Друштво математичара Србије

Државни семинар 2017.
о настави математике и рачунарства у основним
и средњим школама,

Београд, 11. и 12. фебруар 2017. год.

Апсолутна вредност у настави математике у средњим школама

Милосав Миленковић и Драгољуб Ђорђевић

РЕЗИМЕ

Апсолутна вредност је један од математичких појмова који најчешће није у довољној мери усвојен код великог броја ученика у нашим средњим школама. Разлози су веома различити, од тога што многи мисле да су ученици то савладали у основној школи, до тога што треба променити приступ код самих наставника. С обзиром да се у плановима и програмима наших средњих школа налазе апсолутне вредности и функције са апсолутним вредностима, на факултетима се претпоставља да су апсолутне вредности и функције са апсолутним вредностима у потпуности научене у средњој школи.

Циљ ове теме је управо да се на један избалансиран начин, постепеним увођењем кроз примере и формалним дефинисањем апсолутне вредности допринесе бољем разумевању од стране ученика. Осавремењавањем наставе коришћењем адекватних софтвера, илустровање процеса приказаних кроз анимацију могуће је на основу искуства аутора ове теме повећати пре свега интересовање код ученика а самим тим и ниво постигнућа.

Осврнућемо се на задатке који се често дају на такмичењима као што су:

1. Нека је a фиксиран реалан број. Решити једначину $|2x+a|-ax=2$.

   (Окружно такмичење из математике ученика средњих школа, 23.01.2016. год.)

2. Дат је систем једначина: $\begin{cases} |x|+|y|=a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$. Наћи све вредности параметра a за које дати систем једначина има тачно 8 решења?

   $(A)\ a\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)\quad (B)\ a\in\left\{\frac{1}{2},1\right\}\quad (C)\ a\in\left\{\sqrt{2},1\right\}\quad (D)\ a\in\left(1,\sqrt{2}\right)\quad (E)\ a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

   (Математичко такмичење ''Мислиша 2016'').

Посебну пажњу посветићемо задацима са апсолутним вредностима који се појављују на пријемним испитима за упис на факултет као што су:

1. Број реалних решења једначине $\left||1-|x||-1\right|-2=0$ једнак је:

   $(A)\ 0\quad (B)\ 1\quad (C)\ 2\quad (D)\ 3\quad (E)\ 4\quad (N)$ не знам

   (Електротехнички факултет, Београд 27.06.2016. год.).

2. Скуп свих реалних решења неједначине $\frac{\left|log_3|2x+3|\right|-3}{log_3 x}>0$ је облика (за неке реалне бројеве a,b,c,d такве да је $-\infty<a<b<c<d<+\infty$):

   $(A)\ (a,b)\quad (B)\ (a,b]\cup[c,d]\quad (C)\ (a,b)\cup(b,c)\quad (D)\ (a,b)\cup(c,+\infty)$

   $(E)\ (a,b)\cup(b,c)\cup(d,+\infty)\quad (N)$ не знам

   (Електротехнички факултет, Београд 27.06.2016. год.).

3. Број целобројних решења неједначине $\sin x<|\cos x|$ у интервалу $[0,8]$ једнак је:

   $(A)\ 4\quad (B)\ 5\quad (C)\ 6\quad (D)\ 7\quad (E)\ 8\quad (N)$ не знам

   (Математички факултет, Београд 29.06.2016. год.).

Појам апсолутне вредности

Апсолутна вредност је један од математичких појмова који најчешће није у довољној мери усвојен код великог броја ученика у нашим средњим школама. Разлози су веома различити, од тога што многи мисле да су ученици то савладали у основној школи, до тога што треба променити приступ код самих наставника. С обзиром да се у плановима и програмима наших средњих школа налазе апсолутне вредности и функције са апсолутним вредностима, на факултетима се претпоставља да су апсолутне вредности и функције са апсолутним вредностима у потпуности научене у средњој школи.

Циљ ове теме је управо да се на један избалансиран начин, постепеним увођењем кроз примере и формалним дефинисањем апсолутне вредности допринесе бољем разумевању од стране ученика. Осавремењавањем наставе коришћењем адекватних софтвера, илустровање процеса приказаних кроз анимацију могуће је на основу искуства аутора ове теме повећати пре свега интересовање код ученика а самим тим и ниво постигнућа.

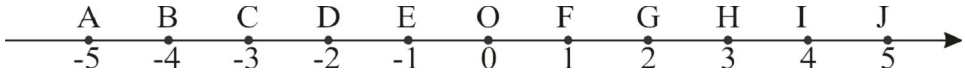
ПРВИ ПОЈАМ О АПСОЛУТНОЈ ВРЕДНОСТИ ЦЕЛОГ БРОЈА

Апсолутна вредност броја је удаљеност броја представљеног на координатној оси од координатног почетка.

Пример: $|+3| = |AD| = 3$ $\quad |+1| = |AB| = 1$ $\quad |0| = |AA| = 0$

$|-2| = |AE| = 2$ $\quad |-1| = |AC| = 1$

Супротни бројеви имају једнаку апсолутну вредност.



$|-5| = |+5| = 5$ јер $|AO| = |OJ| = 5$

$|-4| = |+4| = 4$ јер $|BO| = |OI| = 4$

$|-3| = |+3| = 3$ јер $|CO| = |OH| = 3$

$|-2| = |+2| = 2$ јер $|DO| = |OG| = 2$

$|-1| = |+1| = 1$ јер $|EO| = |OF| = 1$

Апсолутна вредност броја не може бити негативна,
то јест за сваки цео број a важи $|a| \geq 0$.

Удаљеност, како позитивног, тако и њему супротног броја од координатног почетка, то јест броја 0, на бројевној оси је увек позитиван број, а специјално $|0| = 0$.

Након потпуног овладавања појмом апсолутне вредности од стране ученика, као удаљености броја представљеног на бројевној правој од броја 0, тек тада треба увести и формалну дефиницију, где се мора више пута апострофирати да је за негативне вредности то број СУПРОТАН од самог броја, а никако само навести: ако $a<0$ тада $|a| = -a$

Ако је $a \in \mathbf{Z}$, онда $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$.

ОСНОВНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ У СКУПУ ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

За све целе бројеве важе следеће неједнакости:

1) $x \leq |x|$

2) $|x + y| \leq |x| + |y|$

3) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

4) $|x - y| \leq |x| + |y|$

5) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Доказ:

1) Ако је $x \geq 0$ тада $|x| = x$,
ако је $x < 0$ тада $|x| = -x > 0 > x$

2) Ако је $x + y \geq 0$ тада $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$ на основу већ доказаног 1),
ако је $x + y < 0$ тада $|x + y| = -(x + y) = -x - y =$
$= (-x) + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$

3) Неједнакост је уопштавање претходне неједнакости 2)

4) Ако је $z = x - y$ тада је $x = z + y$ па на основу неједнакости 2) важи
$|x| = |z + y| \leq |z| + |y|$, дакле заменом $z = x - y$ добијамо
$|x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, а након сређивања
$|x| \leq |x - y| + |y|$ и коначно променом стране жељену неједнакост
$|x| - |y| \leq |x - y|$

5) Вредност израза $||x| - |y||$ може бити $+(|x| - |y|)$ ако је $|x| - |y| \geq 0$
или $||x| - |y||$ може бити $-(|x| - |y|)$ ако је $|x| - |y| < 0$
па свакако важи $|x| - |y| \leq ||x| - |y||$.

ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ СА АПСОЛУТНИМ ВРЕДНОСТИМА У СКУПУ ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

Најчешћи облици једначина у скупу целих бројева су:

1) $\mathbf{\lvert x \rvert = a}$**, за** $\mathbf{a \geq 0}$**,**	**тада је решење** $\mathbf{x = -a}$ **или** $\mathbf{x = +a}$
2) $\mathbf{\lvert x \rvert = \lvert y \rvert}$**,**	**тада је решење** $\mathbf{x = -y}$ **или** $\mathbf{x = +y}$

ПРИМЕРИ:

1) Реши једначину: *а*) $|x| = 3$ *б*) $|x| = -2$ *в*) $|x + 1| = 5$

а) $|x| = 3$ тада $x = -3$ или $x = +3$ т.ј. $x \in \{-3, +3\}$

б) $|x| = -2$, једначина нема решења јер је $|x| \geq 0$ за сваки цео број x, т.ј. $x \in \varnothing$

в) $|x + 1| = 5$ тада $x + 1 = -5$ или $x + 1 = +5$, па онда
$x = -5 - 1$ или $x = +5 - 1$ и коначно
$x = -6$ или $x = +4$, т.ј.
$x \in \{-6, +4\}$

2) Реши једначину: *а*) $|x + 6| = |2x + 3|$ *б*) $|3x - 1| = |3x + 7|$

а) Из $|x + 6| = |2x + 3|$ добијамо: $x + 6 = +(2x + 3)$ или $x + 6 = -(2x + 3)$
даље $x + 6 = 2x + 3$ или $x + 6 = -2x - 3$
$x - 2x = +3 - 6$ или $x + 2x = -3 - 6$
$-x = -3$ или $3x = -9$
$x = -3 : (-1)$ или $x = -9 : 3$
коначно $x = +3$ или $x = -3$

б) Из $|3x - 1| = |3x + 7|$ добијамо: $3x - 1 = +(3x + 7)$ или $3x - 1 = -(3x + 7)$
даље $3x - 1 = +3x + 7$ или $3x - 1 = -3x - 7$
$3x - 3x = +7 + 1$ или $3x + 3x = -7 + 1$
$0 = 8$ или $6x = -6 \mid :6$
прва једнакост нема решења т.ј. $x \in \varnothing$ или $x = -1$
и коначно једино решење једначине је: $x = -1$

Најчешћи облици неједначина у скупу целих бројева су:

1) $\|x\| > a$, за $a \geq 0$,	тада је решење	$x < -a$ или $x > +a$
2) $\|x\| < a$, за $a \geq 0$,	тада је решење	$x > -a$ и $x < +a$ односно $-a < x < +a$

ПРИМЕРИ:

1) Реши неједначину у скупу целих бројева:

а) $|x + 6| > 3$ *б*) $|x - 1| < 4$

РЕШЕЊА:

а) На основу 1) важи $x + 6 < -3$ или $x + 6 > +3$

$x < -3 - 6$ или $x > +3 - 6$

$x < -9$ или $x > -3$

$x \in \{..., -11, -10\}$ или $x \in \{-2, -1, ...\}$

и коначно $x \in \{..., -11, -10\} \cup \{-2, -1, ...\}$

б) На основу 2) важи $x - 1 > -4$ и $x - 1 < +4$

односно: $-4 < x - 1 < +4$

$-4 + 1 < x < +4 + 1$

$-3 < x < +5$

и коначно $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

Једначине и неједначине са вишеструком апсолутном вредношћу једног линеарног алгебарског израза

ПРИМЕРИ:

1) Реши једначину у скупу целих бројева:

а) $|||x| + x| + x| = 2013$ *б*) $|||x| - x| - x| = 2013$ в) $|||x| + 1| + 1| = 2015$

РЕШЕЊА:

а) За $x < 0$; за $x \geq 0$;

$||-x + x| + x| = 2013$ $||x + x| + x| = 2013$

$|x| = 2013$ $|2x + x| = 2013$

$-x = 2013$ $|3x| = 2013$

$x = -2013$ $3|x| = 2013$

$|x| = 2013 : 3$

$x = 671$

коначно решење једначине је $x \in \{-2013, 671\}$

б) За $x < 0$; за $x \geq 0$;

$||-x - x| - x| = 2013$ $||x - x| - x| = 2013$

$||-2x| - x| = 2013$ $|-x| = 2013$

$|-2x - x| = 2013$ $|x| = 2013$

$|-3x| = 2013$ $x = 2013$

$3|x| = 2013$

$-3x = 2013$

$x = 2013 : (-3)$

$x = -671$

коначно решење једначине је $x \in \{-671, 2013\}$

в) $|||x| + 1| + 1| = 2015$

$||x| + 1| + 1 = -2015$ или $||x| + 1| + 1 = +2015$

$||x| + 1| = -2015 - 1$ или $||x| + 1| = 2015 - 1$

$||x| + 1| = -2016$ или $||x| + 1| = 2014$

нема решење или $|x| + 1 = -2014$ или $|x| + 1 = +2014$

$|x| = -2014 - 1$ или $|x| = 2014 - 1$

$|x| = -2015$ или $|x| = 2013$

нема решење или $x = -2013$ или $x = 2013$

Коначно решење једначине је: $x \in \{-2013, 2013\}$

АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ РЕАЛНОГ БРОЈА

Апсолутна вредност реалног броја уводи се слично другом облику дефиниције апсолутне вредности целог броја:

Ако је $a \in \mathbf{R}$, онда $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

Јако је битно истаћи је да се сва својства апсолутне вредности целог броја преносе и важе за апсолутну вредност реалног броја, а апсолутна вредност алгебарског израза уводи на аналоган начин:

Ако је A алгебарски израз онда $|A| = \begin{cases} +A, & A \geq 0 \\ -A, & A < 0 \end{cases}$.

Вредност израза са апсолутним вредностима линеарних алгебарских израза

ПРИМЕРИ:

1) Израчунај вредност израза $\left|\sqrt{2}-2\right|+\left|3-\sqrt{2}\right|$

2) Докажи да је израз рационалан $A=\left|\sqrt{3}-2\right|-\left|3-\sqrt{3}\right|$

РЕШЕЊЕ:

1) Пошто је $\sqrt{2}-2<0$ важи $\left|\sqrt{2}-2\right|=-\left(\sqrt{2}-2\right)$ и

слично $3-\sqrt{2}>0$ важи $\left|3-\sqrt{2}\right|=+\left(3-\sqrt{2}\right)$ па добијамо

$$\left|\sqrt{2}-2\right|+\left|3-\sqrt{2}\right|=-\left(\sqrt{2}-2\right)+\left(3-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}+2+3-\sqrt{2}=5-2\sqrt{2}$$

2) Користећи се дефиницијом апсолутне вредности алгебарског израза доказ се лако изводи:

$$A=\left|\sqrt{3}-2\right|-\left|3-\sqrt{3}\right|=-\left(\sqrt{3}-2\right)-\left(3-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}+2-3+\sqrt{3}=-1\in \mathbb{Q}$$

Сложенији облици једначина и неједначина са апсолутном вредношћу линеарних алгебарских израза

ПРИМЕРИ:

1) Одреди скуп решења једначине:

а) $|x-2|+|x+2|=4$ *б*) $|x-2|+|x+2|=2x$ *в*) $|x-1|+|x-2|+|x-3|=3$

РЕШЕЊА:

а) Из дефиниције апсолутне вредности имамо:

$$|x-2|=\begin{cases}+(x-2), & x-2\geq 0\\ -(x-2), & x-2<0\end{cases} = |x-2|=\begin{cases}+(x-2), & x\geq 2\\ -(x-2), & x<2\end{cases} \quad \text{и}$$

$$|x+2|=\begin{cases}+(x+2), & x+2\geq 0\\ -(x+2), & x+2<0\end{cases} = |x+2|=\begin{cases}+(x+2), & x\geq -2\\ -(x+2), & x<-2\end{cases}$$

па се скуп реалних бројева може поделити на три области, што се може прегледно представити табелом:

	$x\in(-\infty,\ -2)$	$x\in[-2,2)$	$x\in[2,+\infty)$
$\lvert x-2\rvert$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$+(x-2)$
$\lvert x+2\rvert$	$-(x+2)$	$+(x+2)$	$+(x+2)$

Решавањем једначине појединачно за сваку од тих области добијају се сва решења:

за $x \in (-\infty, -2)$

$-(x-2)-(x+2)=4$

$-x+2-x-2=4$

$-2x=4$

$x=-2$ што не може бити решење јер $-2 \notin (-\infty, -2)$

за $x \in [-2, 2)$

$-(x-2)+(x+2)=4$

$-x+2+x+2=4$

$4=4$ што је тачна једнакост и сваки број $x \in [-2, 2)$ је део решења

за $x \in [2, +\infty)$

$+(x-2)+(x+2)=4$

$+x-2+x+2=4$

$2x=4$

$x=2$, па је и то део решења, јер $2 \in [2, +\infty)$

Коначно решење једначине је унија појединачно по областима добијеним деловима решења: $x \in [-2, 2) \cup \{2\}$ т.ј. $x \in [-2, +2]$.

б) Из дефиниције апсолутне вредности имамо:

$$|x-2| = \begin{cases} +(x-2), & x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & x-2 < 0 \end{cases} = |x-2| = \begin{cases} +(x-2), & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases} \quad \text{и}$$

$$|x+2| = \begin{cases} +(x+2), & x+2 \geq 0 \\ -(x+2), & x+2 < 0 \end{cases} = |x+2| = \begin{cases} +(x+2), & x \geq -2 \\ -(x+2), & x < -2 \end{cases}$$

па се скуп реалних бројева може поделити на пет области, што се може прегледно представити табелом:

	$x \in (-\infty, -2)$	$x \in [-2, 2)$	$x \in [2, +\infty)$
$\lvert x-2 \rvert$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$+(x-2)$
$\lvert x+2 \rvert$	$-(x+2)$	$+(x+2)$	$+(x+2)$

Решавањем једначине појединачно за сваку од тих области добијају се сва решења:

за $x \in (-\infty, -2)$

$-(x-2)-(x+2)=2x$

$-\ x + 2 - x - 2 = 2x$

$-\ 2x = 2x$

$-\ 2x - 2x = 0$

$-\ 4x = 0$

$x = 0$ што не може бити решење јер $0 \notin (-\infty, -2)$

за $x \in [-2, 2)$

$-\ (x - 2) + (x + 2) = 2x$

$-\ x + 2 + x + 2 = 2x$

$4 = 2x$

$x = 2$ што није решење јер број $2 \notin [-2, 2)$

за $x \in [2, +\infty)$

$+\ (x - 2) + (x + 2) = 2x$

$+\ x - 2 + x + 2 = 2x$

$2x = 2x$

$0 = 0$ што је тачна једнакост и решење је $x \in [2, +\infty)$

Коначно решење једначине је $x \in \{2\} \cup [2, +\infty)$ т.ј. $x \in [+2, +\infty)$.

в) Користећи дефиниције апсолутних вредности за три линеарна израза добијамо табелу са седам области:

$x \in$	$x \in (-\infty, 1)$	$x \in [1, 2)$	$x \in [2, 3)$	$x \in [3, +\infty)$
$\lvert x-1 \rvert$	$-(x-1)$	$+(x-1)$	$+(x-1)$	$+(x-1)$
$\lvert x-2 \rvert$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$+(x-2)$	$+(x-2)$
$\lvert x-3 \rvert$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$+(x-3)$

Решавањем једначине појединачно за сваку од тих области добијају се сва решења:

за $x \in (-\infty, 1)$ добијамо $x = +1$ што није решење јер $1 \notin (-\infty, 1)$

за $x \in [1, 2)$ добијамо $x = +1$ што је решење јер $1 \in [1, 2)$

за $x \in [2, 3)$ добијамо $x = +3$ што није решење јер $3 \notin [2, 3)$

за $x \in [3, +\infty)$ добијамо $x = +3$ што је решење јер $3 \in [3, +\infty)$.

Коначно добијамо решење: $x \in \{+1\} \cup \{+3\}$ т.ј. $x \in \{+1, +3\}$.

2) Одреди скуп решења неједначине:

а) $|x-2|+|4-x|<4x$ *б*) $||x+5|-x|<8$ *в*) $|x+|x-1||>|x-2+|x+1|$

РЕШЕЊА:

а) Како је збир апсолутних вредности ненегативан т.ј. $|x-2|+|4-x|\geq 0$ за сваки број x то мора бити $4x\geq 0$ па је $x\geq 0$ што смањује област за тражење решења и таблица се формира:

$x\in$	$(-\infty,0)$	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,+\infty)$
$\lvert x-2\rvert$	/	$-(x-2)$	$+(x-2)$	$+(x-2)$
$\lvert 4-x\rvert$	/	$+(4-x)$	$+(4-x)$	$-(4-x)$

за $x\in[0,2)$ добијамо $x>1$ па је решење $x\in(1,\ 2)$

за $x\in[2,4)$ добијамо $x>\frac{1}{2}$ па је решење $x\in[2,4)$

за $x\in[4,+\infty)$ добијамо $x>-3$ па је решење $x\in[4,+\infty)$ и

коначно решење је $x\in(1,2)\cup[2,4)\cup[4,+\infty)$ т.ј. $x\in(1,\ +\infty)$

б) На основу $|x|<a$, за $a\geq 0$, тада је решење $x>-a$ и $x<+a$ односно $-a<x<+a$ односно из $||x+5|-x|<8$ следи $-8<|x+5|-x<+8$ и

	$x\in(-\infty,\ -5)$	$x\in[-5,+\infty)$
$\lvert x+5\rvert$	$-(x+5)$	$+(x+5)$

За $x\in(-\infty,\ -5)$ имамо $-8<-(x+5)-x<+8$

и добијамо $+\frac{3}{2}>x>-\frac{13}{2}$ па је решење $x\in\left(-\frac{13}{2},\ -5\right)$;

за $x\in[-5,+\infty)$ имамо $-8<+(x+5)-x<+8$

и добија се $-8<+5<+8$ што је тачна неједнакост

па се добија решење $x\in[-5,+\infty)$.

Коначно решење је $x\in\left(-\frac{13}{2},-5\right)\cup[-5,+\infty)$ т.ј. $x\in\left(-\frac{13}{2},\ +\infty\right)$

в) На основу дефиниција апсолутних вредности формирамо табелу:

$x \in$	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in [-1, +1)$	$x \in [1, +\infty)$
$\lvert x-1 \rvert$	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$+(x-1)$
$\lvert x+1 \rvert$	$-(x+1)$	$+(x+1)$	$+(x+1)$

за $x \in (-\infty,\ -1)$ добијамо $1 > 3$ што је нетачно па нема решења

за $x \in [-1, +1)$ добијамо $1 > \lvert 2x-1 \rvert$ па је даље

$$-1 < 2x - 1 < +1$$
$$0 < 2x < +2$$
$$0 < x < 1$$ па је решење $x \in (0,\ 1)$

за $x \in [1, +\infty)$ добијамо $\lvert 2x-1 \rvert > \lvert 2x-1 \rvert$ што је нетачно па нема решења.

Коначно решење је $x \in (0,\ 1)$

Апсолутна вредност и квадратни корен

На основу дефиниције квадратног корена реалног броја:

Квадратни корен реалног броја *a*, који је ненегативан, је реалан број *b*, такође ненегативан ако важи: $b^2 = a$ и користи се ознака $\sqrt{a} = b$

добија се једнакост:

За сваки реалан број *a* важи $\sqrt{a^2} = |a|$

Последња једнакост се примењује у многим задацима, што ће се видети из следећег задатка.

3) *а*) Реши једначину у скупу реалних бројева: $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{4x^2+4x+1}=13$

б) Реши неједначину у скупу R: $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{9x^2-12x+4}\le 4x$

РЕШЕЊЕ:

а) Из $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{4x^2+4x+1}=13$ следи

$\sqrt{(x-3)^3}+\sqrt{(2x+1)^2}=13$

$|x-3|+|2x+1|=13$ што даље решавањем на познати начин доводи до два решења $x\in\left\{-\frac{11}{3},\ 5\right\}$

б) Из $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{9x^2-12x+4}\le 4x$ следи $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(3x-2)^2}\le 4x$

$|x-2|+|3x-2|\le 4x$ из чега на основу ненегативности збира апсолутних вредности добијамо $x\ge 0$ и даљим решавањем помоћу табеле и три различите области, на познати начин добијамо решење:

$x\in\left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ РЕШАВАЊА АЛГЕБАРСКОМ МЕТОДОМ:

(без коришћења графика)

1. Реши једначину:
   - *а*) $|x + 5| = 1$
   - *б*) $|2x + 1| - |2x - 1| = -2$
   - *в*) $|x + |x - 2|| = x - 1$
   - *г*) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

2. Реши неједначину:
   - *а*) $|2x - 3| < 1$
   - *б*) $|2x - 3| \geq 3$
   - *в*) $|2x + 1| - |2x - 1| \geq 2$
   - *г*) $|x + 8| - |x + 1| \geq x + 2$
   - *д*) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq x$
   - *ђ*) $|3 - |2 - |1 - |x||||| < 2$

3. Израчунај вредност израза: $A = \left|2 + \sqrt{5}\right| - \left|2 - \sqrt{5}\right|$

4. Докажи да за све реалне бројеве: $4 < x < 8$ је израз А константан, ако је $A = \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} + \sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}}$

5. Одреди реалан параметар a тако да једначина $||||x| - 1| - 2| - 3| = a$
   - *а*) има тачно 7 решења
   - б) има тачно 6 решења
   - *в*) има паран број решења

РЕШЕЊА:

1. *а*) $x \in \{-6, -4\}$

   б) $x \in \left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]$

   в) $x \in \{1, 3\}$

   г) $x = 3$

2. *а)* $x \in (1, 2)$

   б) $x \in (-\infty,\ 0] \cup [3,\ +\infty)$

   в) $x \in \left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$

   г) $x \in (-\infty, -9] \cup [-7, 5]$

   д) $x \in [2,\ 6]$

   ђ) $x \in (-8,\ -4) \cup (-2,\ 0) \cup (0,\ 2) \cup (4,\ 8)$

3. $A = 4$

4. $$x - 4\sqrt{x-4} = \left(\sqrt{x-4}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{x-4}\cdot 2 + 2^2 = \left(\sqrt{x-4} - 2\right)^2$$

   $$x + 4\sqrt{x-4} = \left(\sqrt{x-4}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{x-4}\cdot 2 + 2^2 = \left(\sqrt{x-4} + 2\right)^2$$

   $\left|\sqrt{x-4} - 2\right| = -\left(\sqrt{x-4} - 2\right)$ јер је $\sqrt{x-4} - 2 < 0$ за $4 < x < 8$

   $\left|\sqrt{x-4} + 2\right| = +\left(\sqrt{x-4} + 2\right)$ јер је $\sqrt{x-4} + 2 > 0$ за $4 < x < 8$

   $$A = \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} = \sqrt{\left(\sqrt{x-4} - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-4} + 2\right)^2} =$$
   $$= \left|\sqrt{x-4} - 2\right| + \left|\sqrt{x-4} + 2\right| = -\left(\sqrt{x-4} - 2\right) + \left(\sqrt{x-4} + 2\right) =$$
   $$= -\sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} + 2 = 4$$

5. *а*) $a = 2$

   б) $a \in \{1\} \cup (2, 3)$

   в) $a \in [0, 2) \cup (2, +\infty)$

ПРИМЕНА ГРАФИКА ФУНКЦИЈЕ У РЕШАВАЊУ ЈЕДНАЧИНА И НЕЈЕДНАЧИНА СА АПСОЛУТНИМ ВРЕДНОСТИМА

Користећи се основним знањима везаним за примену графика функција могуће је на једноставан, разумљив и визуелно убедљив начин решити многе сложене облике једначина и неједначина.

Решења једначине облика: $f(x) = g(x)$ **су апцисе (x-координате) пресечних тачака графика функција** $y = f(x)$ **и** $y = g(x)$**.**

Решења неједначине облика: $f(x) > g(x)$ **је област** $(a, b) \subseteq R$ **за коју важи да је за сваки** x **из те области график функције** $y = f(x)$ **"изнад" графика функције** $y = g(x)$**.**

Решења неједначине облика: $f(x) < g(x)$ **је област** $(a, b) \subseteq R$ **за коју важи да је за сваки** x **из те области график функције** $y = f(x)$ **"испод" графика функције** $y = g(x)$**.**

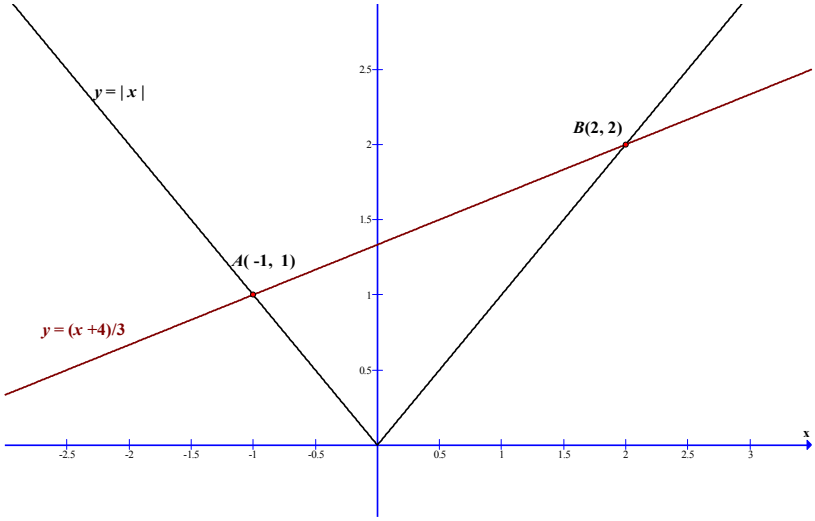
Термини "изнад" и "испод" имају значење у складу са визуелним представама које ученици имају са нацртаним графицима и веома лако се усвајају.

ПРИМЕР: *а*) Реши једначину: $3|x| = x + 4$

б) Реши неједначину: $3|x| > x + 4$

в) Реши једначину: $3|x| < x + 4$

РЕШЕЊА: За добијање решења прво ћемо формирати графике функција



а) За решења једначине $3|x| = x + 4$ која је еквивалентна са једначином

$|x| = \frac{x+4}{3}$ односно $|x| = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

користићемо графике функција: $f(x) = |x|$ и $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ и како су пресечне тачке тих графика: A(-1, 1) и B(2, 2) решење једначине облика: $f(x) = g(x)$ су апцисе тих пресечних тачака: $x = -1$ и $x = 2$, т.ј. $x \in \{-1,\ 2\}$

б) За решење неједначине $3|x| > x + 4$ користимо графике истих функција као и у претходном случају а решење за $f(x) > g(x)$ је област за коју важи да је график функције $y = f(x)$ **"изнад"** графика функције $y = g(x)$, а то је: $x \in (-\infty,\ -1) \cup (2,\ +\infty)$

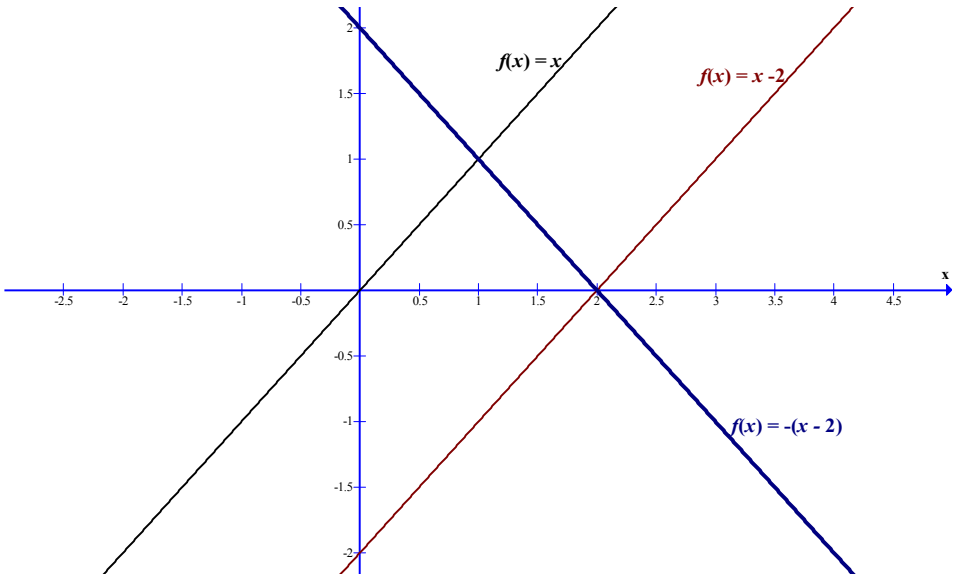
в) За решење неједначине $3|x| < x + 4$ користимо графике истих функција као и у претходном случају а решење за $f(x) < g(x)$ је област за коју важи да је график функције $y = f(x)$ **"испод"** графика функције $y = g(x)$, а то је: $x \in (-1,\ 2)$

У сложенијим задацима потребно је још користити знања у вези графика:

Графици функција $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ су симетрични у односу на x-осу.

Пример: Одреди график функције: $y = -x + 2$

РЕШЕЊЕ: На основу графика познате функције $y = x$ одредићемо редом графике функција $y = x - 2$ и $y = -(x - 2)$ т.ј. $y = -x + 2$



Графици функција $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$ се поклапају за области на којима је $f(x) \geq 0$, а симетрични у односу на x-осу, за области на којима је $f(x) < 0$.

Пример: Одреди график функције: $y = |\, x - 2 \,|$

РЕШЕЊЕ: На основу графика познате функције $y = x$ одредићемо редом графике функција $y = x - 2$ и коначно $y = |x - 2|$

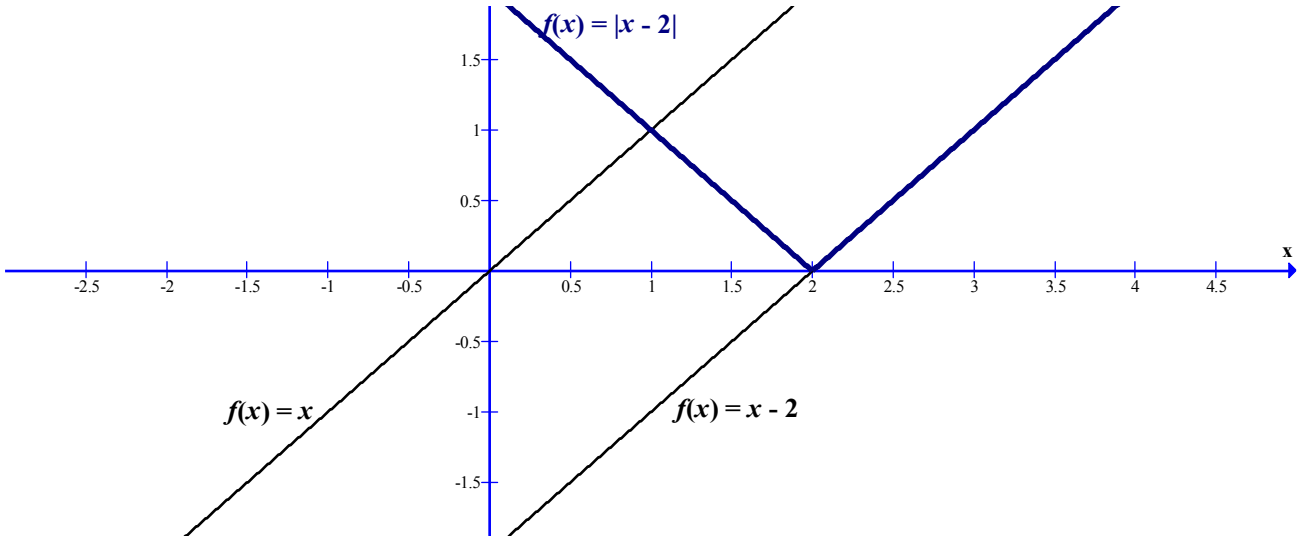
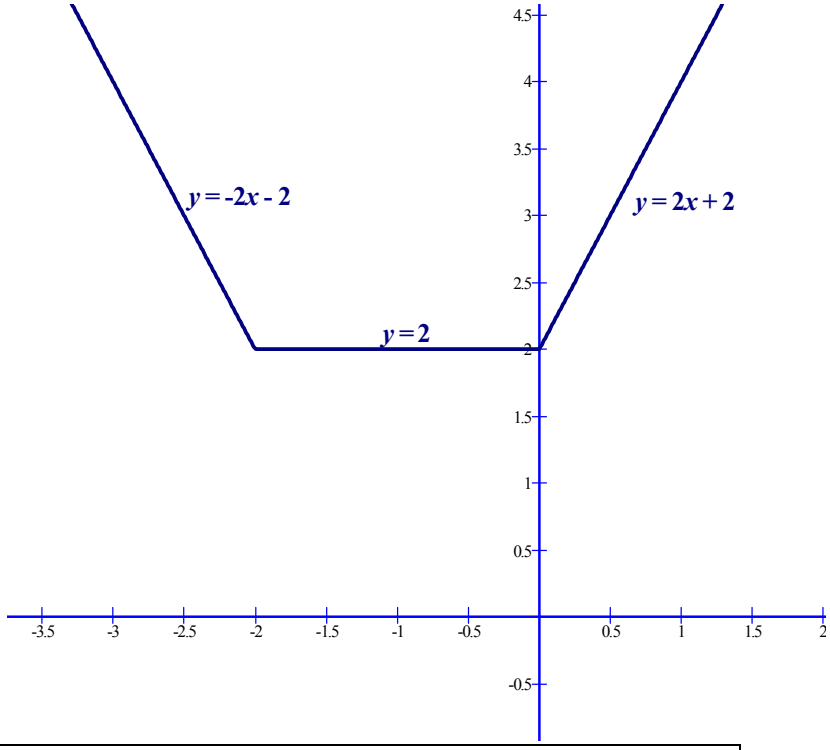


График сваке функције са апсолутном вредношћу линеарног израза је изломљена линија. Свака полуправа и дуж која чини изломљену линију је график неке линеарне функције на једној од области на које је подељен скуп реалних бројева.

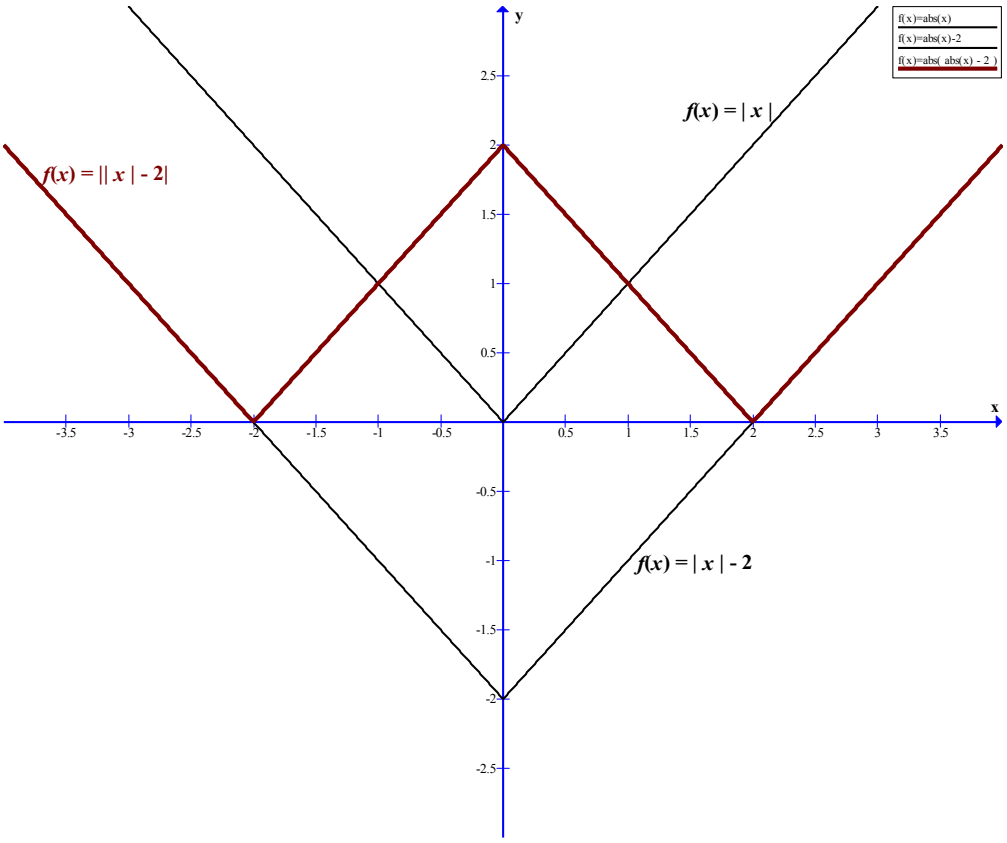
ПРИМЕР: Одреди график функције *а*) $y = |\, x \,| + |\, x + 2 \,|$ *б*) $y = |\,|\, x \,| - 2 \,|$

РЕШЕЊЕ:

а) $$y = \begin{cases} 2x + 2 & \text{ako} \quad x \in [0,\ +\infty) \\ 2 & \text{ako} \quad x \in [-2,\ 0) \\ -2x - 2 & \text{ako} \quad x \in (-\infty,\ -2) \end{cases}$$



б) График тражене функције $y = | \, | x | - 2 \, |$ добићемо на основу познатих графика функција: $y = | x |$, померањем "на доле за 2" $y = | x | - 2$ и коначно $y = || x | - 2 |$



ЗАДАЦИ:

1) Одреди реалан параметар a тако да једначина има тачно једно решење

$$2| x - 1| + | x - 3 | = a$$

2) Одреди реалан параметар a тако да једначина има највећи број решења

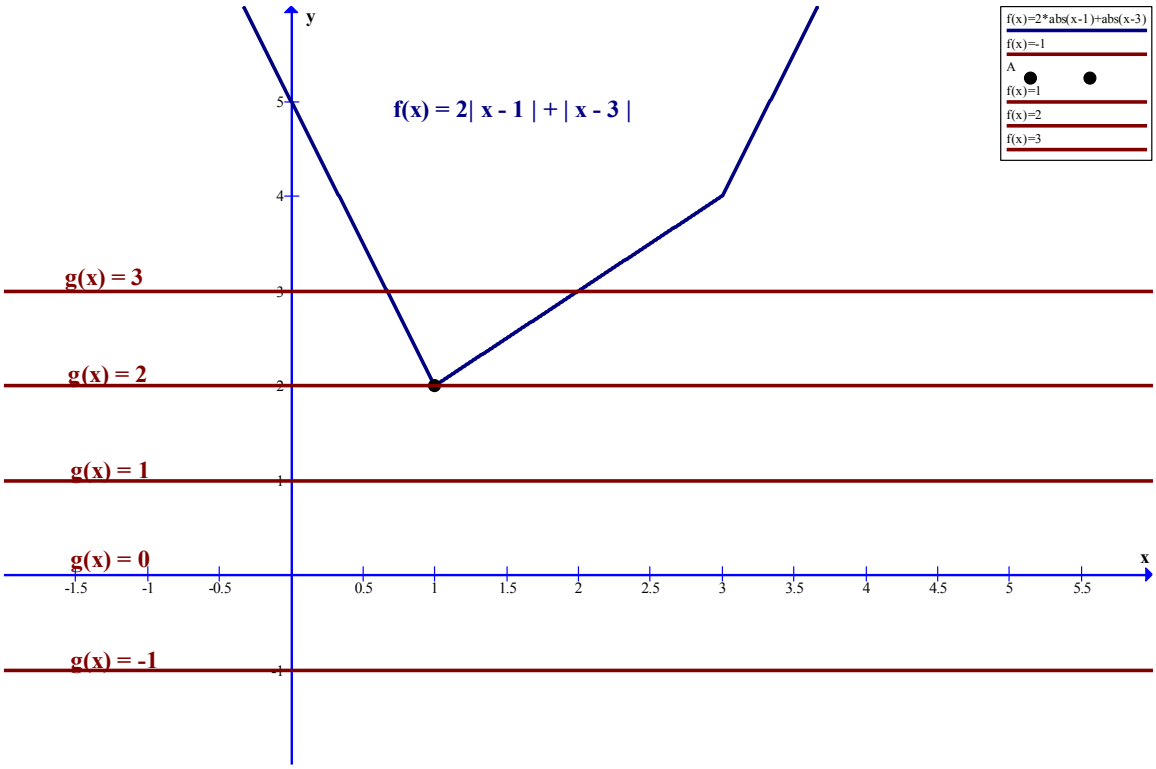
$$| x - 2| + | x + 5 | - | x | = a + 3$$

РЕШЕЊА:

1) Прво ћемо формирати график функције $f(x) = 2| x - 1| + | x - 3 |$ на већ познати начин, а након тога и графике за функцију $g(x) = a$ (хоризонталне праве које секу y-осу у тачки $(0, a)$)

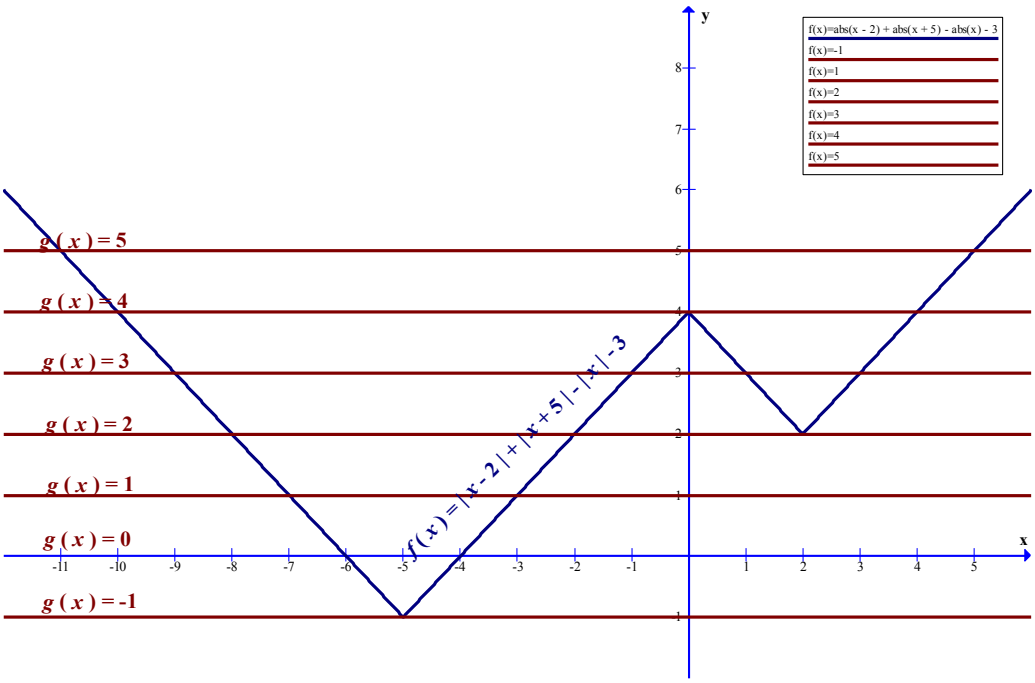
$$f(x) = \begin{cases} -3x+5 & \text{ako} \quad x \in (-\infty, 1) \\ x+1 & \text{ako} \quad x \in [1, 3) \\ 3x-5 & \text{ako} \quad x \in [3, +\infty) \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(x) = a, \quad a \in \{-1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Са графика се лако може закључити да задата једначина има једно решење за $a = 2$, јер за $a < 2$ нема решења, а за $a > 2$ једначина има два решења.



2) За решење овог задатка користићемо графике функција:

$$f(x) = |x-2| + |x+5| - |x| - 3 \qquad \text{и} \qquad g(x) = a, \quad a \in \{-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



Са графика се лако може закључити да задата једначина:

за $a < -1$ нема решења,

за $a = -1$ има једно решење,

за $-1 < a < 2$ има два решења,

за $a = 2$ има три решења,

за $2 < a < 4$ има четири решења,

за $a = 4$ има три решења и

за $a > 4$ има два решења.

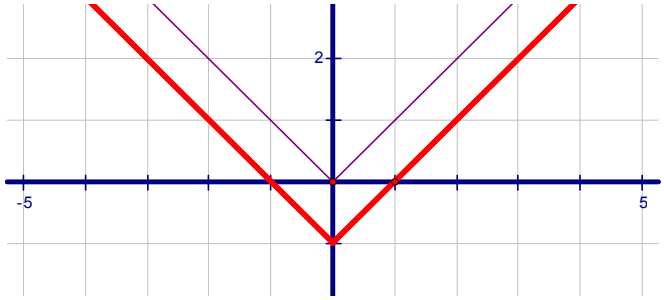
Коначно решење задатка је: $2 < a < 4$ т.ј. $a \in (2, 4)$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ РЕШАВАЊА ГРАФИЧКОМ МЕТОДОМ:

(са коришћењем графика функција)

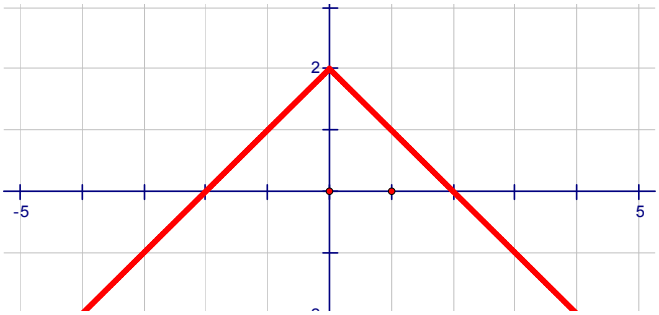
Задатак 1. Нацртати график функције $y=|x|-1$ (или $y=-1+|x|$).

Решење: До графика се долази таблицом или померањем графика функције $y=|x|$ за 1 наниже по оси Oy .



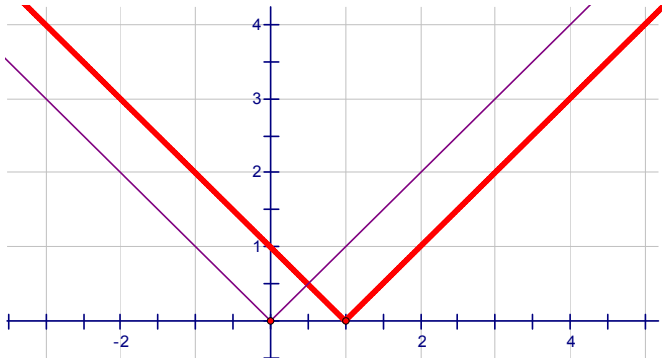
Задатак 2. Нацртати график функције $y=-|x|+2=2-|x|$.

Решење:



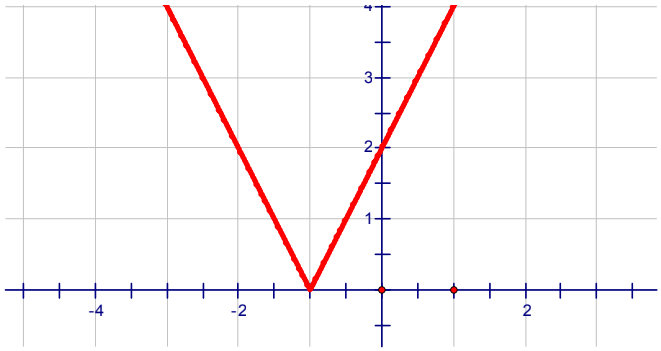
Задатак 3. Нацртати график функције $y=|x-1|$.

Решење: До графика се долази таблицом где се у средини таблице за x ставља 1 или се график функције $y=|x|$ помера за 1 по оси Ox.



Задатак 4. Нацртати график функције $y=2|x+1|$.

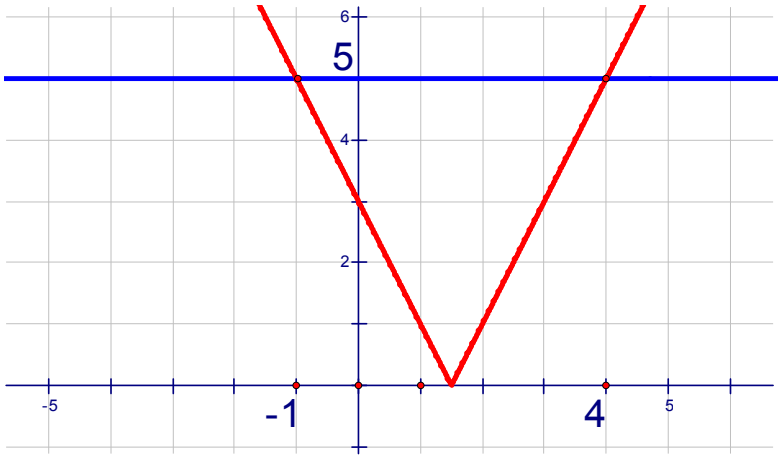
Решење:



Задатак 5. Решити: 1) једначину $|3-2x|=5$;

2) неједначину $|3-2x|<5$.

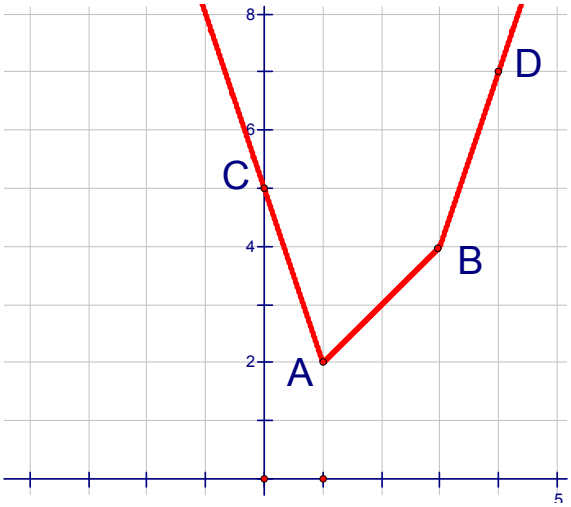
Решење: Ако нацртамо график функције $y=|3-2x|$ и $y=5$ видимо да је решење једначине $x=-1$ и $x=4$ а решење неједначине $x\in(-1,4)$.



Задатак 6. Нацртати график функције $y=2|x-1|+|x-3|$.

Решење: График функције ће бити изломљена линија која се састоји од једне дужи и две полуправе. Једина темена (чворови) те изломљене линије су тачке $A(1,f(1))$ и $B(3,f(3))$ тј. тачке $A(1,2)$ и $B(3,4)$ па је график унија дужи AB и полуправих које полазе из тачака A и B.

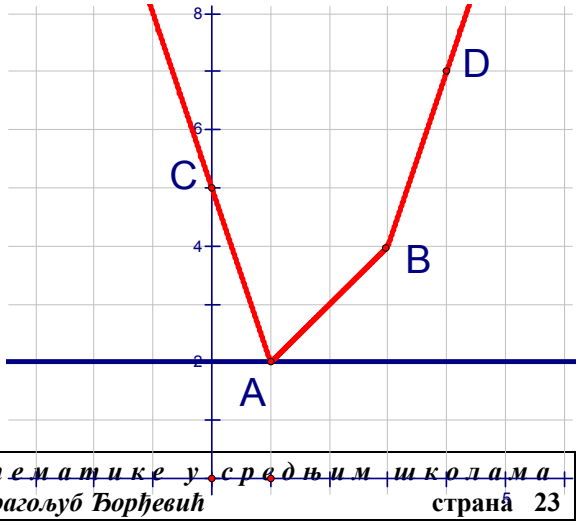
У циљу што бржег цртања графика ове функције треба израчунати координате двеју тачака C и D чије апсцисе су било која тачка мања од 1 и било која већа од 3 на пример $C(0,5)$ и $D(4,7)$ јер тада имамо одређене полуправе AC и BD.



Задатак 7. Вредност реалног броја a за коју једначина $2|x-1|+|x-3|=a$ има тачно једно решење припада интервалу:

$A)\ [1,3)\quad B)\ (-\infty,-3)\quad C)\ [-1,1)\quad D)\ [3,+\infty)\quad E)\ [-3,-1)$

Решење:
Ако нацртамо график функције $y=2|x-1|+|x-3|$ па функције $y=2$ видимо да та два графика имају само једну заједничку тачку A. Дакле вредност реалног броја a је 2, а број $2\in[1,3)$ па је решење под A.

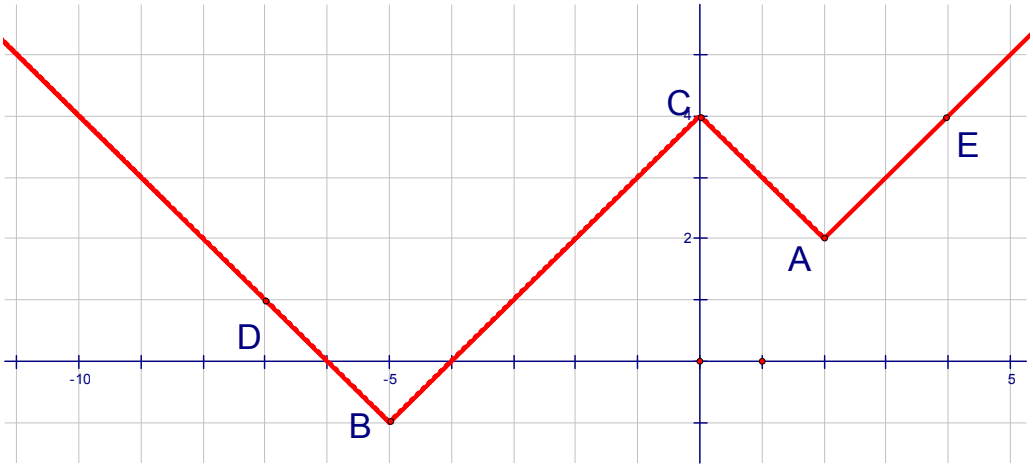


Задатак 7. Нацртај график функције: $f(x)=|x-2|+|x+5|-|x|-3$?

Решење: График функције ће бити изломљена линија која се састоји од дужи и две полуправе на крајевима те изломљене линије. Једина темена те изломљене линије су тачке:

$$A(2,f(2)),\ B(-5,f(-5)) \text{ и } C(0,f(0)) \text{ тј. } A(2,2),\ B(-5,-1) \text{ и } C(0,4),$$

па је график функције $f(x)$ унија дужи BC, CA и полуправих које полазе из тачака B и A. Треба још израчунати координате двеју тачака D и E чије апсцисе су било која тачка мања од -5 и било која већа од 2 на пример $D(-7,1)$ и $E(4,4)$ јер тада имамо одређене полуправе BD и AE.



Са графика се сада једноставно очитавањем могу решити следећи задаци:

1) Решити једначину $f(x)=0$; (тј. $|x-2|+|x+5|-|x|-3=0$).

Резултат: $x\in\{-4,-6\}$; (тј. $x=-4$ и $x=-6$)

2) Решити једначину $f(x)=3$. (резултат: $x\in\{-9,-1,1,3\}$)

3) Решити једначину $f(x)=-3$. (резултат: $x\in\emptyset$, тј. нема решења)

4) Решити неједначину $f(x)>3$. (резултат: $x\in(-\infty,-9)\cup(-1,1)\cup(3,+\infty)$)

5) Наћи минималну вредност израза $|x-2|+|x+5|-|x|-3$. (резултат: -1)

6) Одредити $a\in R$ тако да једначина $|x-2|+|x+5|-|x|-3=a$ има тачно:

а) нула решења б) једно реш. с) два реш. д) три реш. е) четири реш. f) пет реш.

Резултат:

$a)\ a<-1 \quad b)\ a=-1 \quad c)\ a\in(-1,2)\cup(4,\infty) \quad d)\ a=2\vee a=4 \quad e)\ a\in(2,4) \quad f)\ a\in\emptyset$

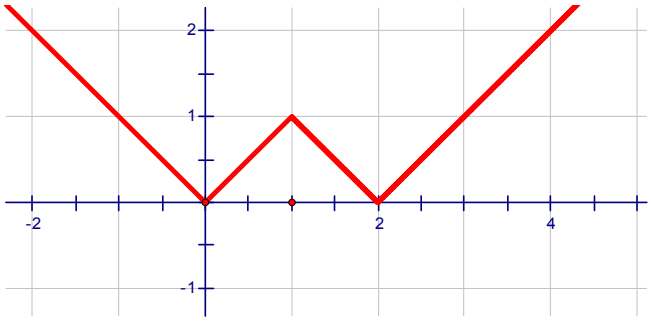
7) Једначина $|x-2|+|x+5|-|x|-3=a$, $a\in R$, има максималан број различитих реалних решења ако и само ако вредности реалног параметра a припадају интервалу:

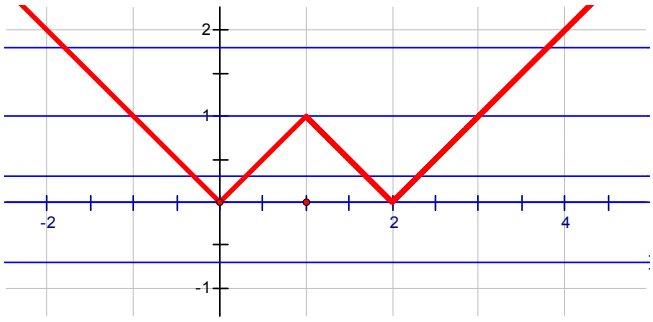
$a)\ (-\infty,-1) \quad b)\ (-1,2) \quad c)\ (2,4) \quad d)\ (4,\infty) \quad e)\ [-1,2]$

Резултат: под *с.*

Задатак 9. За које вредности реалног броја a једначина $\left||x-1|-1\right|=a$ има највише реалних решења по x? Одредити сва та решења.

Решење:
Прво се нацрта график функције
$y=\left||x-1|-1\right|$.





Права $y=a$
не сече добијени график (ако је $a<0$);
сече у две тачке (ако је $a=0 \vee a>1$);
сече у три тачке (ако је $a=1$);
сече у четири тачкака (ако је $0<a<1$).

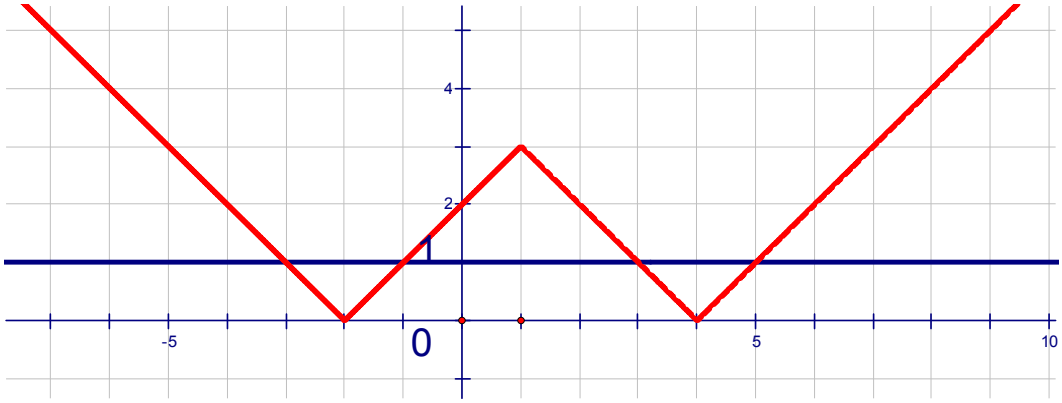
Према томе тражени интервал је $0<a<1$,
а добијена решења су тада $-a,\ a,\ 2-a,\ 2+a$.

Задатак 10. Број решења једначине $\left|\sqrt{x^2-2x+1}-3\right|=1$ је:

A) мањи од 3 B) 3 C) 4 D) 5 E) већи од 5

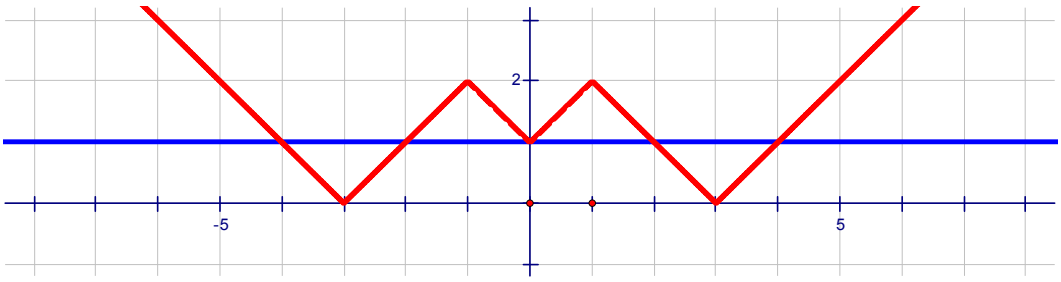
Решење:
Израз $\left|\sqrt{x^2-2x+1}-3\right|=1$ је еквивалентан следећим изразима
$\left|\sqrt{(x-1)^2}-3\right|=1,\quad \left||x-1|-3\right|=1$.

Цртањем графика функција $y=\left||x-1|-3\right|$ и $y=1$ долазимо до одговора под C.



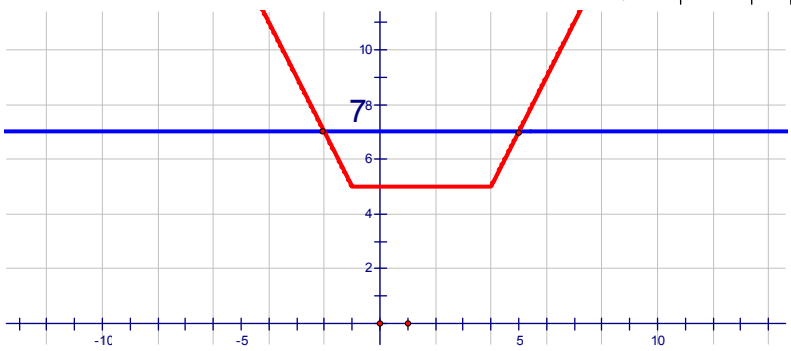
Задатак 11. Решити једначину $\left|2-\left|1-|x|\right|\right|=1$.

Решење: $x\in\{-4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4\}$



Задатак 12. Решити неједначину $\sqrt{1+2x+x^2}+\sqrt{x^2-8x+16}>7$.

Решење: Задатак се своди на цртање графика функције $y=|1+x|+|x-4|$ и $y=7$.

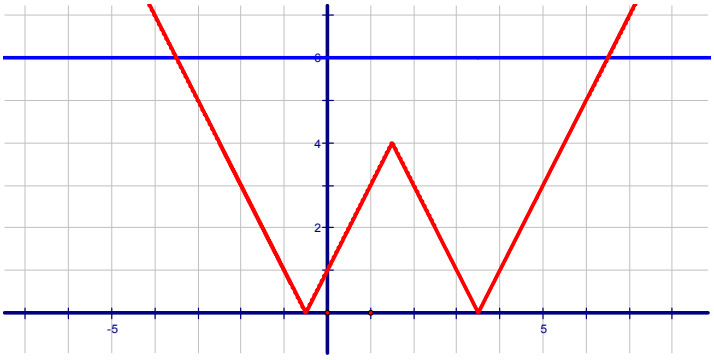


Решење неједначине је $x\in(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$.

Задатак 13. Збир свих решења једначине $\left||2x-3|-4\right|=6$ је:

A) $\frac{13}{2}$ B) 6 C) 3 D) $-\frac{7}{2}$ E) 10

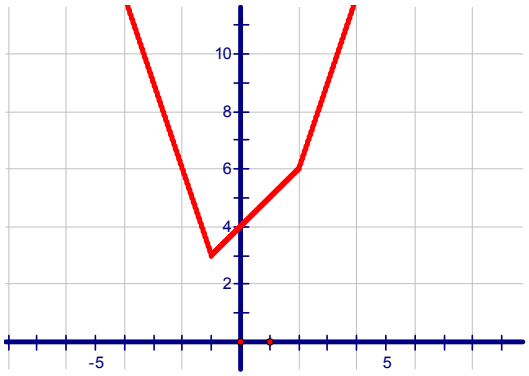
Решење: Под C.



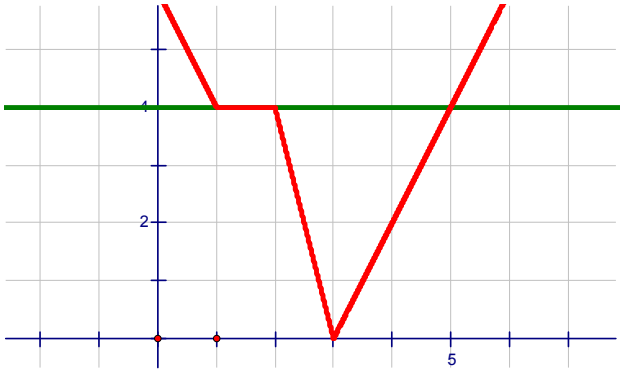
Задатак 14. Колико решења има једначина $2\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{4-4x+x^2}=2016$.

A) 0 B) 1 C) 2016 D) 4 E) 2

Решење: Под E.



Задатак 15. Решити једначину $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.



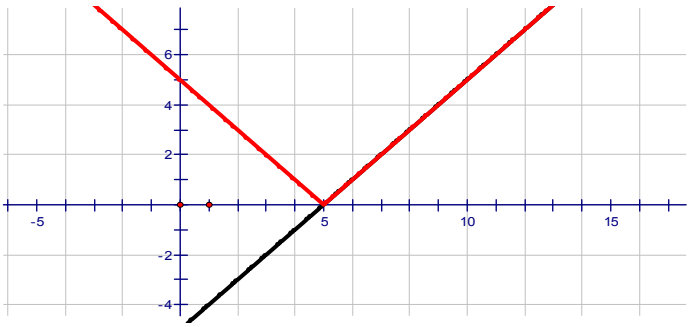
Решење: $1 \le x \le 2 \vee x = 5$.

ЗАДАЦИ СА АПСОЛУТНИМ ВРЕДНОСТИМА НА ПРИЈЕМНИМ ИСПИТИМА ЗА УПИС ФАКУЛТЕТА

Задатак 1. Једначина $\sqrt{x^2-10x+25}=x-5$:

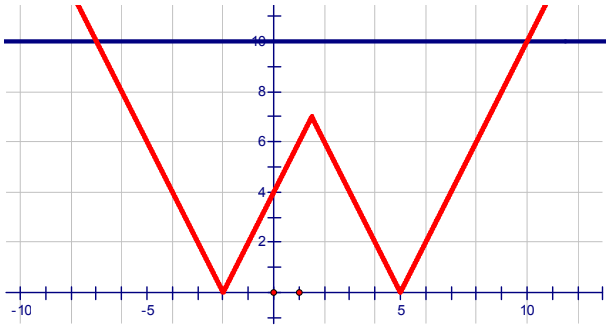
A) има више од три решења B) има тачно једно решење C) има тачно два решења
D) има тачно три решења E) нема решења

Решење: Дата једначина се своди на једначину $|x-5|=x-5$ а она се своди на цртање графика функција $y=|x-5|$ и $y=x-5$. Заједничко за ова два графика је $x\in[5,\infty)$ па је решење под А.



Задатак 2. Сва решења једначине $||2x-3|-7|=10$ припадају скупу:

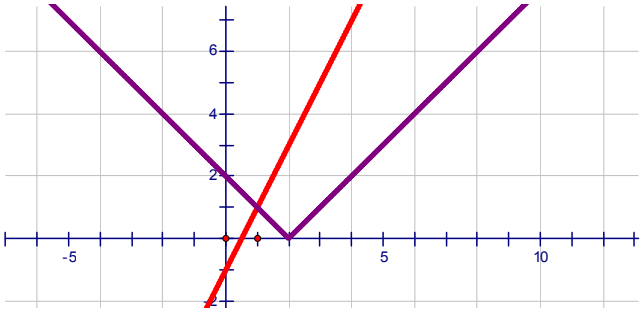
A) $\{10,20,30\}$ B) $\{-7,10,20\}$ C) $\{-7,20,30\}$ D) $\{10,12,14,20\}$ E) $\{-7,7\}$



Решење: B.

Задатак 3. Збир решења једначине $\sqrt{x^2-4x+4}=2x-1$ једнак је:

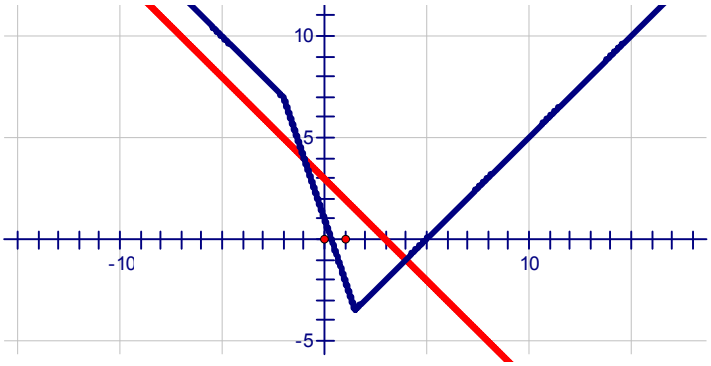
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2



Решење: D.

Задатак 4. Број решења једначине $|2x-3|-|x+2|=3-x$ је:

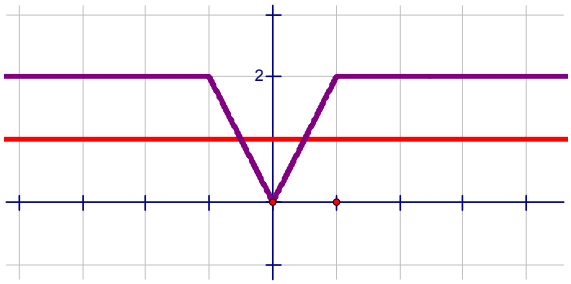
A) 1 B) 2 C) 3 D) ∞ E) 0



Решење: B.

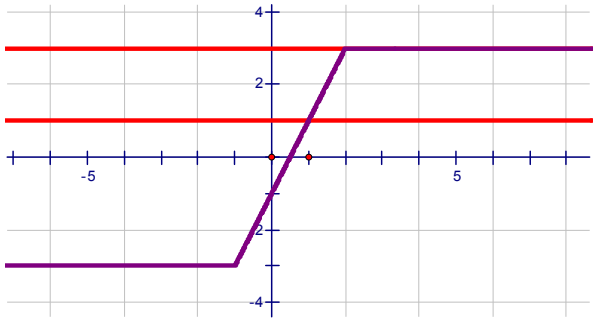
Задатак 5. Скуп реалних решења неједначине $\big||x+1|-|x-1|\big|<1$ је:

A) $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ *B)* $\left(\frac{1}{2},2\right)$ *C)* $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *D)* $(-2,1)$ *E)* $(1,2)$



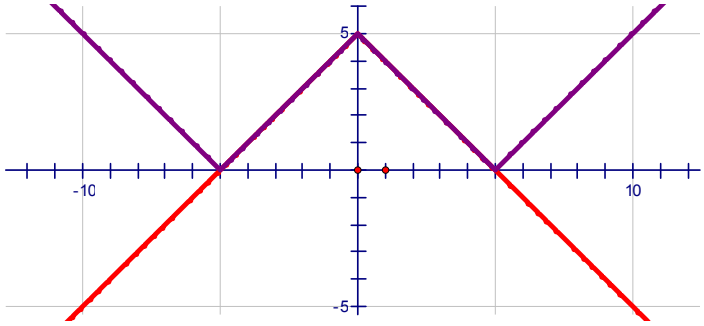
Решење: C.

Задатак 6. Решити неједначину: $1<|x+1|-|x-2|<3$.



Решење: $x\in(1,2)$

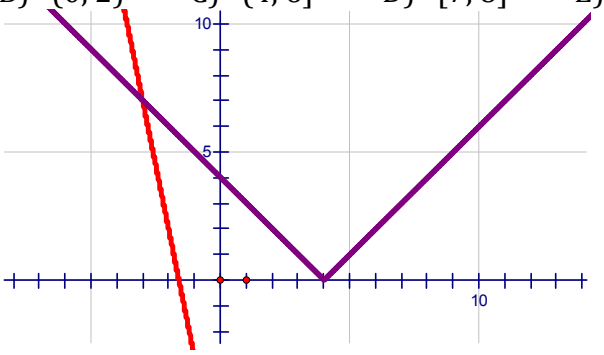
Задатак 7. Збир свих целобројних вредности x таквих да важи једнакост $\big|5-|x|\big|=5-|x|$ је: A) 12 B) 10 C) 5 D) 2 E) 0



Решење: E.

Задатак 8. Ако је $|x-4|+5x=-8$, $x \in R$, тада $|x|$ припада интервалу:

A) [2, 4} B) (0, 2) C) (4, 6] D) [7, 8] E) (8, 10];

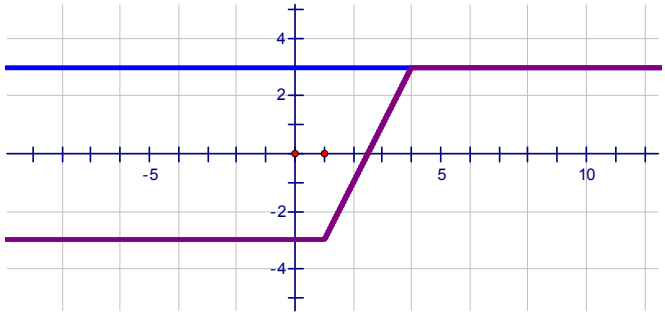


Решење: А.

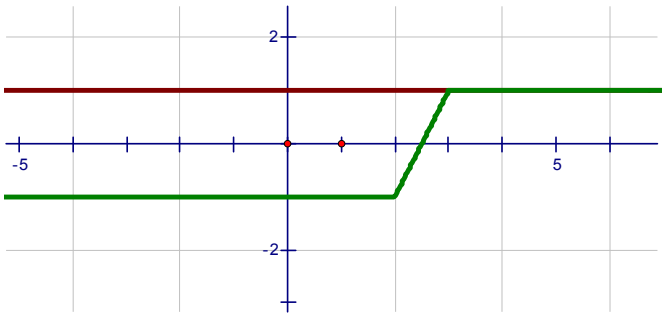
Задатак 9. Решити систем једначина: $|x-1|-|x-4|=3 \wedge |x-2|-|x-3|=1$.

Решење:

Ако нацртамо одговарајуће графике видимо да је решење прве једначине $x \in [4,\infty)$

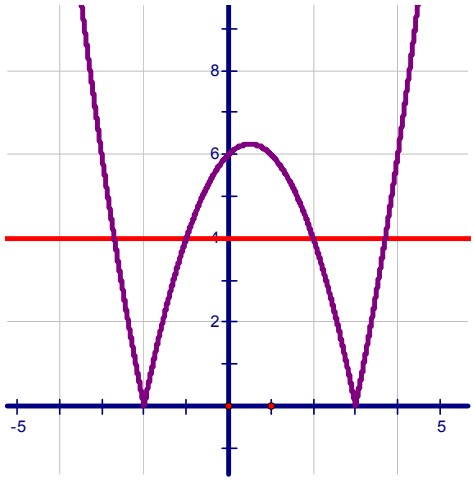


Решење друге једначине $x \in [3,\infty)$.



Дакле решење система је $x \in [4,\infty)$.

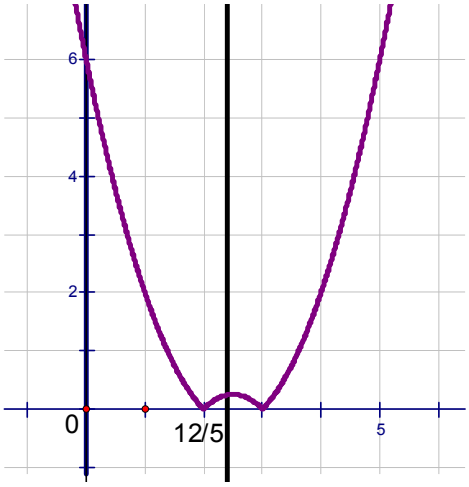
Задатак 10. Наћи најмању и највећу вредност функције $f(x)=|x^2-5x+6|$ на сегменту $\left[0,\frac{12}{5}\right]$.



Решење:
Ако нацртамо графике функција:
$f(x)=|x^2-5x+6|$,
$x=0$ и
$x=\frac{12}{5}$
видимо да је најмања вредност функције 0, а највећа 6.

Задатак 11. Решење неједначине $\left|x^2-x-6\right|>4$ је:

$A)\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{41}}{2}\right)\cup(-1,2)\cup\left(\frac{1+\sqrt{41}}{2},\infty\right)$ $B)(-2,3)$ $C)(-\infty,\infty)$ $D)(-1,2)$ $E)(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$

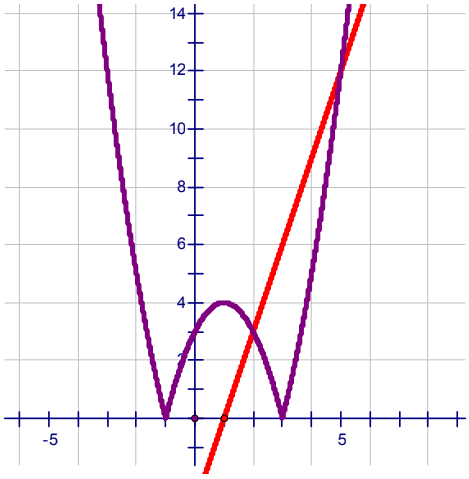


Решење: A.

Задатак 12. Решити неједначину:

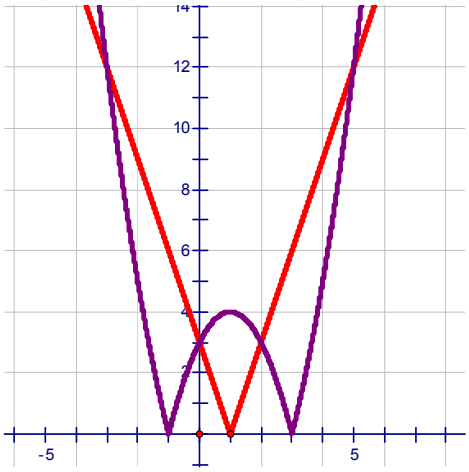
$\left|x^2-2x-3\right|<3x-3$.

Решење: $x\in(2,5)$



Задатак 13. Скуп свих решења неједначине $\left|x^2-2x-3\right|<\left|3x-3\right|$ је:

$A)(-3,5)$ $B)(-3,-1)\cup(1,4)$ $C)(-3,-2]\cup[3,5)$ $D)(-3,0)\cup(2,5)$ $E)(-\infty,0)\cup(2,\infty)$



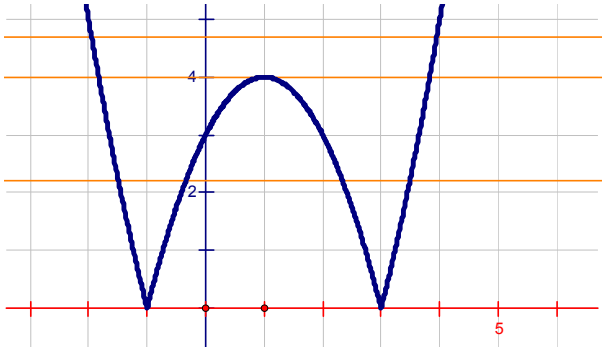
Решење: D.

Задатак 14. Једначина $\left|x^2-2x-3\right|=a,\ a\in R,$ има максималан број различитих реалних решења ако и само ако вредности реалног параметра a припадају:

$$A)\ (-\infty,-4]\quad B)\ (-4,0)\quad C)\ (-\infty,\infty)\quad D)\ (0,4)\quad E)\ [4,\infty)$$

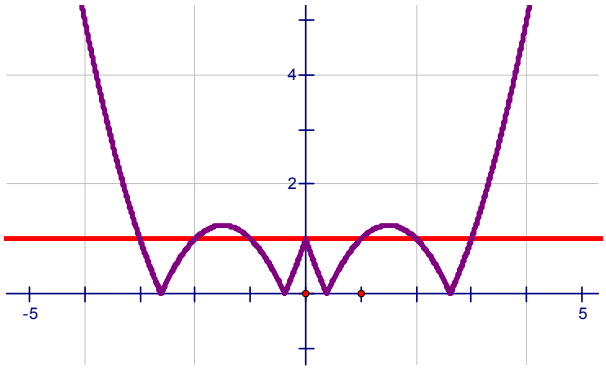
Решење:

Број решења једначине $\left|x^2-2x-3\right|=a,$ је једнак броју пресечних тачака графика функције $y=\left|x^2-2x-3\right|$ и $y=a$. Број пресечних тачака је максималан ако исамо ако $a\in(0,4)$. Тачан одговор је D.



Задатак 15. Решити једначину: $\left|x^2-3|x|+1\right|=1$.

Решење: $x\in\{-3,-2,-1,0,+1,+2,+3\}$



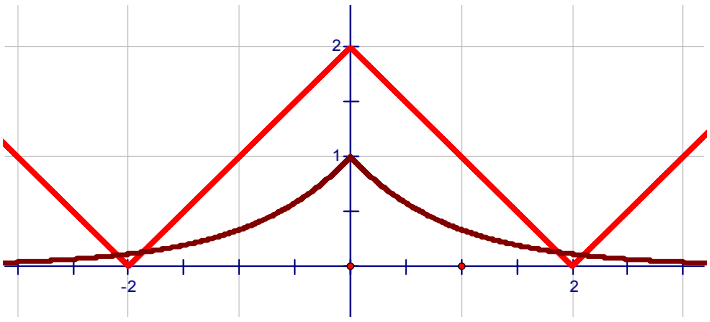
Задатак 16. Број решења једначине $3^{|x|}\cdot\left|2-|x|\right|=1$ је:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решење:

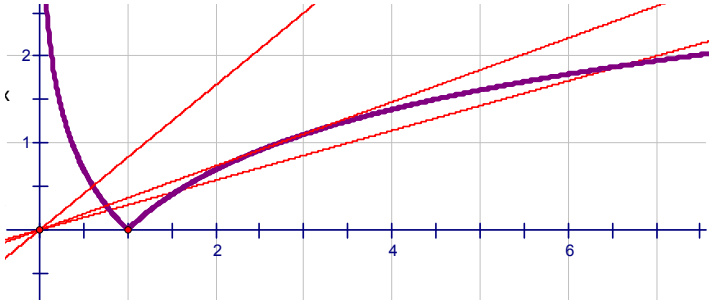
Ако нацртамо графике функција $y=\dfrac{1}{3^{|x|}}=3^{-|x|}$ и $y=\left|2-|x|\right|$ видимо да имају 4 пресечне тачке.

Тачан одговор је E.



Задатак 17. Једначина $|\ln x| - ax = 0, a \in R,$ има три различита реална решења ако и само ако вредности реалног параметра a припадају:

$$A)\ (-\infty,0)\quad B)\ (0,1)\quad C)\ \left(0,\frac{1}{e}\right)\quad D)\ \left(\frac{1}{e},e\right)\quad E)\ (e,\infty)$$

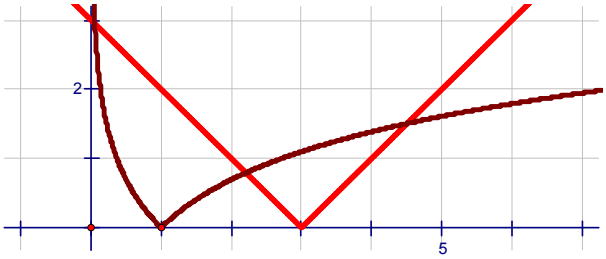


Решење:

Цртањем графика функција $y = |\ln x|$ и $y = ax$ и одбацивањем одговора под B добијамо решење под C.

Задатак 18. Број решења једначине $|\ln x| = |x-3|$ је:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4



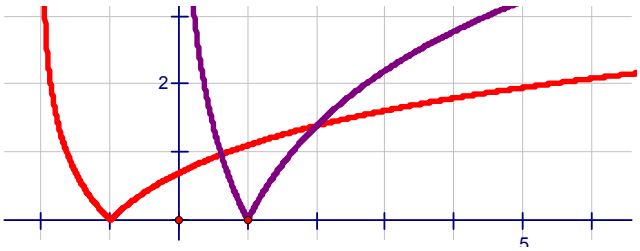
Решење: D.

Задатак 19. Број решења једначине $2|\ln x| = |\ln(x+2)|$ је:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решење:

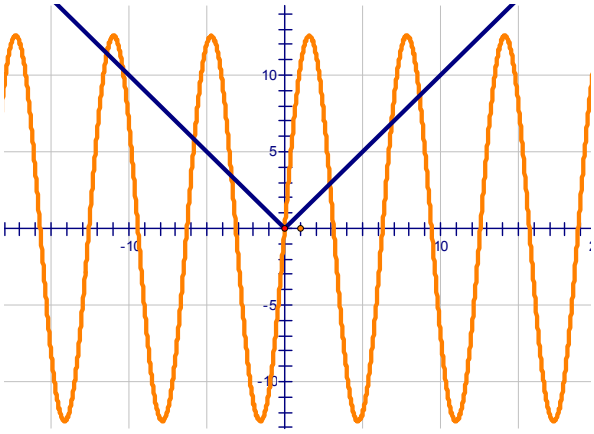
Графици функција $y = 2|\ln x|$ и $y = |\ln(x+2)|$ се секу у две тачке.



Дакле одговор је под C.

Задатак 20. Једначина $|x| = 4\pi \sin x$ има:

A) тачно 1 решење B) тачно 3 решења C) тачно 4 решења
D) тачно 8 решења E) више од 8 решења

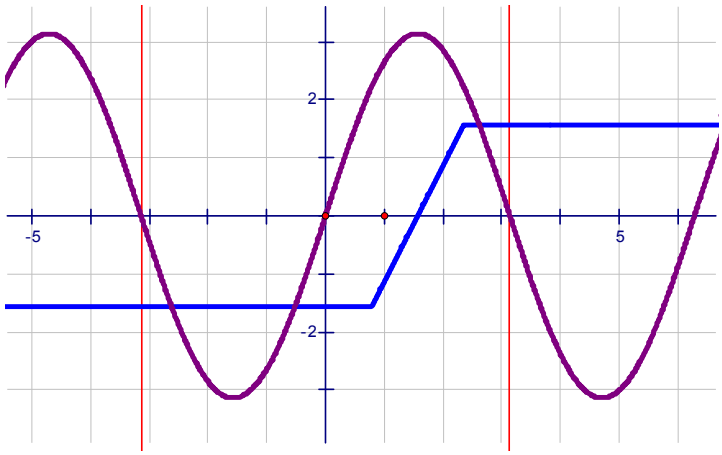


Решење: D.

Задатак 21. Број оних решења једначине $\pi \sin x = \left|x - \frac{\pi}{4}\right| - \left|x - \frac{3\pi}{4}\right|$,

која припадају интервалу $(-\pi, \pi)$, једнак је:

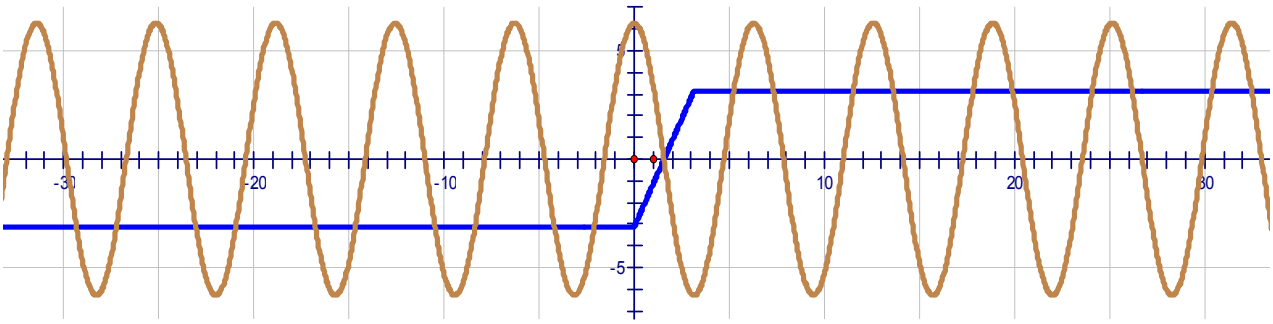
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4;



Решење: D.

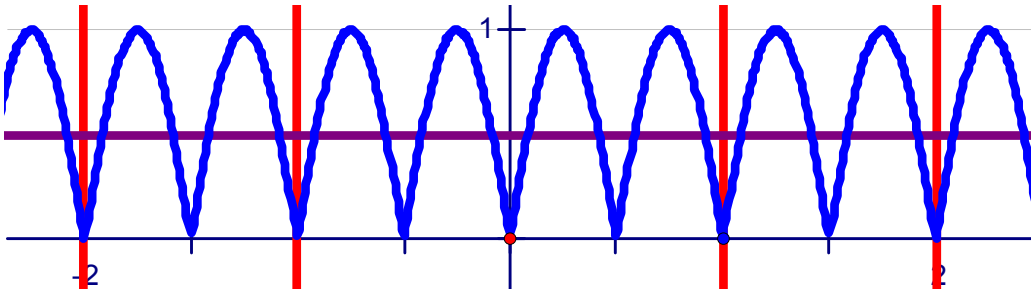
Задатак 22. Колико решења има једначина $2\pi\cos x = |x| - |x-\pi|$:

A) ∞ B) 0 C) 2 D) 3 E) 4



Решење: A.

Задатак 23. Број решења једначине $\sqrt{4x^2-4}\cdot|\sin 2\pi x| = \sqrt{x^2-1}$, који задовољавају услов $|x| \le 2$ је: A) 6 B) 8 C) 10 D) 16 E) 18



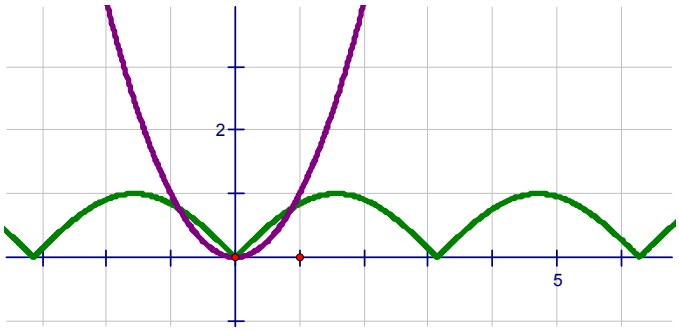
Решење:

Једначина постији када је $x^2-1 \ge 0$ тј. $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. Решења су ± 1 а остала се добијају као пресек функција $y = \frac{1}{2}$ и $y = |\sin 2\pi x|$ у интервалу од $[-2,1) \cup (1,2]$.

Дакле решење је под C.

Задатак 24. Број решења једначине $x^2 - |\sin x| = 0$ је:

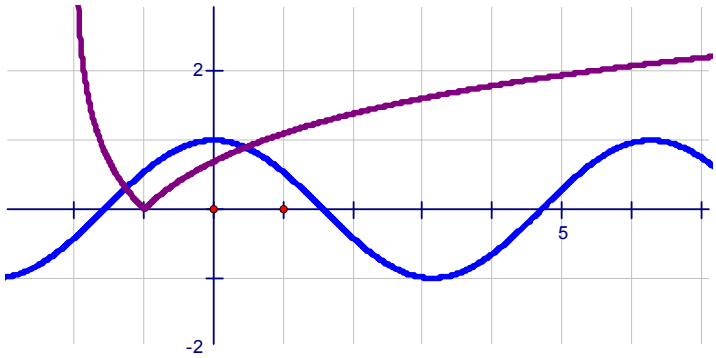
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) више од 3



Решење: D.

Задатак 25. Број решења једначине $|\ln(x+2)| = \cos x$ је:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) више од 3

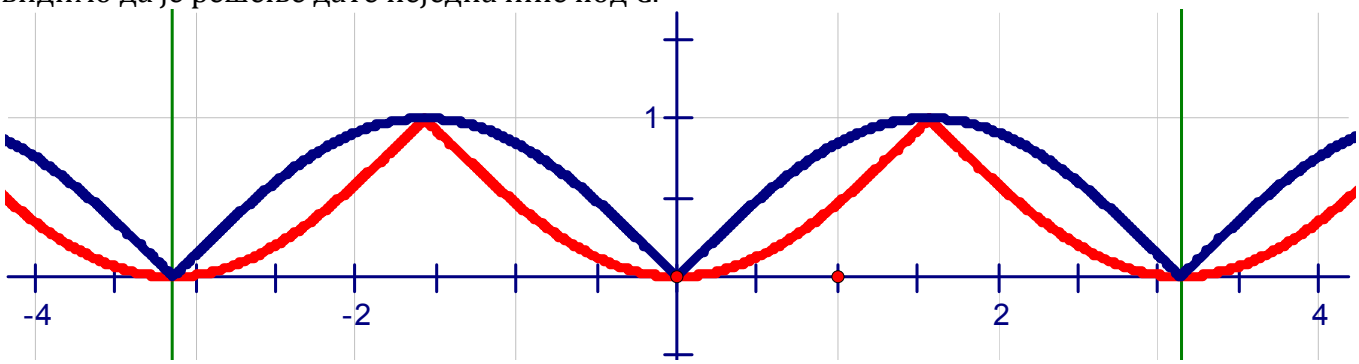


Решење: C.

Задатак 26. Број решења неједначине $|\sin x| + |\cos x| \le 1$, која припадају сегменту $[-\pi, \pi]$ је:

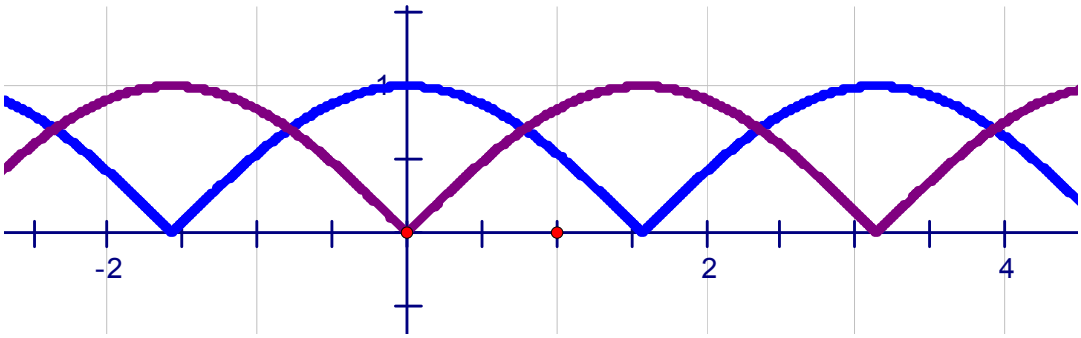
A) 0 B) 3 C) 5 D) 7 E) више од 7

Решење: Ако нацртамо графике функција $y = |\sin x|$ и $y = 1 - |\cos x|$ на сегменту $[-\pi, \pi]$ видимо да је решење дате неједначине под C.



Задатак 27. Решити неједначину: $10^{|\sin x|} > 10^{|\cos x|}$.

Решење: Задатак се своди на решавање неједначине $|\sin x| > |\cos x|$. Са графика функције $y = |\sin x|$ и $y = |\cos x|$ видимо да је решење дате неједначине $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

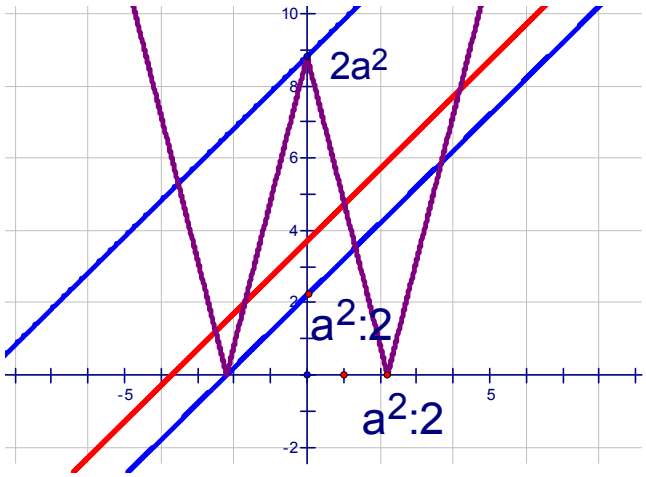


Задатак 28. Једначина $x-a=2\left|2\sqrt{x^2}-a^2\right|$ има максималан број решења ако је:

$A)\ |a|\le 1 \qquad B)\ 0<a<1 \vee a>2 \qquad C)\ -2<a<0 \qquad D)\ a\le -2 \vee a\ge -\frac{1}{2} \qquad E)\ -2<a<-\frac{1}{2}$

Решење: Прво нацртамо график функције $y=2\left|2|x|-a^2\right|$. Ако хоћемо да права $y=x-a$ и функција $y=2\left|2|x|-a^2\right|$ имају максималан број пресечних тачака онда мора бити испуњен услов $x+\frac{a^2}{2}<x-a<x+2a^2$. Решавањем овог система добијамо да $a\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.

Решење под Е.



Задатак 29. У зависности од реалног параметра a одредити колико решења има систем :

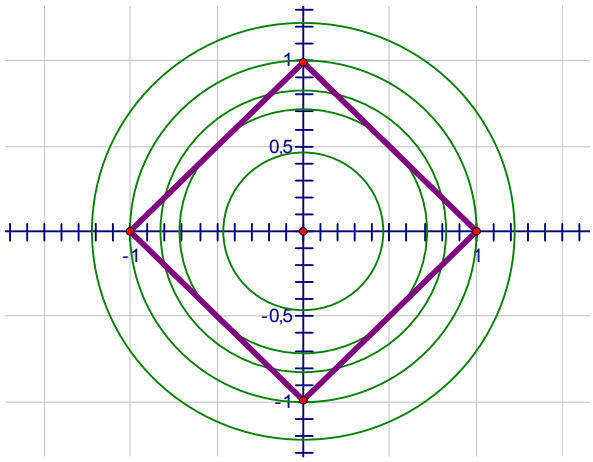
$$|x|+|y|=1 \wedge x^2+y^2=a^2.$$

Решење:

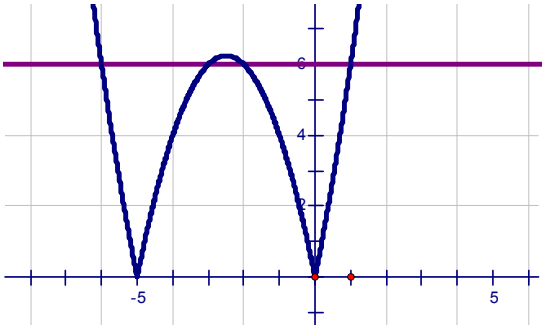
0 ако је $|a|<\frac{\sqrt{2}}{2} \vee |a|>1$;

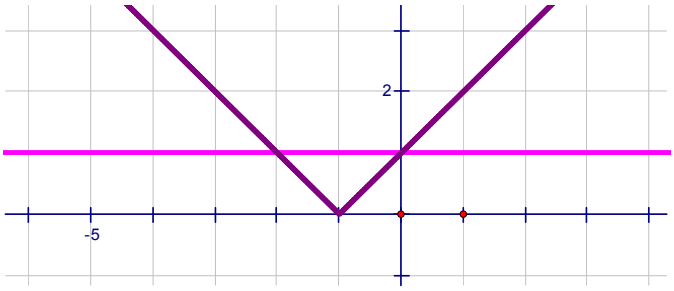
4 ако је $|a|=\frac{\sqrt{2}}{2} \vee |a|=1$;

8 ако је $\frac{\sqrt{2}}{2}<|a|<1$.



Задатак 30. Решити систем неједначина: $\left|x^2+5x\right|<6 \wedge |x+1|\le 1$.

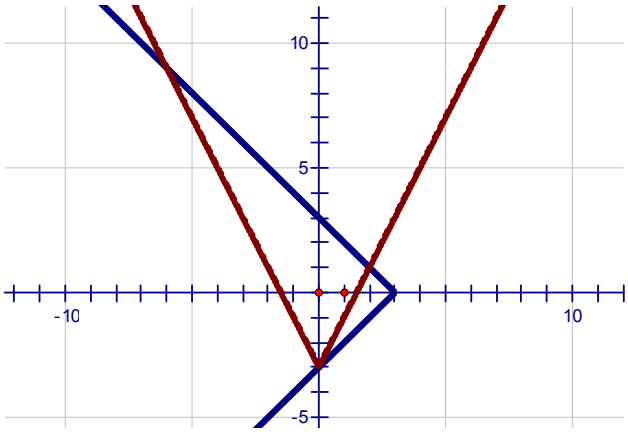




Решење: $(x\in(-6,-3)\cup(-2,1) \wedge x\in[-2,0]) \Leftrightarrow x\in(-2,0]$

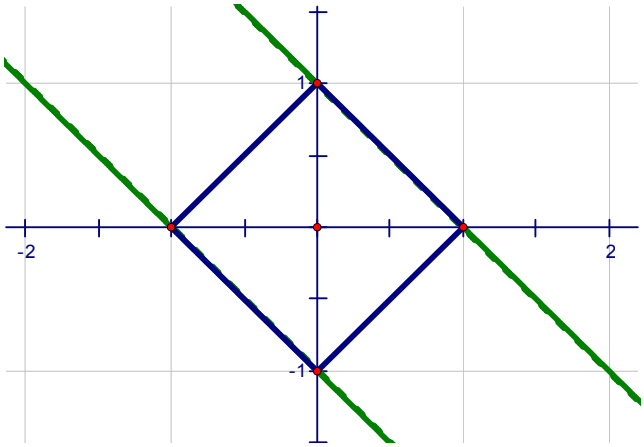
Задатак 31. Колико решења има систем једначина $y = 2|x| - 3 \wedge |y| + x = 3$:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



Решење: Под C.

Задатак 32. Решити систем једначина: $|x + y| = 1 \wedge |x| + |y| = 1$.



Решење: $\{(c,\ 1-c)\}$ ако је $0 \le c \le 1$, $\{(c,\ -1-c)\}$ ако је $-1 \le c \le 0$.

<u>Завршне напомене:</u>

- Предавање на зимском семинару ће бити допуњено детаљним решењима или упутствима за решавање свих задатака, од којих су многи у сличној или истој форми били у многим збиркама или математичком листу, а један број је и потпуно оригиналних.
- Списак задатака ће бити проширен, тако да ће штампани материјал за све полазнике зимског семинара бити богатији.

Контакт: dragoljub64@gmail.com, milosavmilenkovic1@gmail.com