МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Државна комисија за такмичења из математике ученика средњих школа

Бојан Башић, Душан Ђукић, Марко Радовановић

Београд, 12. 2. 2017.

На међународним математичким такмичењима средњошколци из Србије редовно постижу резултате на које сви можемо бити поносни. Примера ради, до ове године је постојао низ од чак девет (!) узастопних Међународних математичких олимпијада на којима је неки члан екипе освојио златну медаљу. Даље, на последњој Балканској математичкој олимпијади Република Србија освојила је екипно прво место, што је успех који је остварен тек други пут за укупно 33 године (колико постоји Балканска математичка олимпијада).

Екипа која представља земљу на међународним математичким такмичењима бира се кроз низ такмичења, почев од општинског нивоа па закључно са Српском математичком олимпијадом. Наравно, сврха такмичења није само да се одабере шест најбољих ученика, већ и да код свих који учествују подстакне интересовање за математику и побуди такмичарски дух. Стога Државна комисија с пажњом припрема задатке за све нивое такмичења, трудећи се (некада с више, а понекад ипак, признајемо, с нешто мање успеха) да нађе прави баланс у погледу тежине задатака за сваки ниво, разноврсности математичких области из којих се задаци постављају итд.

Предавање ће се састојати из три целине. У првој целини биће презентован систем такмичења у земљи, разматране неке његове позитивне и негативне стране и разматран простор за побољшања. Биће разјашњене и најновије измене Правилника о такмичењима, нарочито у погледу избора оних шест ученика који на крају стичу част и обавезу да представљају земљу на међународним такмичењима, а које су уведене по угледу на земље које традиционално остварују високе пласмане, све са жељом да, иако можемо бити, као што је већ речено, генерално врло задовољни учинком наших ученика, искористимо сваку прилику за додатно побољшање тих резултата.

У другој целини биће презентовани одабрани задаци са свих нивоа такмичења. Биће указано на то с чим се наши ученици углавном добро сналазе а шта им често задаје проблема, биће наглашене неке лепе идеје као и неке типичне грешке итд.

Најзад, последња целина предвиђена је за дискусију. Сви предавачи су дугогодишњи чланови Комисије, међу њима су актуелни председник и потпредседник Комисије, и сви предавачи имају вишегодишње искуство с руковођењем екипе Србије на међународним такмичењима, па верујемо да се у овој целини могу јавити занимљиве теме за дискусију.

О избору олимпијске екипе

У Математичкој гимназији у Београду је 1. и 2. априла 2016. године одржана (јубиларна) 10. по реду Српска математичка олимпијада. На такмичењу су учествовала 33 ученика средњих школа. Како је један од основних циљева овог такмичења избор екипе Републике Србије за међународна такмичења, пре свега за Међународну математичку олимпијаду, такмичење је осмишљено по угледу на ММО. Према томе, такмичење траје два дана, током сваког дана раде се по три задатка, при чему сваки задатак вреди по 7 бодова. Сличност са ММО не завршава се на техничким детаљима, већ се комисија труди да задаци за СМО по концепцији а и по тежини осликавају задатке са ММО, желећи да се на тај начин постигну што вернији услови, те да као последица тога буде изабрана екипа која ће заиста најбоље представити Србију на ММО.

Након прегледа радова као најуспешнији се показао

1. *Игор Медведев,* ученик другог разреда Математичке гимназије у Београду,

са освојених 20 бодова, само бод мање имао је

2. *Никола Павловић,* ученик другог разреда Гимназије „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду,

а трећи је био

3. *Алекса Милојевић*, ученик другог разреда Математичке гимназије у Београду,

са освојених 16 бодова. Међутим, догодила се и та несрећна, или можда баш срећна околност, што су наредно место, с освојених 14 бодова, поделила чак шесторица ученика (Алекса Константинов, Никола Раичевић, Никола Садовек и Огњен Тошић, сви из Математичке гимназије у Београду, као и Срђан Кузмановић и Никола Спасић из Гимназије „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду)! Било је потребно од њих шесторице одабрати тројицу који ће се придружити првој тројици у саставу екипе Србије. У ту сврху је организовано додатно изборно такмичење, 5. априла, за ових шест ученика, са додатна три задатка вредна по 7 бодова, где су се издвојили:

4. *Огњен Тошић,* ученик трећег разреда Математичке гимназије у Београду;

5. *Алекса Константинов,* ученик четвртог разреда Математичке гимназије у Београду;

6. *Никола Садовек,* ученик четвртог разреда Математичке гимназије у Београду

(са освојених 20, 14 и 10 бодова, редом).

Неопходност накнадног изборног такмичења несрећна је околност утолико што је то вероватно, нажалост, представљало додатан вид стреса за ученике (ишчекивање и стрепња су се продужили за три дана) али, с друге стране, лепо је знати да постоји не шест него чак девет ученика који су на овогодишњој СМО остварили 14 или више бодова, што је, с обзиром на тежину задатака врло упоредиву са ММО, резултат који би на ММО с великим степеном извесности свакоме од њих обезбедио најмање бронзано одличје. Осим тога, сваки задатак на СМО осим шестог (најтежег) урадио је бар један ученик, и исто важи за све задатке на додатном такмичењу. Због свега тога имали смо разлога да будемо задовољни резултатима СМО и да будемо оптимисти поводом учинка наше екипе на међународним такмичењима. Прву потврду оправданости тог оптимизма добили смо на 33. Балканској математичкој олимпијади, где је екипа Србије освојила прво место у укупном пласману земаља, а о учинку на ММО рећи ћемо нешто више у наредном одељку.

С обзиром на чињеницу да из године у годину о избору олимпијске екипе одлучује врло мала бодовна разлика, понекад и само један бод, а ове године није био први пут да се појави потреба и за додатним изборним такмичењем (мада јесте први пут да се на деоби места појавило чак шест ученика!), како о екипи не би одлучивале овако ситне осцилације, приликом последње измене Правилника о такмичењима у њега је уврштен (између осталог) следећи члан:

Члан 30

На основу резултата на СМО за ученике средњих школа одређује се 6 чланова екипе за Балканску математичку олимпијаду (БМО). Осим тога, одређује се још 6 кандидата за Међународну математичку олимпијаду (ММО), при чему за избор за олимпијску екипу осим првих 12 ученика конкуришу и сви ученици који имају исти број бодова као ученик који је заузео 12. место.

По завршетку БМО, а у року предвиђеном за пријављивање екипе за ММО, организује се додатно изборно такмичење (максимално 42 бода). Бодови са СМО (максимално 42) сабирају се са бодовима са изборног такмичења. Ученицима који су у текућој школској години освојили златну медаљу на БМО на овај збир се додаје још 7 бодова, а ученицима који су освојили сребрну медаљу се додају још 3 бода. Првих 6 ученика на основу тако добијеног укупног збира чине екипу за ММО.

У наставку су приложени задаци са СМО и додатног изборног такмичења.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

10. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПЛИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. април 2016.

Први дан

1. Нека је n природан број већи од 1. Доказати да постоји природан број m већи од n^n такав да је

$$\frac{n^m - m^n}{n+m}$$

природан број.

2. Дат је природан број n. Дефинишимо $f(0,j) = f(i,0) = 0,\ f(1,1) = n$ и

$$f(i,j) = \left\lfloor \frac{f(i-1,j)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{f(i,j-1)}{2} \right\rfloor$$

за све природне бројеве i и j, $(i,j) \neq (1,1)$. Колико има уређених парова природних бројева (i,j) за које је $f(i,j)$ непаран број?

3. Нека је O центар кружнице описане око $\triangle ABC$. Права t додирује кружницу описану око $\triangle BOC$ и сече странице AB и AC у тачкама D и E, редом $(D, E \not\equiv A)$. Тачка A' је симетрична тачки A у односу на праву t. Доказати да се кружнице описане око $\triangle A'DE$ и $\triangle ABC$ додирују.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

10. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПЛИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

2. април 2016.

Други дан

4. У $\triangle ABC$ уписана кружница, чији је центар тачка I, додирује страницу BC у тачки D. Нека је тачка M средиште дужи BC. Доказати да се нормале из тачака M и D на праве AI и MI, редом, секу на правој која садржи висину $\triangle ABC$ из темена A.

5. Дато је $2n-1$ двоелементних подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да се може одабрати n од ових подскупова чија унија садржи не више од $\frac{2}{3}n+1$ елемената.

6. Дати су природни бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{2016}}$ такви да за све n, $1 \leqslant n \leqslant 2^{2016}$, важи

$$a_n \leqslant 2016 \quad \text{и} \quad a_1 a_2 \cdots a_n + 1 \text{ је потпун квадрат.}$$

Доказати да је неки од бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{2^{2016}}$ једнак 1.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 33. БМО И 57. ММО

5. април 2016.

1. Низ полинома $P_n(x)$ је одређен условима

$$P_0(x) = x^3 - 4x \quad \text{и} \quad P_{n+1}(x) = P_n(1+x)P_n(1-x) - 1.$$

Доказати да је полином $P_{2016}(x)$ дељив полиномом x^{2016}.

2. Дат је квадрат $ABCD$ странице 4. Одредити највећи природан број k такав да, за ма какав распоред k тачака строго унутар квадрата $ABCD$, увек постоји квадрат странице 1, садржан у квадрату $ABCD$ (при чему му странице не морају бити паралелне страницама квадрата $ABCD$), у чијој строгој унутрашњости нема ниједне од посматраних k тачака.

3. Означимо са $w(x)$ највећи непаран делилац природног броја x. Ако су a и b узајамно прости природни бројеви такви да су $a + w(b+1)$ и $b + w(a+1)$ степени двојке, доказати да су $a+1$ и $b+1$ такође степени двојке.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

57. Међународна математичка олимпијада 2016.

57. Међународна математичка олимпијада је одржана од 6. до 16. јула 2016. у Хонг Конгу. Екипом су руководили Душан Ђукић са Машинског факултета и Марко Радовановић са Математичког факултета Универзитета у Београду. Одлазак екипе на олимпијаду финансирали су Друштво математичара Србије и НИС.

Припреме екипе пред ММО су одржане у току јуна, у Математичкој гимназији и у Хемијско-медицинској школи у Вршцу. Припреме су се састојале од 4 часа дневно, а у Вршцу је неизоставни део припрема чинио и самосталан рад на одабраним задацима из тзв. *шортлисте* (ужег избора предлога задатака) за ММО 2015. Припреме је финансијски подржала и Математичка гимназија. Предавања су држали Бојан Башић, Душан Ђукић, Александар Пејчев и Марко Радовановић.

Задаци и координација

Такмичари су радили шест задатака одабраних из шортлисте од 32 задатка – први и четврти су предвиђени да буду лаки, други и пети средње тежине, а трећи и шести тешки. Правило Џефа Смита, по коме свака од четири основне области треба да буде заступљена међу четири лака и средња задатка, практично се подразумева, иако се још увек усваја само за текућу годину.

Што се тиче шортлисте, било је доста притужби на њену лепоту и квалитет. Заиста, сви чланови проблемске комисије су били Кинези из Хонг Конга који очигледно имају другачији укус. С друге стране, не могу да порекнем да је, за разлику од већине шортлиста претходних година, њена тежина била пристојно избалансирана.

Резултати

Завршни састанак жирија је одржан 14-ог увече, након координације. Као и увек, огромну већину чланова жирија занима само једно – границе за медаље, а о њима се одлучује на крају састанка. Најзад, гласање са скривеним предложеним границама за медаље, и опет је изгласана опција са највишим границама. Два стварно лака задатка, још два са дарежљивим шемама за оцењивање, и последица је високих 16 поена за бронзу. Насупрот томе, 22 за сребро и, што нас нажалост не занима, релативно ниских 29 за злато. Да сумирамо наше резултате:

SRB 1	Игор Медведев	7	2	0	7	2	0	**18**	бронзана медаља
SRB 2	Никола Павловић	7	0	0	5	0	0	**12**	похвала
SRB 3	Алекса Милојевић	7	7	0	7	1	1	**23**	сребрна медаља
SRB 4	Огњен Тошић	7	0	1	7	2	0	**17**	бронзана медаља
SRB 5	Алекса Константинов	7	2	0	7	4	0	**20**	бронзана медаља
SRB 6	Никола Садовек	7	2	0	7	0	0	**16**	бронзана медаља
Србија укупно		42	13	1	40	9	1	**106**	

Освајач сребрне медаље Алекса млађи пуно је напредовао у односу на прошлу годину и, што посебно радује, наставља да ради и задржава амбиције. Ветерани у екипи су и Огњен и други Алекса. Они су урадили прихватљиво, овај други је био и близу сребра, али нису напредовали. Иако ово није неко изненађење, ипак су имали довољно технике да ураде нпр. пети задатак. Три нова члана екипе исто су урадили пристојно. Мада им је ово било довољно за медаљу, Игор и Никола старији имају комбинаторне склоности и било је очекивано да ураде и други задатак. Никола млађи може да уради доста, али му треба и доста времена. Без медаље је остао делом због грешке на 4. задатку, а делом због несналажљивости и одсуства парцијалног напретка на неурађеним задацима на којима је радо предавао празне коверте.

Екипно, Србија је освојила 40. место у конкуренцији од 109 земаља. Није баш најгори екипни пласман икада, али да је добар – није. Такмичари су мало полетели након првог екипног места на Балканијади, а од њега је сада остала само још једна потврда да су те ствари лако променљиве. С друге стране, не може се много замерити такмичарима. Можда се нису сви баш претргли од рада, али лаке задатке су углавном урадили, а савете да их пажљиво испишу („размислите на чему би у овом задатку координатори могли да дају шест поена!“) су озбиљно схватили. Међутим, ако ван лаких задатака имамо само једно тачно решење, вероватно не можемо очекивати много бољи екипни пласман. Да ли је разлог слабија екипа или несрећна комбинација задатака, питање је на које не би требало да годину дана чекамо одговор.

У наставку су приложени задаци са овогодишње ММО.

Понедељак, 11. јул 2016

1. задатак. У троуглу BCF угао у темену B је прав. Нека је A тачка на правој CF таква да је $FA = FB$, при чему је тачка F између тачака A и C. Тачка D је таква да је $DA = DC$ и права AC полови угао DAB, а тачка E таква да је $EA = ED$ и права AD полови угао EAC. Нека је M средиште дужи CF, а X тачка таква да је четвороугао $AMXE$ паралелограм ($AM \parallel EX$ и $AE \parallel MX$). Доказати да се праве BD, FX и ME секу у једној тачки.

2. задатак. Наћи све природне бројеве n за које је могуће у свако поље таблице $n \times n$ уписати једно од слова I, M и O тако да су задовољени следећи услови:

- у свакој врсти и свакој колони, једна трећина уписаних слова су I, трећина су M и трећина су O;
- у свакој дијагонали у којој је број уписаних слова дељив са три, једну трећину чине слова I, трећину чине слова M и трећину слова O.

Напомена. Врсте и колоне таблице $n \times n$ су означене бројевима од 1 до n на уобичајен начин. Тада сваком пољу одговара пар природних бројева (i, j) са $1 \leqslant i, j \leqslant n$. За $n > 1$, таблица има $4n - 2$ *дијагонале* два типа. Дијагонала првог типа се састоји од свих поља (i, j) за која је $i + j$ константно, док се дијагонала другог типа састоји од свих поља (i, j) за која је $i - j$ константно.

3. задатак. Дат је конвексан многоугао $P = A_1A_2 \ldots A_k$ у равни. Темена $A_1, A_2, \ldots, A_k$ имају целобројне координате и леже на истој кружници. Нека је S површина многоугла P. Непаран природан број n је такав да су квадрати дужина свих страница многоугла P природни бројеви дељиви са n. Доказати да је $2S$ цео број дељив са n.

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

Уторак, 12. јул 2016.

4. задатак. Скуп природних бројева зовемо *мирисним* ако садржи бар два елемента и сваки његов елемент има заједнички прост делилац са бар једним од преосталих. Означимо $P(n) = n^2 + n + 1$. Која је најмања могућа вредност природног броја b за коју постоји ненегативан цео број a такав да је скуп

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

мирисан?

5. задатак. На табли је написана једначина

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

са по 2016 линеарних фактора на свакој страни. Која је најмања вредност k за коју је могуће обрисати тачно k од ова 4032 линеарна фактора тако да на свакој страни остане бар један фактор и да притом добијена једначина нема реалних решења?

6. задатак. У равни је дато $n \geqslant 2$ дужи тако да се сваке две дужи секу у унутрашњој тачки и никоје три се не секу у истој тачки. Ђура треба да одабере по један крај сваке дужи и у њега постави жабу окренуту према другом крају дужи. Он ће потом пљеснути рукама $n-1$ пута. Сваки пут кад пљесне, свака жаба одмах скаче напред у следећу пресечну тачку на својој дужи. Жабе никад не мењају смер у коме скачу. Ђура жели да постави жабе тако да се ни у ком тренутку две жабе не нађу у истој пресечној тачки.

(а) Ако је n непарно, доказати да Ђура увек може да постигне свој циљ.

(б) Ако је n парно, доказати да Ђура никад не може да постигне циљ.

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена