# PROBLEMI NASTAVE TRIGONOMETRIJE

Djordje Dugošija

## 1. TEKUĆE STANJE: masovno neznanje

## 2. UZROCI:

- komplikovano uvodjenje
- razvučeno dugotrajno izlaganje,
- mnoštvo formula koje treba pamtiti,
- nepovezano sa drugim predmetima
- zakasnelo uvodjenje

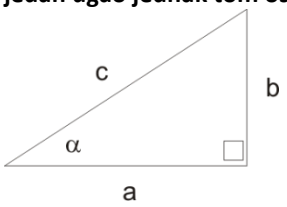
## 3. KADA i KAKO TREBA POČETI SA TRIGONOMETRIJOM ?

### OSNOVNA ŠKOLA:

Mnogi počinju u OŠ. Kod nas ne. **Elemente trigonometrije treba uključiti u program** OŠ.
Ispravno jer će mnogima ovo biti kraj matematičkog obrazovanja, pa je neophodno da imaju pojam šta su sinus i kosinus najmanje od oštrih uglova.

## 4. OSNOVNE TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE OŠTRIH UGLOVA

**sinus i kosinus oštrog ugla definisani su kao odnosi dužina kateta i hipotenuze kod pravouglog trougla kome je jedan ugao jednak tom oštrom uglu:**




$$\cos\alpha = \frac{a}{c}, \sin\alpha = \frac{b}{c}, \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

Za dokaz korektnosti definicije koristi se sličnost trouglova i proporcionalnost veličina.
Može se dodefinisati

$$\cos 0^0 = 1, \sin 0^0 = 0, \tan 0^0 = 0,\ \cos 90^9 = 0, \sin 90^0 = 1, \tan 90^0\ nije\ definisan$$

Ovo nije dovoljno da bi se radile osnovne stvari. N**astava fizike zahteva više**.
Fizika barata sa **konveksnim** uglovima (ugao izmedju vektora je takav). Za fiziku je potrebno **izračunavanje elemenata trougla** (operacije sa vektorima, izračunavanje rezultante sila, rada,...). Za to najmanje treba trigonometrija **konveksnih** uglova.

## 5. OSNOVNE TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE KONVEKSNIH UGLOVA

Kako proširiti definicije na ovaj slučaj?

Odgovor: za $90^\circ < \alpha \le 180^\circ$,

$$\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha), \sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha), \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

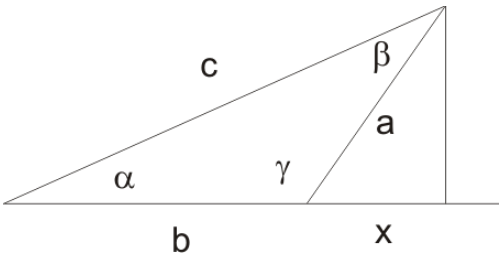
**Opisno: Kosinusi suplementnih uglova su suprotni brojevi a sinusi jednaki.**
Sada se može dokazati

## 6. TRIGONOMETRIJA TROUGLA

**Teorema: Ako je $\gamma$ konveksan ugao i $ABC$ bilo koji trougao sa $\angle C = \gamma$ tada je**

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c)}}{2ab}.$$

Dokaz (za slučaj kada je $\gamma$ tup ugao):




$$c^2 = (b + a\cos(180^0-\gamma))^2 + (a\sin(180^0-\gamma))^2$$

Ove veze potpuno odredjuje kosinus i sinus konveksnog ugla , a sadrže sve ostale metričke odnose u trouglu (kosinusnu i sinusnu teoremu za trougao , Heronov obrazac, ...)

**Primer.** Površina trougla je $P = \frac{bh}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

Otuda sledi

**Sinusna teorema:** $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

**Teoreme o projekcijama:** $c = a\cos\beta + b\cos\alpha, b = a\cos\gamma + c\cos\alpha, a = b\cos\gamma + c\cos\beta$.

Dokaz: Zameni u desnoj strani $\cos\beta$ i $\cos\alpha$ preko stranica, pa sredi, ili geometrijski ucrtavanjem visine $h_c$.

Napomena: Sinusna, kosinusna i teoreme o projekcijama su ekvivalentni iskazi.

Dokaz: kosinusna $\Rightarrow$ sinusna $\Rightarrow$ t.o projekcijama $\Rightarrow$ kosinusna

kosinusna $\Rightarrow$ sinusna:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c)}}{2ab}$$

$\Rightarrow$ sinusna

sinusna $\Rightarrow$ t.o projekcijama:

$$a\cos\beta + b\cos\alpha = c(\frac{a}{c}\cos\beta + \frac{b}{c}\cos\alpha) = c\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma} = c$$

t. o projekcijama $\Rightarrow$ kosinusna:

Iz tri relacije o projekcijama može se izvesti kosinusna teorema rešavanjem sistema po kosinusima.

## 7. OSNOVNE TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE NEKONVEKSNIH UGLOVA

**Definicija kosinusa i sinusa nekonveksnih uglova:**

za $180^0 < \alpha \le 360^0$, $\cos\alpha = \cos(360^0-\alpha), \sin\alpha = -\sin(360^0-\alpha)$.

**Opisno: Kosinusi uglova koji se dopunjuju do punog ugla su jednaki a sinusi suprotni.**

Sada se mogu dokazati sve poznate veze. Među njima najznačajnije veze su

### Adicione formule:

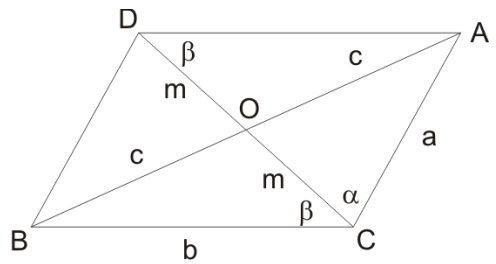
**Neka su $\alpha, \beta$ uglovi i $\alpha+\beta$ ugao. Važi:**

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

**Dokaz. 1. Slučaj kada je $\alpha+\beta$ konveksan ugao:**

Tada postoji paralelogram $ACBD$ sa uglom $\angle C=\alpha+\beta$ takav da je $\alpha=\angle ACD, \beta=\angle BCD$ . Neka je $O$ njegov centar i $|CO|=m$ .




Prema teoremi o projekcijama je

$$2m=a\cos\alpha+b\cos\beta \qquad (1)$$

Iz sinusne teoreme primenjene na trougao $ACD$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Kad (1) i (2) zamenimo u vezu $P(ABC)=2P(AOC)$ dobijamo

$$ab\sin(\alpha+\beta)=2am\sin\alpha$$

$$b\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha(a\cos\alpha+b\cos\beta)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=(\frac{a}{b}\cos\alpha+\cos\beta)\sin\alpha=(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cos\alpha+\cos\beta)\sin\alpha=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$$

Iz kosinusne teoreme slede veze

$$(2c)^2=a^2+b^2-2ab\cos(\alpha+\beta), c^2=a^2+m^2-2ma\cos\alpha$$

pa je

$$a^2+b^2-2ab\cos(\alpha+\beta)=4[a^2+(\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta}{2})^2-a\cos\alpha(a\cos\alpha+b\cos\beta)] \qquad (3)$$

Iz (2) i (3) sredjivanjem dobijamo adicionu formulu za kosinus.

**2. Slučaj kada je $\alpha+\beta$ nekonveksan ugao:**

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(360^0-(\alpha+\beta))=\cos((180^0-\alpha)+(180^0-\beta))=$$

$$\cos(180^0-\alpha)\cos(180^0-\beta)-\sin(180^0-\alpha)\sin(180^0-\beta)=$$

$$(-\cos\alpha)(-\cos\beta)-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Slično ide i za sinusnu adicionu teoremu.

Iz adicionih teorema slede sve ostale veze izmedju trigonometrijskih funkcija uglova koje se mogu izvoditi **kao zadaci za vežbu.**

Primer 1. Dokazati formule za razliku uglova:

**sa sinus:** $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

**za kosinus:** $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

**Dokaz.** Neka je $\gamma=\alpha-\beta$ . Tada je $\alpha=\beta+\gamma$ pa je

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma$$

$$\sin\alpha=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma$$

Množenjem strana prve jednakosti sa $\cos\beta$ i druge sa $\sin\beta$ i sabiranjem po stranama dobijamo

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=(\cos^2\beta+\sin^2\beta)\cos\gamma=\cos\gamma$ , Q.E.D.

Slično ide i za sinus.

## 8. Šta bi trebalo raditi u OŠ ?

Merenje uglova stepenima,
izračunavanje elemenata trougla,
Upotreba tablica ili kompjutera
Korist od trigonometrije (izračunavanje širine reke , visine objekatai sl.)

## 9. KAKO NASTAVITI U SREDNJOJ ŠKOLI?

**Primetimo da zbir dva ugla ne mora uvek biti ugao!**
**Tzv. generalisani uglovi veći od punog ugla ne postoje!**

## 10.TRIGONOMETRIJA BROJEVA (BEZ ORIJENTISANIH PUTANJA)

Uočiti da se uglovi mogu meriti **dužinom upisanih jediničnih** LUKOVA .
Dva ugla su jednaka akko su jednake dužine njima upisanih jediničnih lukova.
slika

**1.Kosinus i sinus broja** $s \in [0, 2\pi)$

Za dati broj $s \in [0, 2\pi)$ odredimo ugao $\alpha$ čiji upisani jedinični luk ima dužinu $s$. Definišemo $\cos s = \cos\alpha, \sin s = \sin\alpha$.

**2. Kosinus i sinus realnog broja**

Проширимо сада дефиницију косинуса и синуса на произвољне реалне бројеве :
Деоним тачкама $2m\pi, \mathrm{m} \in \mathrm{Z}$ реална оса се разлаже на интевале дужина $2\pi$ и сваки реалан број $s$ припада тачно једном интервалу $[2m\pi, 2m\pi + 2\pi), m \in Z$. Другим речима,
**за свако** $s \in R$ **постоји тачно један** $m \in Z$ **i jedno** $a$ **такав да је** $s = 2m\pi + a, a \in [0, 2\pi)$
.
где је $\lfloor x \rfloor$ ***цео део броја*** $x$ **,** тј. ***највећи цео број који није већи од броја*** $x$ .
**Дефинишимо**
$\cos s = \cos a, \sin s = \sin a$ .

Приметимо да је

$$m = \left\lfloor \frac{s}{2\pi} \right\rfloor, a = s - \left\lfloor \frac{s}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi ,$$

i da za funkciju $\lfloor x \rfloor$ važi

$$\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1, x > 0$$
$$\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k, x \in R, k \in Z$$
.

Zato je na primer :

$$\cos 12 = \cos(12 - \left\lfloor \frac{12}{2\pi} \right\rfloor 2\pi) = \cos(12 - 2\pi)$$

$$\sin 100 = \sin(100 - \left\lfloor \frac{100}{2\pi} \right\rfloor 2\pi) = \sin(100 - 30\pi)$$

$$\sin(-\frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{4} - \left\lfloor \frac{-\pi/4}{2\pi} \right\rfloor 2\pi) = \sin(-\frac{\pi}{4} - \left\lfloor -\frac{1}{8} \right\rfloor 2\pi) = \sin(-\frac{\pi}{4} + 2\pi) = \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(-s)=\sin(-s-\left\lfloor\frac{-s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi)=\sin(-s-(-\left\lfloor\frac{s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi-2\pi))=\sin(2\pi-(\mathrm{s}-\left\lfloor\frac{s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi))$$

$$=-\sin(s-\left\lfloor\frac{s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi)=-\sin s$$

$$\cos(-s)=\cos(-s-\left\lfloor\frac{-s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi)=\cos(-s-(-\left\lfloor\frac{s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi-2\pi))=\cos(2\pi-(\mathrm{s}-\left\lfloor\frac{s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi))$$

$$=\cos(s-\left\lfloor\frac{s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi)=\cos s$$

Dakle
**Sinus je neparna a kosinus parna funkcija na *R*.**

За $\kappa\in Z,\cos(s+2k\pi)=\cos(s+2k\pi-\left\lfloor\frac{s+2k\pi}{2\pi}\right\rfloor 2\pi)=\cos(s+2k\pi-\left\lfloor k+\frac{s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi=$

$$\cos(s+2k\pi-2k\pi-\left\lfloor\frac{s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi)=\cos(s-\left\lfloor\frac{s}{2\pi}\right\rfloor 2\pi)=\cos s$$

***Функција*** $f:D\to R, D\subseteq R$ ***је периодична ако постоји*** $T\neq 0$ ***такво да***
$\forall x\in D \quad \mathrm{x}+T\in D\wedge x-T\in D\wedge f(x+T)=f(x-T)=f(x)$**.**
***Број T се назива периода функције. Најмања позитивна периода функције (ако постоји) назива се основна период***a.

Dakle, dokazano je: **kosinus i sinus su periodične funkcije.**

***Основна периода косинуса и синуса је*** $2\pi$ **.**

Нека је $T$ било која периода синуса. Докажимо да $T\notin(0,2\pi)$. Претпоставимо супротно. Из $\sin T=\sin(T+0)=\sin 0=0$ следи $\cos T\in\{1,-1\}$, па је једино могуће да је $T=\pi$. Али тада би било $\sin(\frac{3\pi}{2})=\sin(T+\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$. Контрадикција!
Тврдња за косинус се доказује на сличан начин.

***За произвољне реалне бројеве*** $s$ ***и*** $t$ ***вреде адиционе формуле***
$\cos(s+t)=\cos s\cos t-\sin s\sin t$
$\sin(s+t)=\sin s\cos t+\cos s\sin t$

***Доказ.*** Нека је $s=2k\pi+a, a\in[0,2\pi), k\in Z \quad и \quad -t=2l\pi+b, b\in[0,2\pi), l\in Z$. Тада је $\cos(s+t)=\cos(s-(-t))=\cos(a-b)$.

Како је косинус парна функција, не умањујући општост, можемо претпоставити да је $a\geq b$. Како је $0\leq a-b<2\pi$, koristeći adicionu teoremu za razliku uglova koji odgovaraju lucima dužina $a$ i $b$ kao i parnost kosinusa i neparnost sinusa, dobijamo
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b=\cos s\cos(-t)+\sin s\sin(-t)=\cos s\cos t-\sin s\sin t$.
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b=\sin s\cos(-t)-\cos s\sin(-t)=\sin s\cos t+\cos s\sin t$

## 11. TRIGONOMETRIJA PREKO ORIJENTISANIH UGLOVA I PUTANJA PO JEDINIČNOM KRUGU

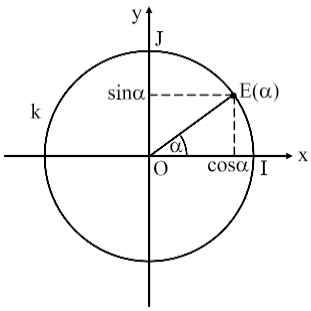
Kod orijentisanih uglova (kod kojih razlikujemo početni i završni krak) upisani jedinični luci su na prirodan način orijentisani.

Dva orijentisana ugla su jednaka akko su jednaki njima upisani jedinični orijentisani luci a oni su jednaki akko postoji kretanje (translacija i rotacija) u ravni kojim se jedan dovodi do poklapanja s drugim po dužini i po smeru.

### 1. *Kosinus i sinus orijentisanog ugla*

Postavimo u ravni koordinatni sistem. Time je izabrana orijentacija (lice i naličje) ravni. Premestimo kretanjem u ravni orijentisani luk jedinične kružnice tako da mu početna tačka padne u tačku $I(1,0)$. Ako se smer dobijenog orijentisanog luka poklapa sa smerom luka od tačke $I$ do tačke $J(0,1)$ po najkraćem putu po jediničnoj kružnici, reći ćemo da je luk **pozitivno orijentisan**, u suprotnom **negativno orijentisan.**
Primetite: sat se ne spominje!
Neka je $E(\alpha)$ krajnja tačka dobijenog orijentisanog luka.

Koordinate tačke $E(\alpha)$ nazivaju se
***kosinus i sinus orijentisanog ugla*** $\alpha$. $E(\alpha)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$.




**Neorijentisani ugao je po dogovoru jednak pozitivno orijentisanom uglu iste veličine.**

### 2. Kosinus i sinus broja $s\in(-2\pi,2\pi)$

Svaki orijentisani luk jedinične kružnice se opisuje dužinom sa predznakom plus za pozitivno odnosno minus za negativno orijentisane lukove, odnosno realnim brojem $s$ iz intervala $(-2\pi,2\pi)$. Važi i obratno svakom ovakvom broju odgovara jedan jedini orijentisani luk jedinične kružnice kao i pripadni orijentisani ugao $\alpha$. Definišemo $\cos s=\cos\alpha,\sin s=\sin\alpha$.

### 3. Kosinus i sinus realnog broja $s$

Slično vektorima (orijentisanim dužima) orijentisani jedinični luci se mogu **sabirati nadovezivanjem**. Rezultat nadovezivanja je **orijentisana putanja** po jediničnoj kružnici **proizvoljne dužine i predznaka pa joj odgovara realan broj $s$ takav da je dužina putanje jednaka $|s|$ a smer joj odgovara znaku od $s$. Važi i obratno svakom realnom broju $s$ može se pridružiti orijentisana putanja po jediničnoj kružnici koja počinje u tački $I(1,0)$ i ima smer saglasan znaku od $s$.**

**Koordinate krajnje tačke te putanje su kosinus i sinus broja $s$.**

Opisno: Realnu pravu zalepljenu koordinatnim početkom na tačku I(1,0) jedinične kružnice k(O,1) obmotavamo oko kružnice k(O,1) bez istezanja ili sabijanja. Pri tom realni broj $s$ pada u neku tačku $E(s)$ kružnice.
Odgovarajući orijentisani ugao je $\alpha = \angle IOE(s)$ a $\sin s = \sin\alpha$ , $\cos s = \cos\alpha$ .
Vidi se da su tačke $E(-s)$ i $E(s)$ simetrične prema x osi pa je
$\cos(-s) = \cos s, \sin(-s) = \sin s$ .
Vidi se i da je $E(2n\pi + s) = E(s), n \in Z, s \in R$ pa je
$\cos(2n\pi + s) = \cos s, \sin(2n\pi + s) = \sin s$ .

Komplikacije nastaju kad treba dokazati

adicione formule:

***Za proizvoljne realne brojeve*** $s$ ***i*** $t$ ***vredi***
$\cos(s+t) = \cos s\cos t - \sin s\sin t$ , $\sin(s+t) = \sin s\cos t + \cos s\sin t$

Ideja dokaza je jednakost orijentisanih lukova $\overset{\frown}{E(s)E(-t)}$ i $\overset{\frown}{E(s+t)E(0)}$ odakle sledi jednakost njihovih tetiva i odatle primenom formule za rastojanje tačaka u koordinatnoj ravni, adiciona teorema za kosinus.
Problem je što se ovo prvo lako ne vidi, ako se ne vidi opštije da je
$\overset{\frown}{E(s)E(-t)} = \overset{\frown}{E(s+u)E(-t+u)}, u \in R$ , a zatim uzme $u = t$ .Ustvari tačka $E(s+u)$ dobija se rotacijom tačke $E(s)$ za orijentisanu putanju koja odgovara broju $u$ .
Iz adicione teoreme za kosinus izvodi se adiciona teorema za sinus.
Veze:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

Ocene:

$$-1 \le \cos x \le 1, -1 \le \sin x \le 1, \mathrm{x} \in \mathrm{R}\, c$$

$$|\cos a - \cos b| \le d(E(a), E(b)) \le |a - b|$$

$$|\sin a - \sin b| \le d(E(a), E(b)) \le |a - b|, a,b \in [0, 2\pi)$$

$$\sin\frac{x_1 + x_2}{2} \ge \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} \quad x_1, x_2 \in [0, \pi]$$

$$\sin\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ge \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n}{n}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \pi]$$

## 12. Функције тангенс и котангенс

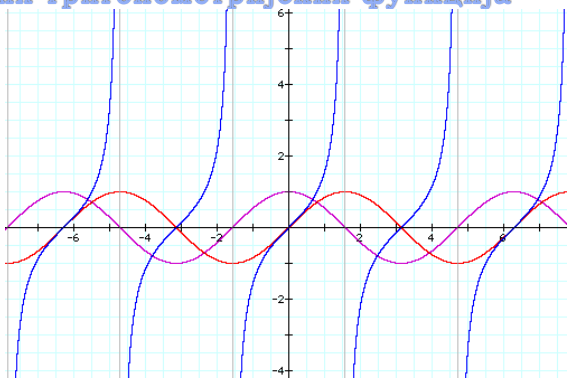
$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

***Тангенс и котангенс су непарне периодичне функције. Основни период тангенса и котангенса је*** $\pi$ **.**

***За тачке*** $s, t, s+t$ ***из домена вреде адиционе формуле***

$$tg(s+t) = \frac{tgs + tgt}{1 - tgs\ tgt}, ctg(s+t) = \frac{ctgs\ ctgt - 1}{ctgs + ctgt}.$$

## 13 . Графици основних тригонометријских функција




## 14. Инверзне тригонометријске функције

***Рестикција синуса на*** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ***пресликава овај интевал 1-1 на интервал*** $[-1,1]$***, те***

***има инверзну функцију аркуссинус,*** $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ***дефинисану са***

$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$ **.**

***Доказ.*** Због непарности синуса, довољно је доказати

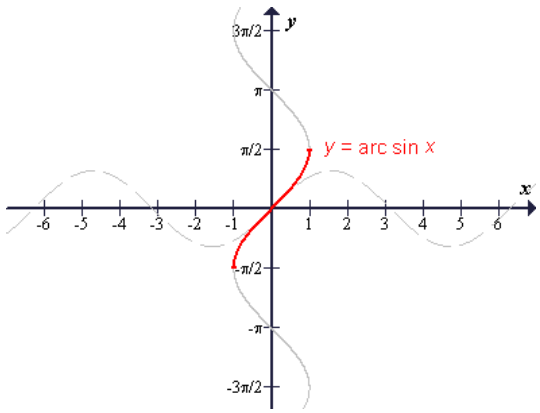
$$0 \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x_1 < \sin x_2,$$

и

$$\forall y \in [0,1] \exists! x \in [0, \frac{\pi}{2}]\ y = \sin x.$$

Како је $\sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2}$ и $0 < x_2 - x_1 \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$,

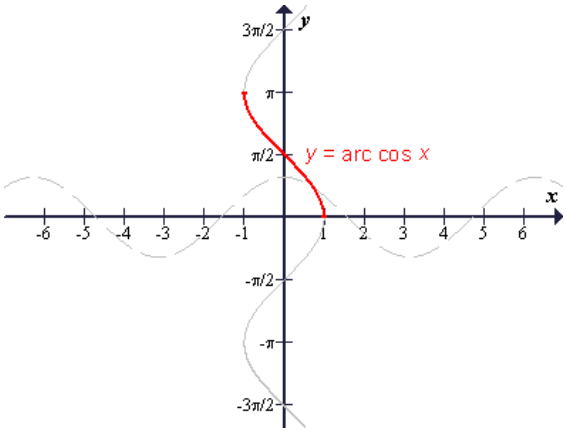
$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, прво је тачно. Друго следи из чињенице да права која садржи тачку $(0, y)$, $y \in [0,1]$ паралелна $x-$оси сече јединичну кружницу к(O,1) у јединственој тачки са ненегативном првом координатом.




***Рестрикција косинуса на*** $[0,\pi]$ ***пресликава овај интервал 1-1 на интервал*** $[-1,1]$***,***

***те има инверзну функцију аркускосинус,*** $\arccos:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ***дефинисану са***

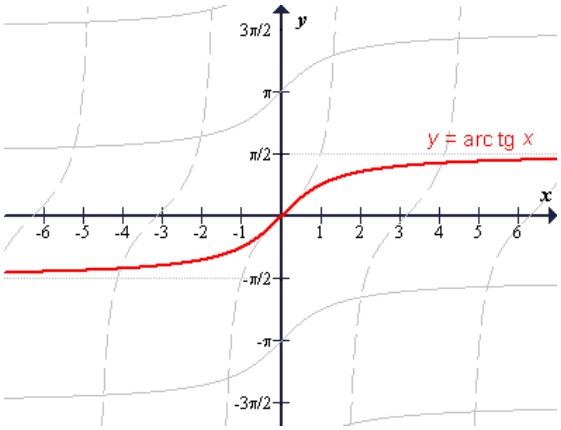
$y=\arccos x \Leftrightarrow \sin y = x$ **.**




***Рестрикција тангенса на интевал*** $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ***пресликава овај интервал 1-1 на*** $R$***,***

***те има инверзну функцију аркустангенс,***

$arctg: R\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ***, дефинисану са*** $y=arctgx \Leftrightarrow tgy=x$ .




## 15. Trigonometrijske jednačine i nejednačine

**Korišćenjem veza svode se na osnovne**

$$\cos x = (\le,\ge)a, \sin x = (\le,\ge)b, \tan x = (\le,\ge)c$$

**One se rešavaju prvo u osnovnom području (na trigonometrijskom krugu) a zatim se koristi periodičnost za nalaženje skupa svih rešenja.**

## 16. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ И ТРИГОНОМЕТРИЈА

Начин на који се kompleksni brojevi уводе у настави, када се основни имагинарни број $i$ дефинише као $\sqrt{-1}$ је **некоректан,** јер $\sqrt{-1}$ има две вредности $i$ и $-i$ !!!!

***Скуп уређених парова*** *(x, y)* ***реалних бројева, тј. скуп*** $\mathbb{R}^2$***, назива се скуп комплексних бројева и обележава се са*** $\mathbb{C}$***, кад су у њему дефинисане две операције – сабирање и множење на следећи начин:***

***За сваки пар комплексних бројева*** $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ ***је***:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, ***и*** $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

$$i = (0,1).$$

$$z = (x, 0) + i(y, 0)$$

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy,$$

$$2\,\mathrm{Re}\, z = z + \bar{z}, \quad 2i\,\mathrm{Im}\, z = z - \bar{z}$$

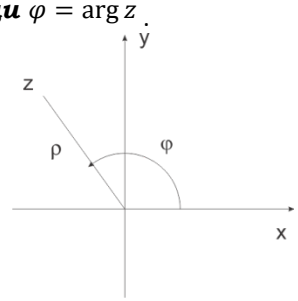
$$\overline{z_1 + z_2 + \cdots\cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots\cdots + \bar{z}_n$$

$$\overline{z_1 z_2 \cdots\cdots z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdots\cdots \bar{z}_n$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2; \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};.$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

**Конвексни оријентисани угао** $\varphi = \angle xOz$ назива се ***основни аргумент од*** $z$ ***, у ознаци*** $\varphi = \arg z$.




$$Argz = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in Z\}$$

$z$ се може написати у ***тригонометријском облику***:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

***Moivre–ова формула***. $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,

***Пример1 . Доказати да је***

$$4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

***Решење. Лева страна је аргумент комплексног броја***

$(5+i)^4(239-i) = (476+480i)(239-i) = 114244 + 114244i$ ***, дакле једнака*** $\frac{\pi}{4}$.

Користећи резултат $|arctgx-(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1})|\le\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,0<x<1 који се доказује у анализи, John Machin је одавде још 1706 године израчунао $\pi$ на 100 децимала.

***Пример 2.*** ***Приказати као збир квадрата израз*** $(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)$.

Одредимо изразе $A$ и $B$ тако да је $(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)=A^2+B^2$.

Нека је $z_k=a_k+ib_k, k=1,2,3$ . Тада је

$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)=(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})(z_3\overline{z_3})=(z_1z_2z_3)\overline{(z_1z_2z_3)}$,

па је

$A=\mathrm{Re}\{z_1z_2z_3\}=(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+a_2b_1)b_3, B=\mathrm{Im}\{z_1z_2z_3\}=(a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+a_2b_1)a_3$

.

***Пример 3 .*** ***Одредити константе*** $A,B,C,D$ ***такве да је***

$\cos^2 x\sin^4 x=A+B\cos 2x+C\cos 4x+D\cos 6x$ , $x\in R$

Некаје $e(x)=\cos x+i\sin x$ . Тада је $\cos x=\frac{e(x)+e(-x)}{2}, \sin x=\frac{e(x)-e(-x)}{2i}$, па је

$$\cos^2 x\sin^4 x=\frac{1}{64i^4}(e(x)+e(-x))^2(e(x)-e(-x))^4=\frac{1}{64}(e^2(x)-e^2(-x))^2(e(x)-e(-x))^2=$$

$$\frac{1}{64}(\mathrm{e}(2\,\mathrm{x})-\mathrm{e}(-2\,\mathrm{x}))^2(\mathrm{e}(2\,\mathrm{x})-2+\mathrm{e}(-2\,\mathrm{x}))=\frac{1}{64}(e(4x)-2+\mathrm{e}(-4\,\mathrm{x}))(\mathrm{e}(2\,\mathrm{x})-2+\mathrm{e}(-2\,\mathrm{x}))$$

$$=\frac{1}{64}[e(6x)-e(2x)+e(-2x)-2e(4x)+4-2e(-4x)+e(2x)-2e(-2x)+e(-6x)]$$

$$=\frac{1}{32}[2-\cos 2x-2\cos 4x+\cos 6x]$$

## 17. КОРЕНОВАЊЕ КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

Једначина $\boldsymbol{z^n=a}$ има тачно $\boldsymbol{n}$ различитих решења.

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2m\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2m\pi}{n}\right), m=0,1,\dots n-1.$$

која се називају $n$***–ти корени броја*** $a$.

***Пример 4.*** ***Израчунати*** $n$***–те корене из броја*** $z=1$**.**

Како је за комплексан број $1, \rho=1$ и $\varphi=0$, имамо

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}, k=0,1,2,\dots,n-1.$$

За $n=7$ из претходног примера следи

$$x^7-1=\prod_{k=0}^{6}(x-\varepsilon_k)=(x-1)(x^2-2\cos\frac{2\pi}{7}x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{7}x+1)(x^2-2\cos\frac{6\pi}{7}x+1).$$

Упоређивањем коефицијената уз $x$ на левој и десној страни одавде добијамо

$0=2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}+1$, а уз $x^3$ да је $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{8}$.

## 18. ZADACI

1. Доказати да важи:

$$arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

$$arctg\frac{1}{3}+arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{1}{7}+arctg\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$4arctg\frac{1}{5}-arctg\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 9^0+\sin 49^0+\sin 89^0+\cdots+\sin 329^0=0$$

2. Израчунати:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$$

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$$

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cdots+\cos^2 nx$$

$$\cos x-\cos 2x+\cdots+(-1)^{n-1}\cos nx$$

$$\sin x-\sin 2x+\cdots+(-1)^{n-1}\sin nx$$

3. Нека је $\cos\alpha^0=\frac{1}{3}$. Доказати да је $\alpha$ ирационалан број.

4. Neka je $x_0=2016, x_{n+1}=\frac{1+x_n}{1-x_n}$. Izračunati $x_{2016}$.

5. Dokaži $\cot x-\cot 2x=\frac{1}{\sin 2x}$, pa izvedi $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x$.

6. Ako je $\cos\alpha$ rešenje kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$, napisati kvadratnu jednačinu čiji je koren $\cos 2\alpha$.

7. Rešiti jednačine: $\cos^n x-\sin^n x=1, n\in N$; $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$.

8. **Rešiti jednačinu** $\{\sin x,\sin 2x\}=\{\cos x,\cos 2x\}$.

9. **Koliki je ugao** $\gamma$ **trougla kod koga je** $3\sin\alpha+4\cos\beta=6, 3\cos\alpha+4\sin\beta=1$?

10. **Rešiti sistem** $x=\frac{2y}{1-y^2}, y=\frac{2x}{1-x^2}$.

11. Rešiti jednačinu $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.

12. Neka je $n\in N, x_0=0, x_i>0$, za $i=1,2,\ldots,n$ i $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. Dokazati da je

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_0-x_1-\cdots-x_{i-1}}\sqrt{1+x_i+x_{i+1}+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}$$

13. Dokazati da se od četiri realna broja uvek mogu odabrati dva $x$ i $y$ tako da je :

a) $0 \le \frac{x-y}{1+xy} \le 1$; b) $\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} > \frac{1}{2}$.

## 19. LITERATURA


**Dugošija Đ. Viša matematika u devet lekcija, Zavod za udžbenike**
**Dugošija Đ. Fundamenti matematike, Zavod za udžbenike 2015**
**Karamata J. Kompleksan broj, Zavod za udžbenike**
**Krechmar Zbornik zadač**
**Savchev S.,Titu Andrescu Mathematical Miniaturs**
**Titu Andrescu, Zuming Feng 103 trig. problems ...**

gen.lib.rus.ec
youproxy.org