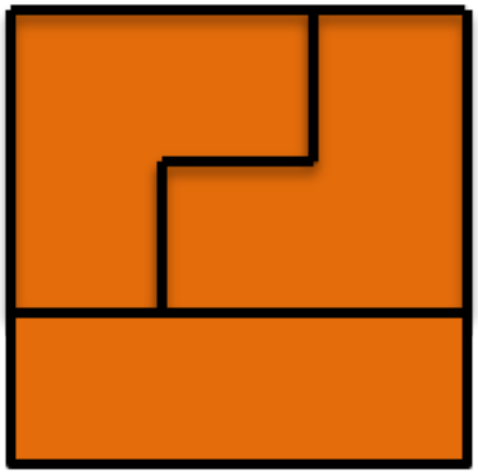
Колико различитих начина постоји за поплочавање Y са тромином.

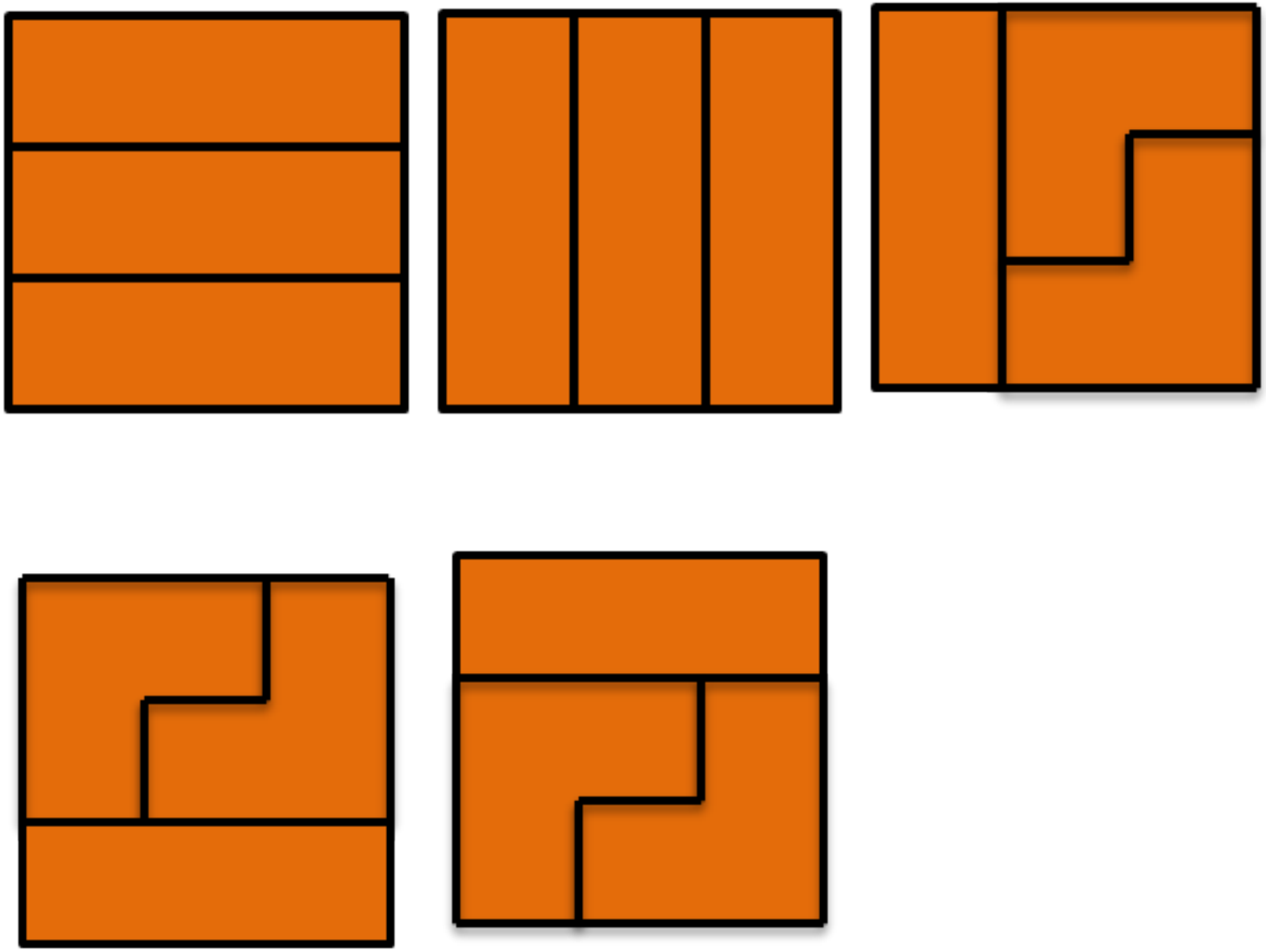


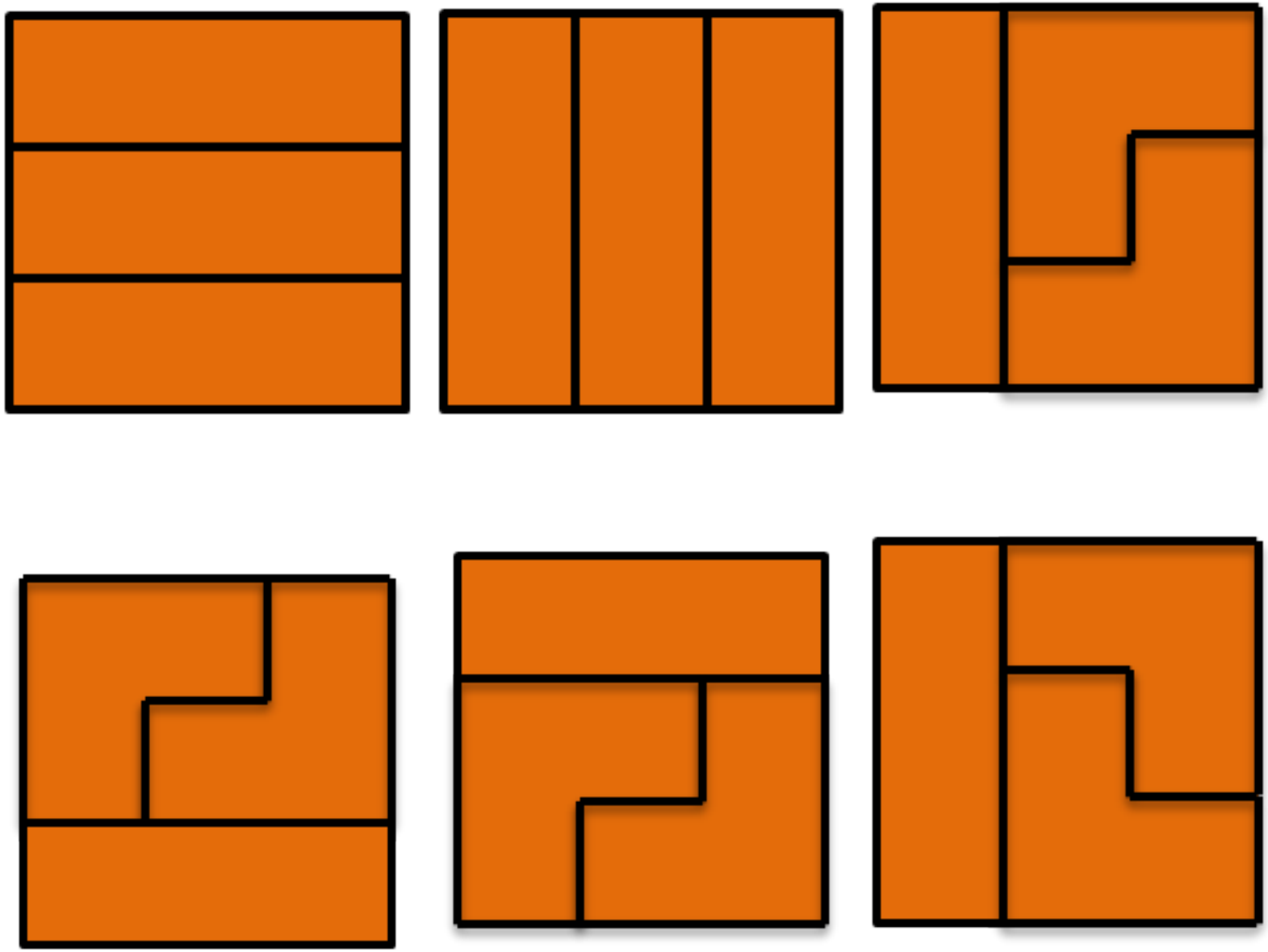
Слика: Правоугаона мрежа Y





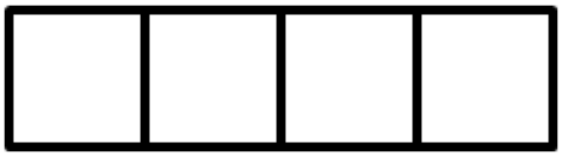









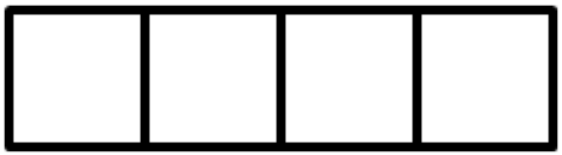
Поплочавања са тетраминима

Поплочавања са тетраминима

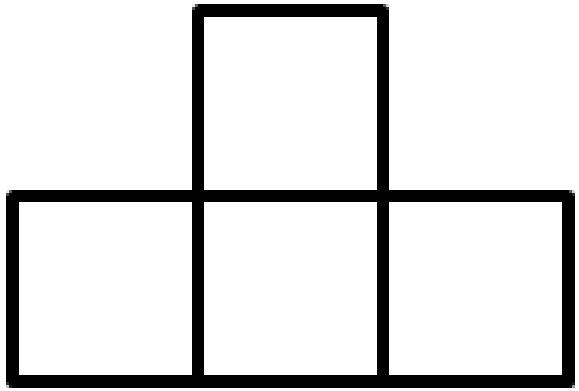


I -- тетрамино

Поплочавања са тетраминима

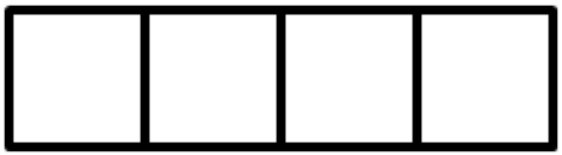


I -- тетрамино

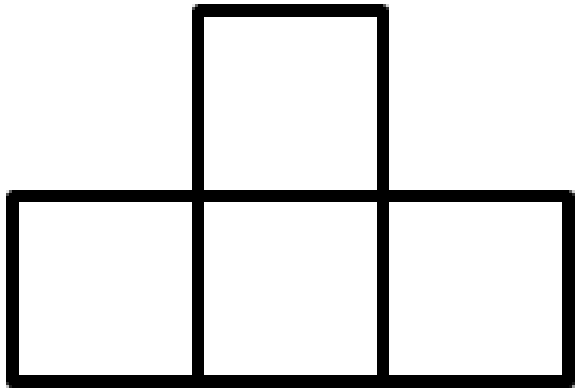


T -- тетрамино

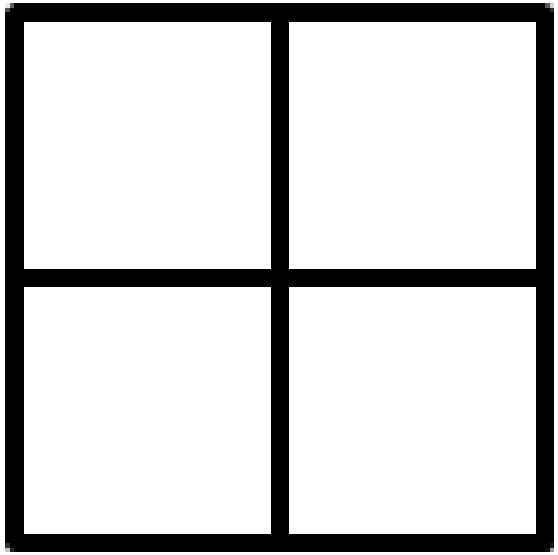
Поплочавања са тетраминима



I -- тетрамино

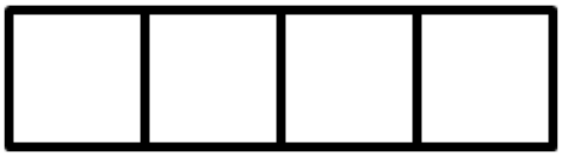


T -- тетрамино

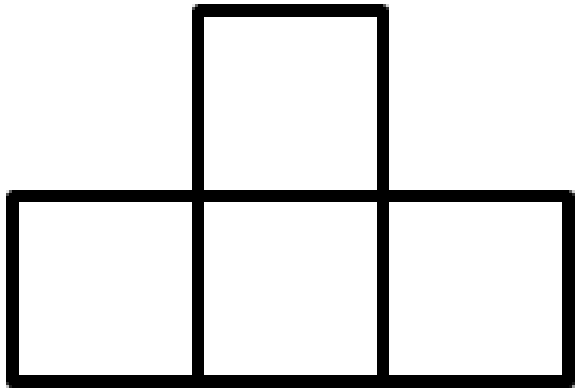


O -- тетрамино

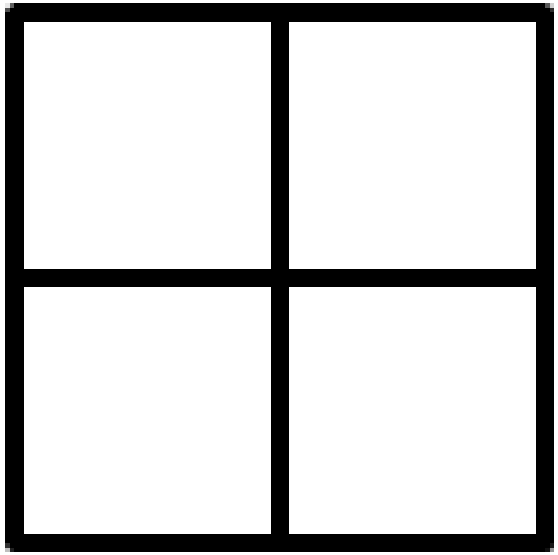
Поплочавања са тетраминима



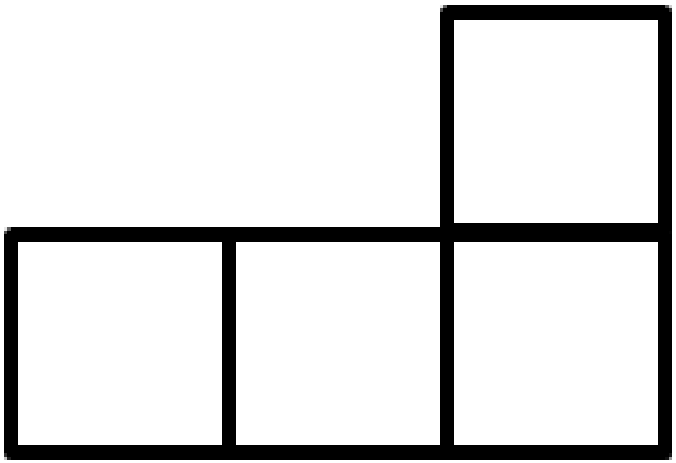
I -- тетрамино



T -- тетрамино

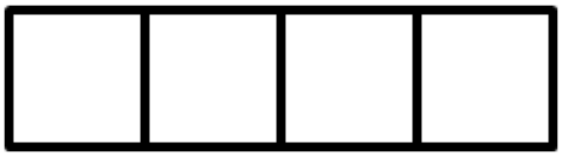


O -- тетрамино

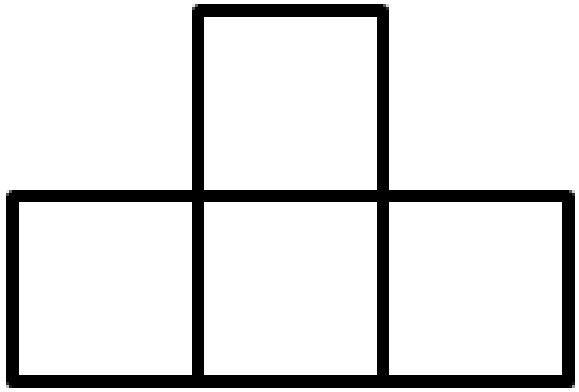


L -- тетрамино

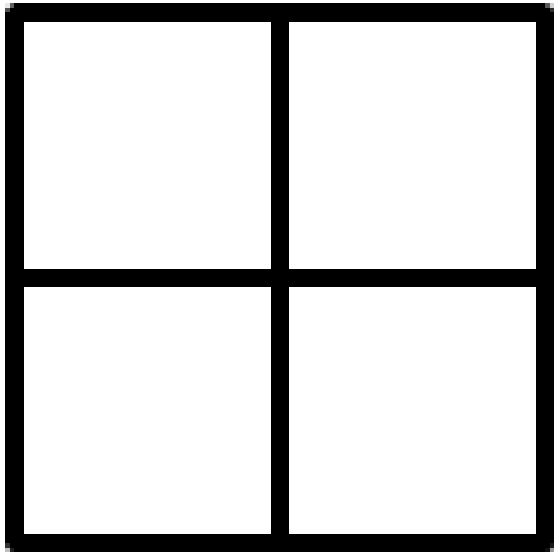
Поплочавања са тетраминима



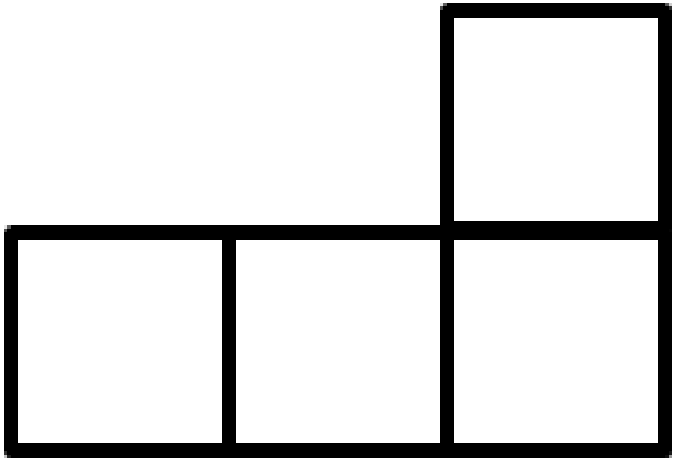
I -- тетрамино



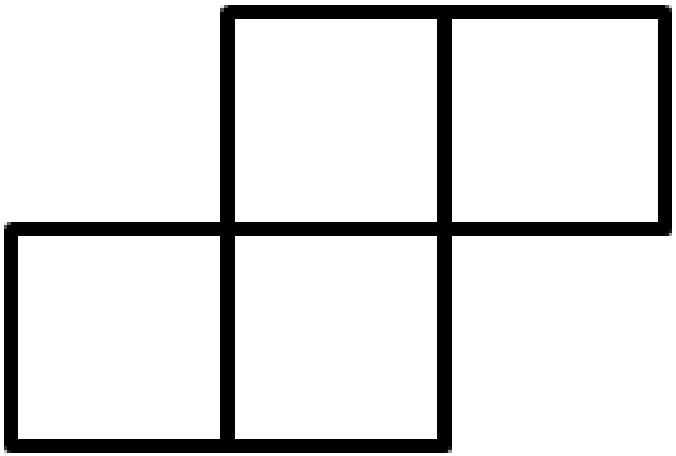
T -- тетрамино



O -- тетрамино



L -- тетрамино



Z -- тетрамино

Пример

Може ли се правоугаоник са 20 поља прекрити са свим различитим тетраминима?

Пример

Може ли се правоугаоник са 20 поља прекрити са свим различитим тетраминима?

- Плоча има 20 поља (10 црних и 10 бијелих поља)

Пример

Може ли се правоугаоник са 20 поља прекрити са свим различитим тетраминима?

- Плоча има 20 поља (10 црних и 10 бијелих поља)
- Сваки од тетрамина прекрива 4 поља

Пример

Може ли се правоугаоник са 20 поља прекрити са свим различитим тетраминима?

- Плоча има 20 поља (10 црних и 10 бијелих поља)
- Сваки од тетрамина прекрива 4 поља
  - I -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља

Пример

Може ли се правоугаоник са 20 поља прекрити са свим различитим тетраминима?

- Плоча има 20 поља (10 црних и 10 бијелих поља)
- Сваки од тетрамина прекрива 4 поља
  - I -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља
  - O -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бијела поља

Пример

Може ли се правоугаоник са 20 поља прекрити са свим различитим тетраминима?

- Плоча има 20 поља (10 црних и 10 бијелих поља)
- Сваки од тетрамина прекрива 4 поља
  - I -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља
  - O -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бијела поља
  - L -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља

Пример

Може ли се правоугаоник са 20 поља прекрити са свим различитим тетраминима?

- Плоча има 20 поља (10 црних и 10 бијелих поља)
- Сваки од тетрамина прекрива 4 поља
  - I -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља
  - O -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бијела поља
  - L -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља
  - Z -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља

Пример

Може ли се правоугаоник са 20 поља прекрити са свим различитим тетраминима?

- Плоча има 20 поља (10 црних и 10 бијелих поља)
- Сваки од тетрамина прекрива 4 поља
  - I -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља
  - O -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бијела поља
  - L -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља
  - Z -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља
  - T -- тетрамино прекрива 3 црна и 1 бело поље или обрнуто

Пример

Може ли се правоугаоник са 20 поља прекрити са свим различитим тетраминима?

- Плоча има 20 поља (10 црних и 10 бијелих поља)
- Сваки од тетрамина прекрива 4 поља
  - I -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља
  - O -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бијела поља
  - L -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља
  - Z -- тетрамино прекрива 2 црна и 2 бела поља
  - T -- тетрамино прекрива 3 црна и 1 бело поље или обрнуто
- Поплочавање није могуће

□

Пример

Може ли се плоча димензија 10×10 *прекрити са* T *-- тетраминима?*

Пример

Може ли се плоча димензија 10×10 *прекрити са* T *-- тетраминима?*

- Површина плоче 100 поља

Пример

Може ли се плоча димензија 10×10 *прекрити са* T *-- тетраминима?*

- Површина плоче 100 поља
- T -- тетрамино има 4 поља

Пример

Може ли се плоча димензија 10×10 *прекрити са* T *-- тетраминима?*

- Површина плоче 100 поља
- T -- тетрамино има 4 поља
- За прекривање плоче треба нам 25 тетрамина

Пример

Може ли се плоча димензија 10×10 *прекрити са* T *-- тетраминима?*

- Површина плоче 100 поља
- T -- тетрамино има 4 поља
- За прекривање плоче треба нам 25 тетрамина
- Плоча има једнак број црних и бијелих поља

Пример

Може ли се плоча димензија 10×10 *прекрити са* T *-- тетраминима?*

- Површина плоче 100 поља
- T -- тетрамино има 4 поља
- За прекривање плоче треба нам 25 тетрамина
- Плоча има једнак број црних и бијелих поља
- Сваки T -- тетрамино прекрива 3 поља исте боје и једно поље друге боје

Пример

Може ли се плоча димензија 10×10 *прекрити са* T *-- тетраминима?*

- Површина плоче 100 поља
- T -- тетрамино има 4 поља
- За прекривање плоче треба нам 25 тетрамина
- Плоча има једнак број црних и бијелих поља
- Сваки T -- тетрамино прекрива 3 поља исте боје и једно поље друге боје
- 25 тетрамина не може прекрити 50 поља исте боје

Пример

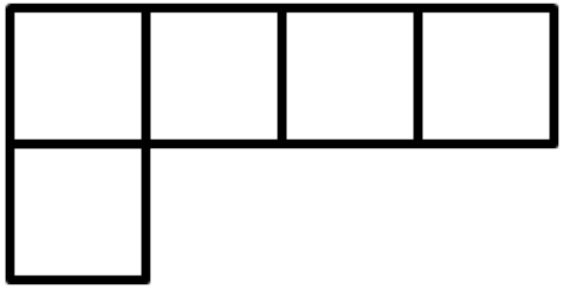
Може ли се плоча димензија 10×10 *прекрити са* T *-- тетраминима?*

- Површина плоче 100 поља
- T -- тетрамино има 4 поља
- За прекривање плоче треба нам 25 тетрамина
- Плоча има једнак број црних и бијелих поља
- Сваки T -- тетрамино прекрива 3 поља исте боје и једно поље друге боје
- 25 тетрамина не може прекрити 50 поља исте боје
- Поплочавање плоче 10×10 са T -- тетраминима није могуће

□

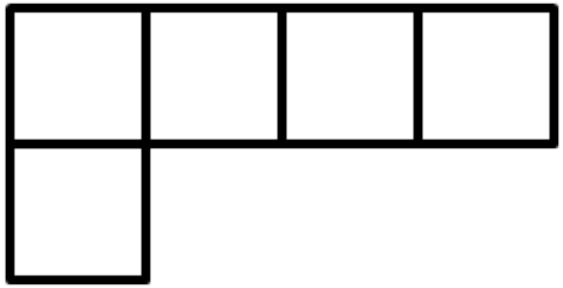
Слика: I -- пентомино

Слика: I -- пентомино

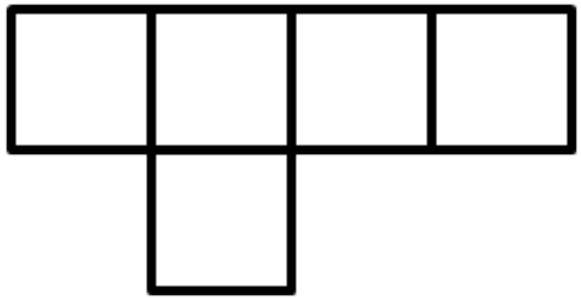


Слика: L -- пентомино

Слика: I -- пентомино

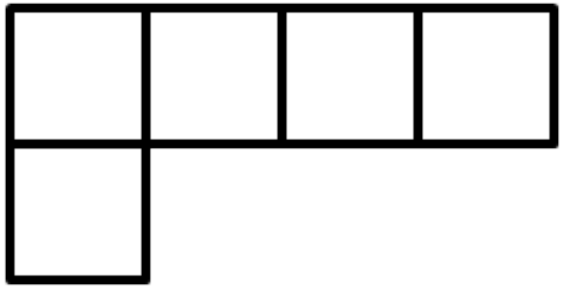


Слика: L -- пентомино

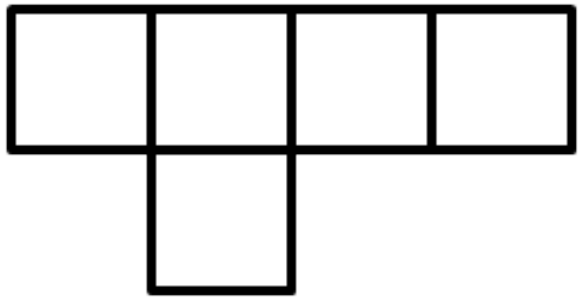


Слика: Y -- пентомино

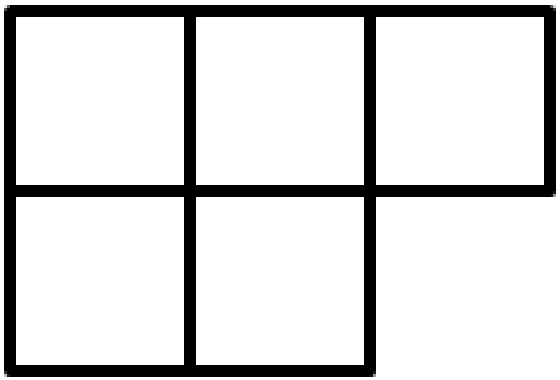
Слика: I -- пентомино



Слика: L -- пентомино

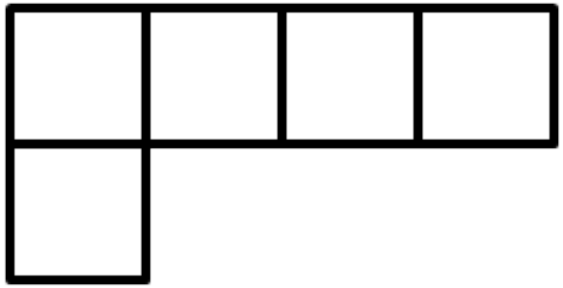


Слика: Y -- пентомино

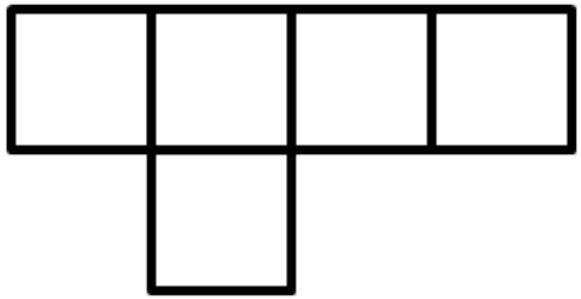


Слика: P -- пентомино

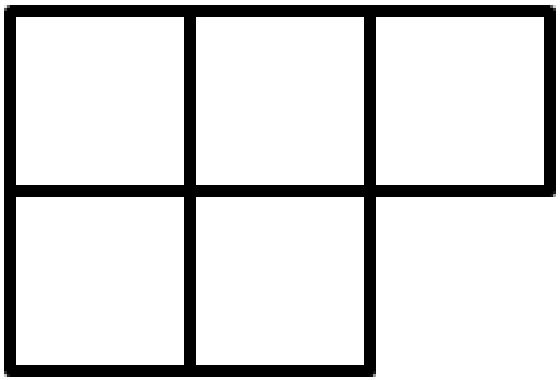
Слика: I -- пентомино



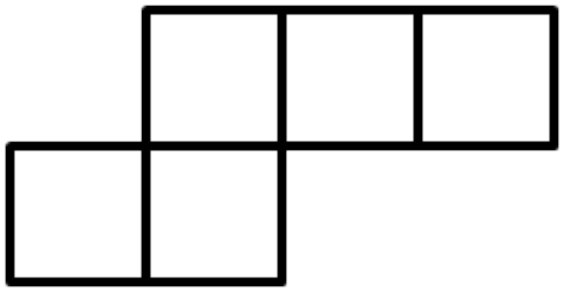
Слика: L -- пентомино



Слика: Y -- пентомино

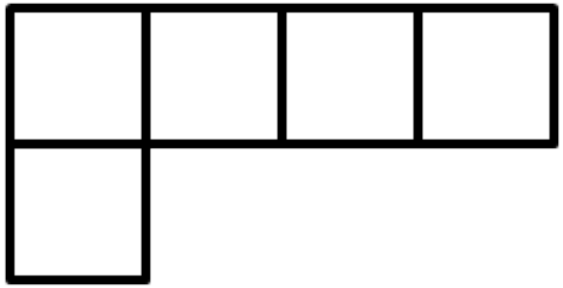


Слика: P -- пентомино

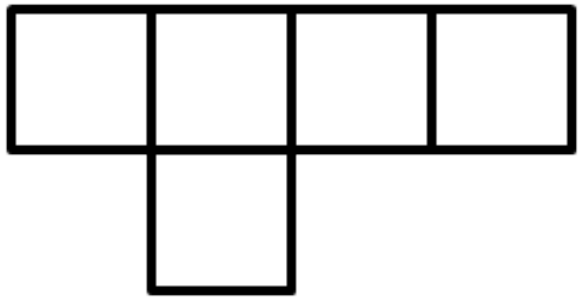


Слика: N -- пентомино

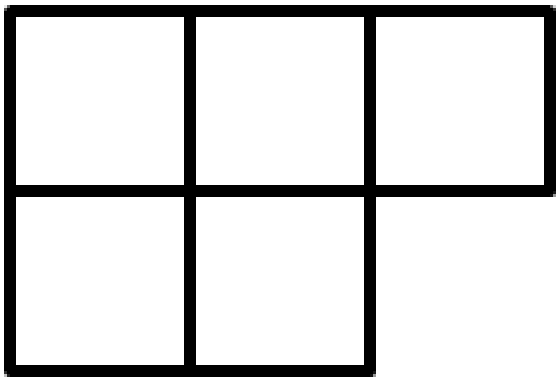
Слика: I -- пентомино



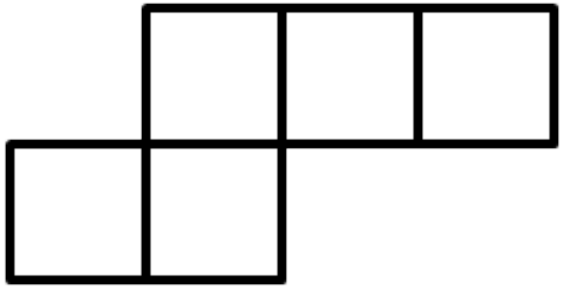
Слика: L -- пентомино



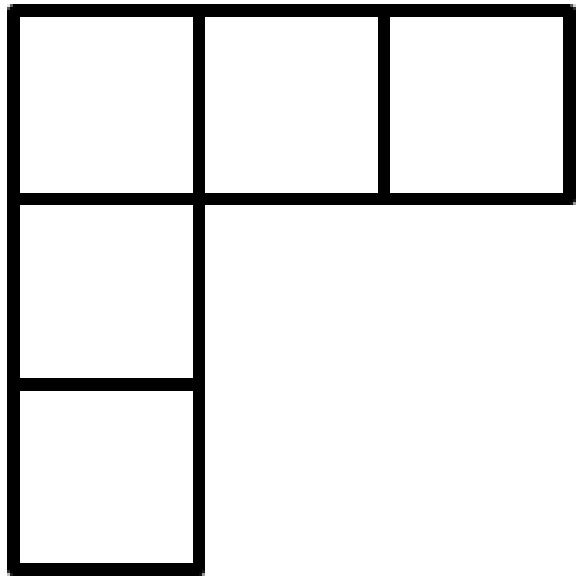
Слика: Y -- пентомино



Слика: P -- пентомино

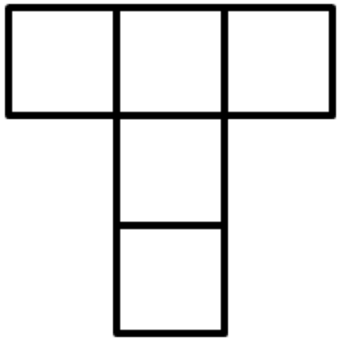


Слика: N -- пентомино



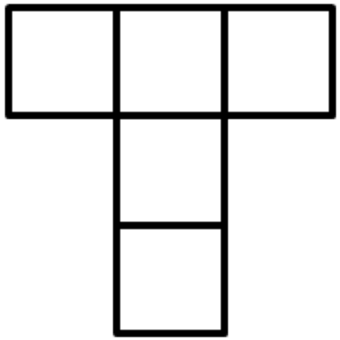
Слика: V -- пентомино

Пентомино поплочавања

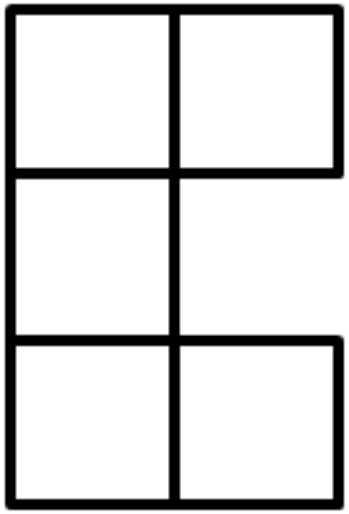


Слика: T -- пентомино

Пентомино поплочавања

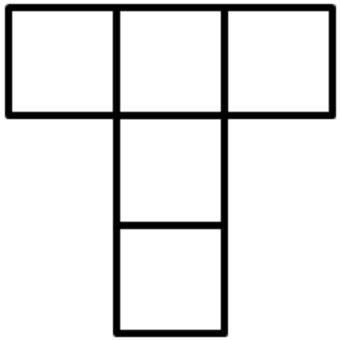


Слика: T -- пентомино

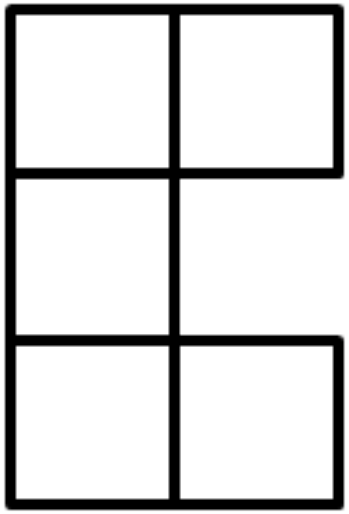


Слика: U -- пентомино

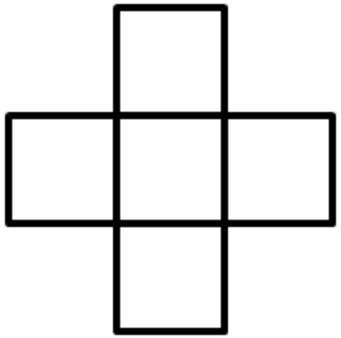
Пентомино поплочавања



Слика: T -- пентомино

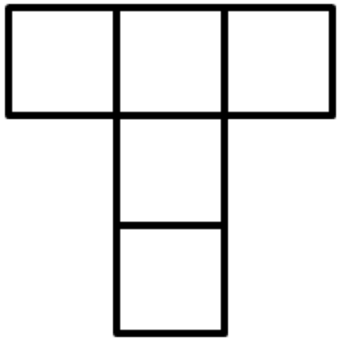


Слика: U -- пентомино

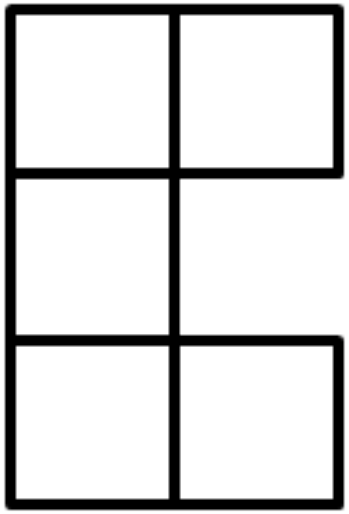


Слика: X -- пентомино

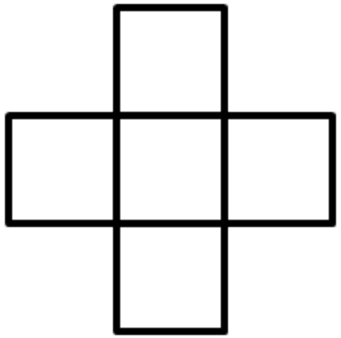
Пентомино поплочавања



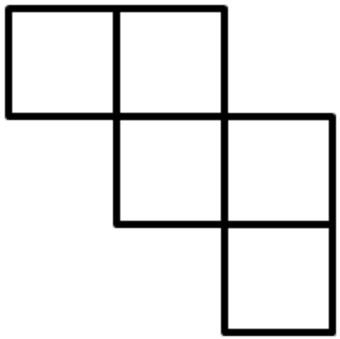
Слика: T -- пентомино



Слика: U -- пентомино

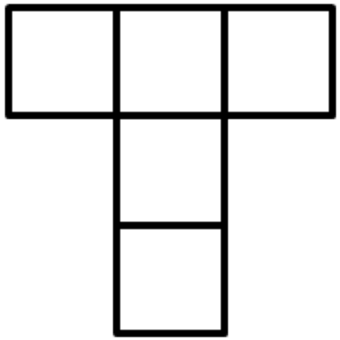


Слика: X -- пентомино

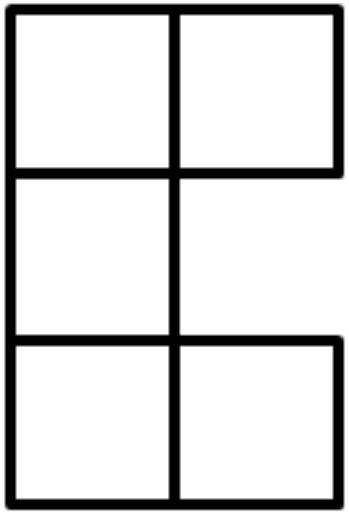


Слика: W -- пентомино

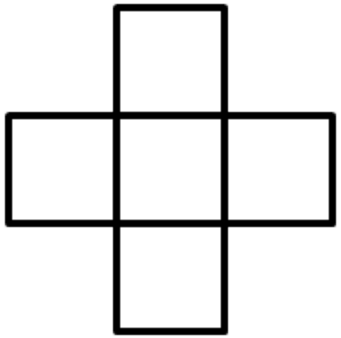
Пентомино поплочавања



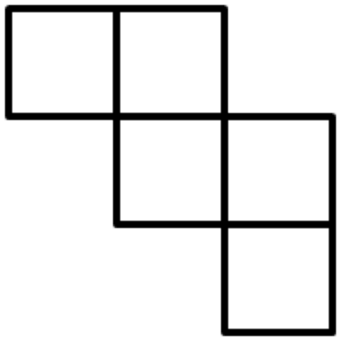
Слика: T -- пентомино



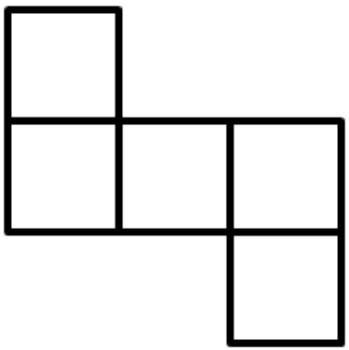
Слика: U -- пентомино



Слика: X -- пентомино

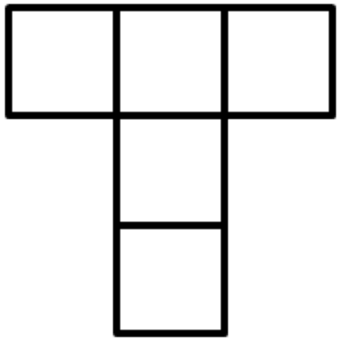


Слика: W -- пентомино

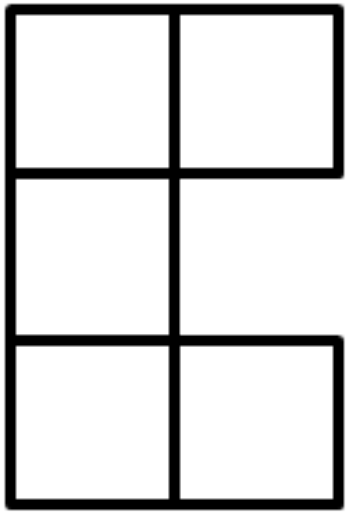


Слика: Z -- пентомино

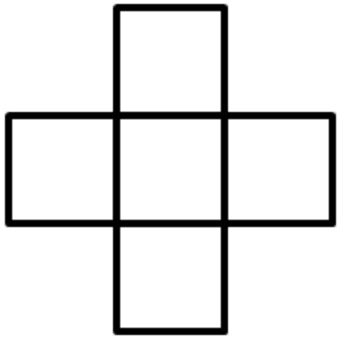
Пентомино поплочавања



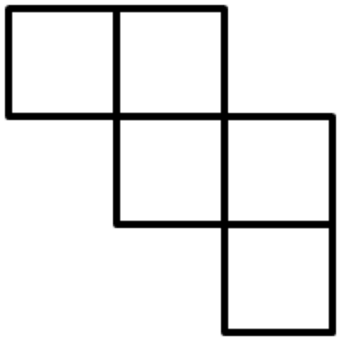
Слика: T -- пентомино



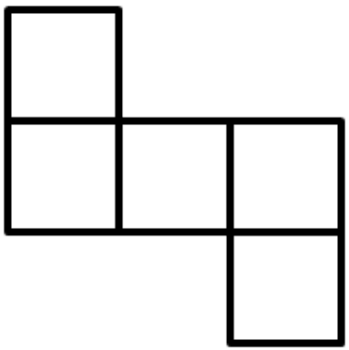
Слика: U -- пентомино



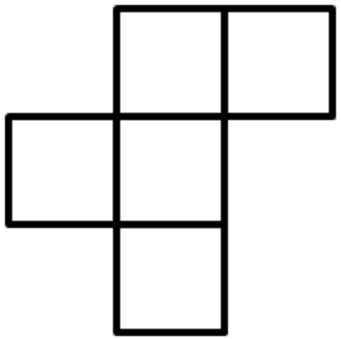
Слика: X -- пентомино



Слика: W -- пентомино



Слика: Z -- пентомино



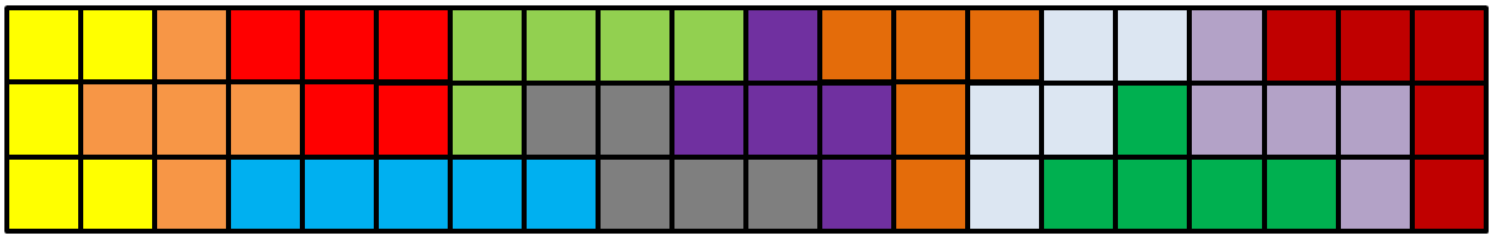
Слика: F -- пентомино

Пример

Доказати да 12 различитих пентомина може склопити таблу 3×20*?*

Пример

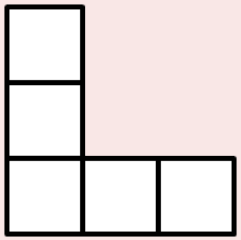
Доказати да 12 различитих пентомина може склопити таблу 3×20*?*



□

Пример

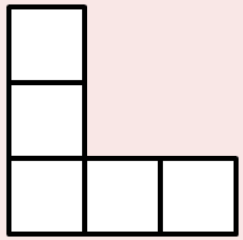
Доказати да 9 различитих пентамина може утростручити V-пентамино са слике?



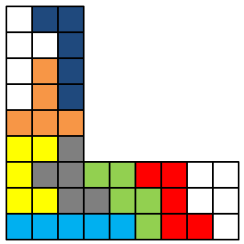
Слика: V -- пентамино

Пример

Доказати да 9 различитих пентамина може утростручити V-пентамино са слике?



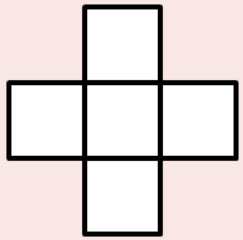
Слика: V -- пентамино



Слика: Троструки V -- пентамино

Пример

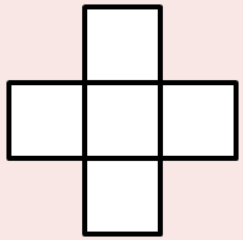
Доказати да 9 различитих пентамина може утростручити X-пентамино са слике?



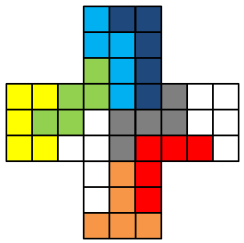
Слика: X -- пентамино

Пример

Доказати да 9 различитих пентамина може утростручити X-пентамино са слике?

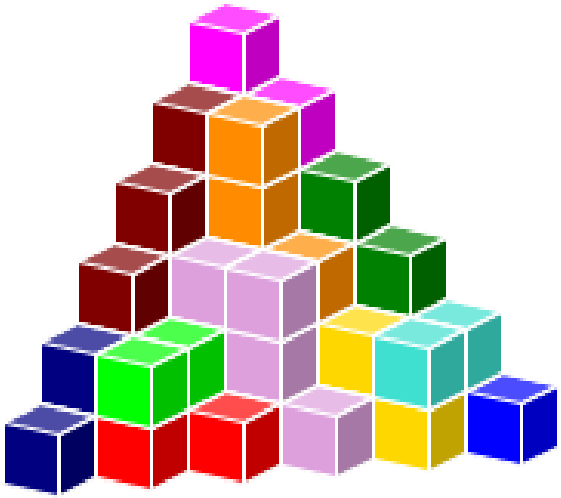


Слика: X -- пентамино

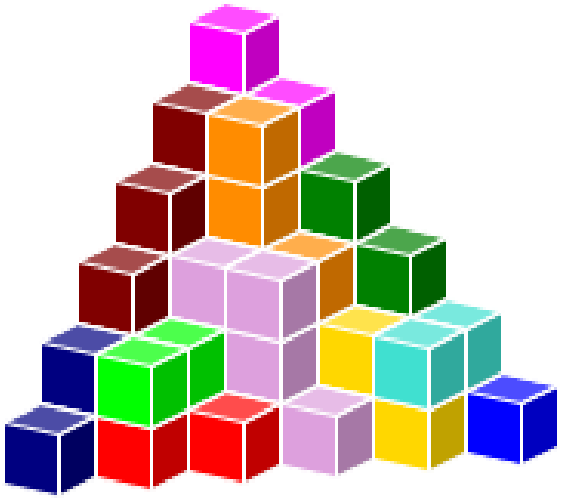


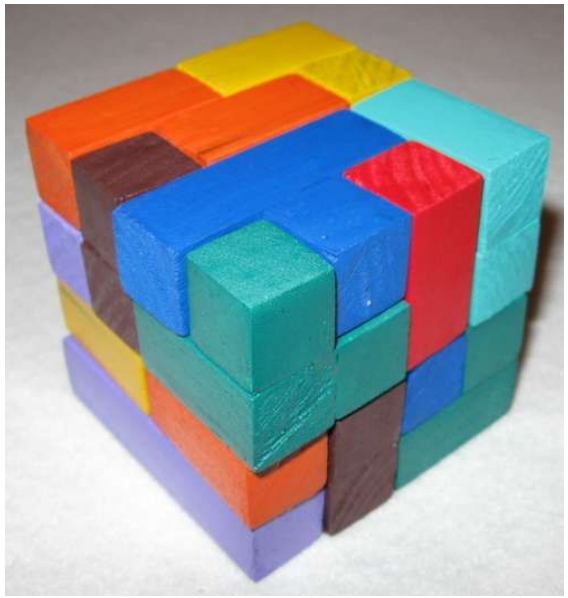
Слика: Двоструки X -- пентамино

Хвала на пажњи!

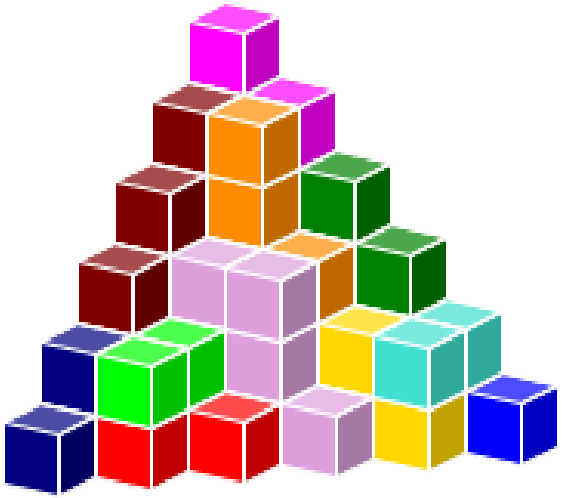


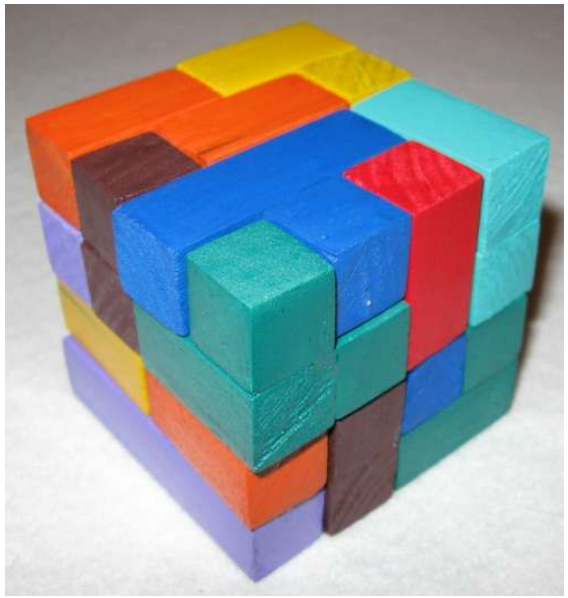
Хвала на пажњи!



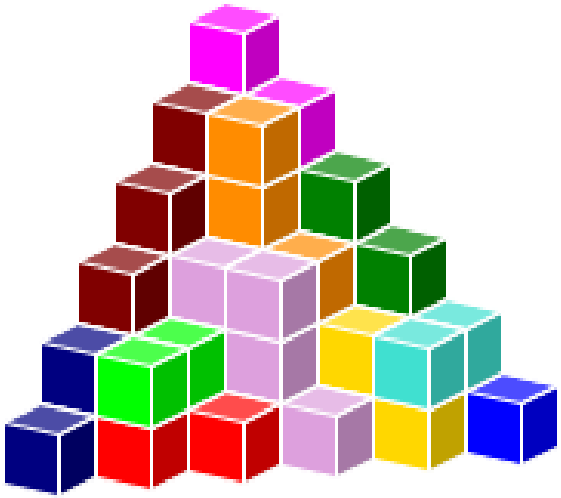


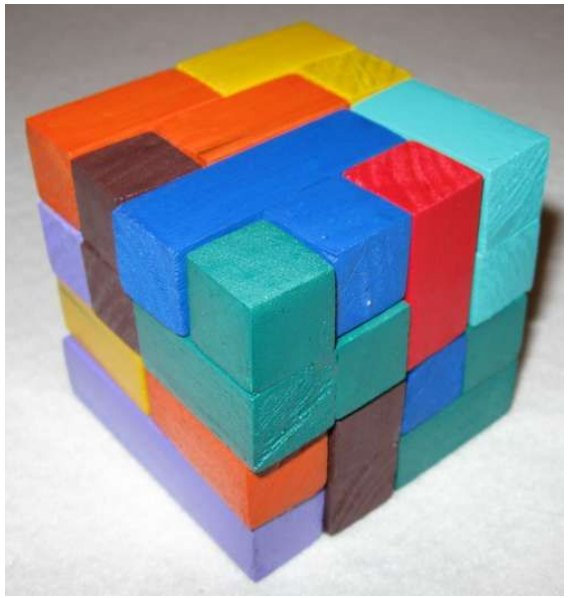
Хвала на пажњи!



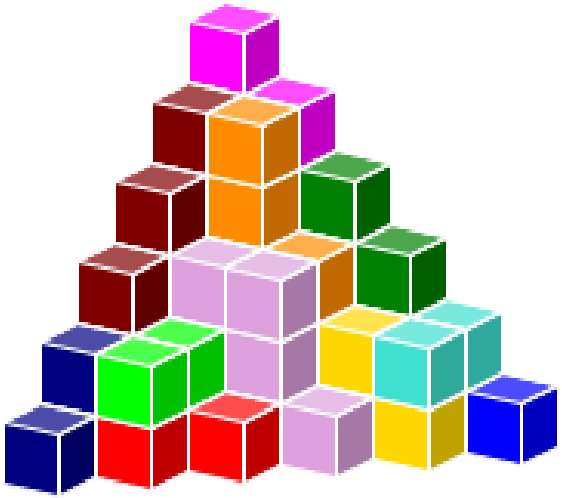


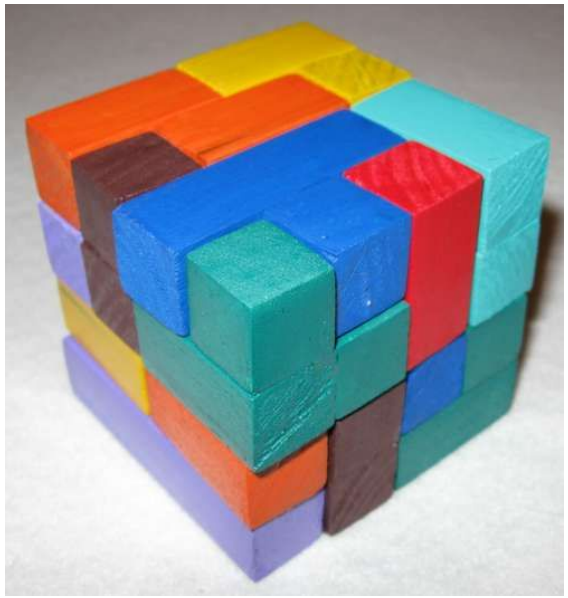
Хвала на пажњи!



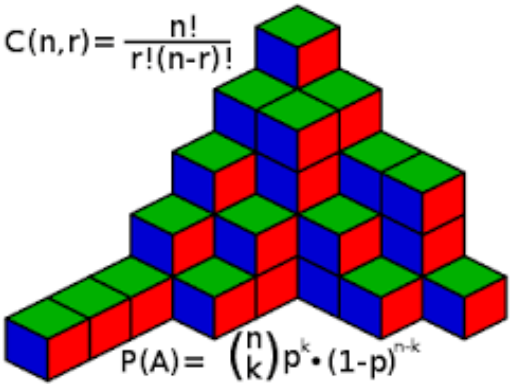


Хвала на пажњи!



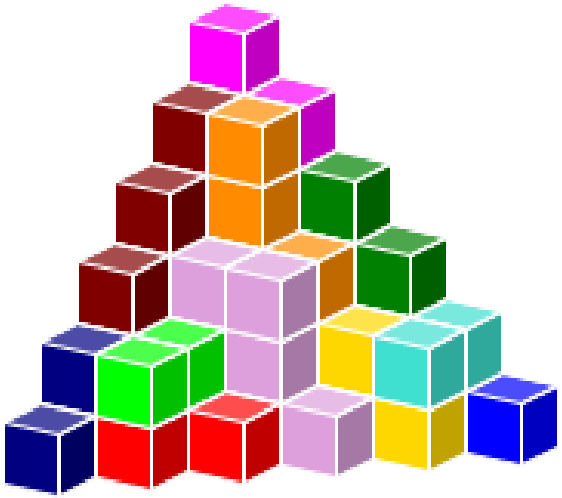


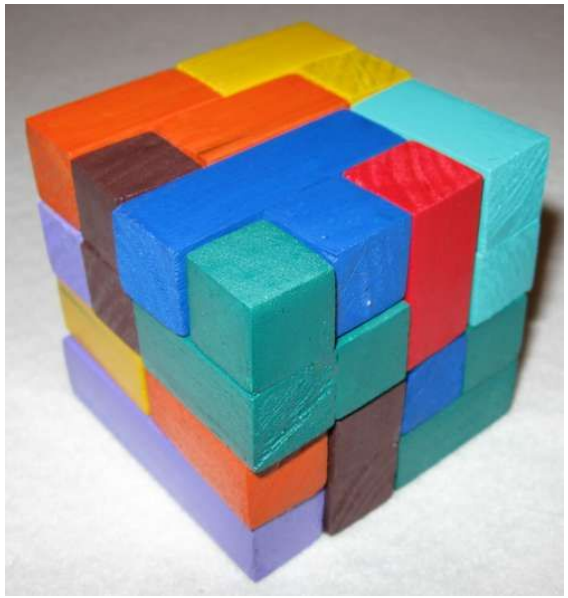
$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$



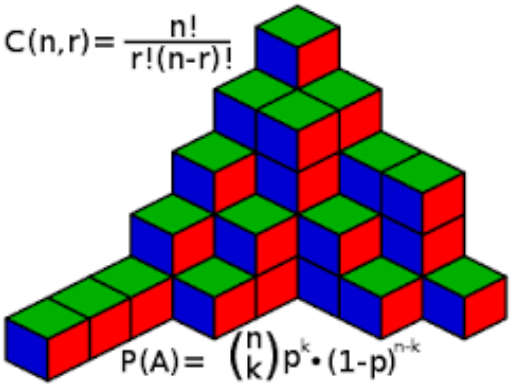
$$P(A) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Хвала на пажњи!





$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$



$$P(A) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$